MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

77. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE† TÜBINGEN

R. NEVANLINNA HELSINKI

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

77. BAND

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1961

Alle Rechte, einschließlich das der Übersetzung in fremde Sprachen und das der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung, vorbehalten. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Unveränderter Nachdruck 1975

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 77. Bandes

Seite

ATIYAH, M. F., und F. HIRZEBRUCH, Cohomologie-Operationen und charakteristische Klassen 149

BAER, R., Einfache Partitionen nicht-einfacher Gruppen 1

BEHRENS, E.-A., Einreihige Ringe 207

BERGER, R., und E. KUNZ, Über die Struktur der Differentialmoduln von diskreten Bewertungsringen 314

BREUER, M., Zum Pfaffschen Problem 63

ENDLER, O., Über multiplikative Strukturen und eudoxische Hüllen von archimedischen totalgeordneten Gruppen 339

GRÖBNER, W., Über das Umkehrproblem der Abelschen Integrale 101

HABETHA, KL., Über die Werteverteilung in Winkelräumen 453

HAUPT, O., Ordnungsgeometrische Limessätze in kompakten Räumen. I. Mitteilung: Komponentenordnungswerte 81

HERRMANN, O., Geodätische Untermannigfaltigkeiten der Dodekaederräume . . . 131

HLAWKA, E., Über die Diskrepanz mehrdimensionaler Folgen mod. 1 273

HOEHNKE, H.-J., Über die Erzeugung von monomialen Gruppendarstellungen durch Brandtsche Gruppoide 68

JEHNE, W., Zur Verschärfung des F. K. Schmidtschen Einheitensatzes 439

JÖRGENS, K., Das Anfangswertproblem im Großen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen 295

KASCH, F., Dualitätseigenschaften von Frobenius-Erweiterungen 219

KNESER, M., Darstellungsmaße indefiniter quadratischer Formen 188

KOWALSKY, H.-J., Kategorien topologischer Räume 249

KRULL, W., Ordnungsfunktionen und Bewertungen von Körpern 135

LAMPRECHT, E., Zyklische Erweiterungen arithmetischer Funktionenkörper 391

MEISTER, E., Ein Eindeutigkeitsbeweis für ein gemischtes Randwertproblem der Schwingungsgleichung 38

MÜLLER, D., Verbandsgruppen und Durchschnitte endlich vieler Bewertungsringe . 45

Seite

Müller, G. H., Nicht-Standardmodelle der Zahlentheorie 414

Nastold, H.-J., Zur Cohomologietheorie in der algebraischen Geometrie. I. . . . 359

Neubauer, G., Einige Bemerkungen zur Theorie der maximalen Ideale 285

Pickert, G., Zur Einbettung von Halbgruppen in Gruppen 241

Ribenboim, P., Fonctions modulo un antifiltre 195

Roquette, P., Über den Singularitätsgrad von Teilringen in Funktionenkörpern . . 228

Schmidt, H., Eine Anwendung der Siegelschen Transzendenzsätze für Bessel-Funktionen 309

Seifert, H., Zum Satz von O. Bonnet über den Durchmesser einer Eifläche . . . 125

Tillmann, H. G., Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytische Funktionen 106

Wagner, R., Interne Kennzeichnung projektiver Abbildungen auf Quadriken . . 94

BAER, R.
Math. Zeitschr. 77, 1–37 (1961)

Einfache Partitionen nicht-einfacher Gruppen

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

REINHOLD BAER

Unter einer Partition der endlichen Gruppe G ($\neq 1$) verstehen wir eine Menge σ von 1 verschiedener Untergruppen von G [die Komponenten von σ] derart, daß jedes von 1 verschiedene Element aus G in einer und nur einer Komponente von σ liegt. Besteht σ nur aus G, so heißt σ trivial; und σ heißt normal, wenn mit X auch alle zu X in G konjugierten Untergruppen von G Komponenten von σ sind. Schließlich heiße σ einfach, wenn es zu jedem eigentlichen Normalteiler K von G eine Komponente S von σ mit $1 \neq K \cap S \neq S$ gibt. Natürlich folgt aus der Einfachheit von G auch die von σ. Für diese und verwandte Begriffe vgl. BAER [2], im folgenden mit I zitiert.

Wir haben an anderer Stelle (BAER [3], im folgenden mit II zitiert), gezeigt, daß die normale, nicht-triviale Partition σ von G dann und nur dann einfach ist, wenn entweder der Sockel $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht-abelsch ist oder aber G die symmetrische Gruppe des Grades 4 [und der Ordnung 24] ist und σ aus den sämtlichen nicht in $\mathfrak{S}G$ enthaltenen zyklischen Untergruppen von G besteht. In Ergänzung dieses Satzes wollen wir nun hier das folgende Resultat beweisen:

HAUPTSATZ. *Ist der Sockel $\mathfrak{S}G$ von G einfach und nicht abelsch, ist $G \neq \mathfrak{S}G$, besitzt G eine nicht triviale Partition, so gilt:*

(a) $[G : \mathfrak{S}G] = 2$.

(b) *Die Sylow-Untergruppen ungerader Ordnung von G sind abelsch.*

(c) *Die 2-Sylow-Untergruppen von G sind nicht dedekindsch.*

Im Abschnitt A werden wir einige vorbereitende Resultate beweisen, die zum Teil [wie etwa Satz A.9 und Satz A.11] auch von unabhängigem Interesse zu sein scheinen. Im Abschnitt B werden wir dann den Beweis des Hauptsatzes erbringen. Im Abschnitt C wird die Analyse der 2-Sylow-Untergruppen weitergetrieben, über deren Struktur und Situation wir Aussagen machen werden, die erheblich über die Aussage (c) des Hauptsatzes hinausgehen. Insbesondere werden wir die folgende Ergänzung von (c) beweisen:

(c*) *Die 2-Sylow-Untergruppen von G sind Dieder-Gruppen.*

Die im Abschnitt C gewonnenen Resultate über die 2-Sylow-Untergruppen von G gestatten dann, im Abschnitt D noch die folgende interessante Ergänzung des Hauptsatzes zu beweisen.

EINFACHHEITSKRITERIUM. *Die folgenden Eigenschaften der normalen und nicht-trivialen Partition σ der nicht-einfachen Gruppe G sind äquivalent:*

(I) *σ ist einfach.*

(II) *Ist $\mathfrak{F}G \neq 1$, so ist G isomorph zur symmetrischen Gruppe des Grades 4.*

(III) *Ist G nicht isomorph zur symmetrischen Gruppe des Grades 4, so ist $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht-abelsch.*

(IV) *G enthält eine zur symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorphe Untergruppe.*

Die Resultate werden schließlich im Abschnitt E auf das Studium der normalen, nicht trivialen Partitionen mit Komponenten, die weder primär noch Halische Untergruppen sind, angewandt. Diese sind dadurch von besonderem Interesse, daß sie von 1 verschiedene Elemente enthalten, deren Zentralisator nicht nilpotent ist [Zusatz A.6].

Begriffsbildungen und Bezeichnungen aus unserem ersten Beitrag zur Theorie der Partitionen endlicher Gruppen werden wir ständig [und meist ohne besonderen Verweis] benutzen.

BEZEICHNUNGEN:

$o(g)$ = Ordnung des Gruppenelements g.

$o(G)$ = Ordnung der Gruppe G.

p-Element [p-Gruppe] = Gruppenelement [Gruppe] mit p-Potenzordnung.

$\mathfrak{Z}G$ = Zentrum der Gruppe G.

$\mathfrak{F}G$ = Fittingsche Untergruppe der Gruppe G = Produkt aller nilpotenten Normalteiler von G.

$\mathfrak{S}G$ = Sockel der Gruppe G = Produkt aller minimalen Normalteiler von G.

$\mathfrak{N}U$ = Normalisator der Untergruppe U von G in G.

$\mathfrak{C}U$ = Zentralisator der Teilmenge U von G in G.

$a^b = b^{-1}ab = a(a \circ b)$.

$x \circ Y$ = Menge der Kommutatoren $x \circ y$ mit y in Y.

Normalisatorgleich sind $U = \mathfrak{N}U$ erfüllende Untergruppen U.

Hallsche Untergruppen sind Untergruppen U von G mit $(o(U), [G:U]) = 1$.

$A < B$ bedeutet, daß A eine Untergruppe von B und $B \neq A$ ist.

ALLE BETRACHTETEN GRUPPEN SIND ENDLICH.

A. Wir wollen zunächst eine Reihe von Eigenschaften einfacher Partitionen zusammenstellen, die wir ständig gebrauchen werden.

HILFSSATZ A.1. *Ist G eine Gruppe mit einfachem, nicht-abelschem Sockel $\mathfrak{S}G$ und σ eine normale, nicht-triviale Partition von G, so gilt:*

(a) *σ ist einfach.*

(b) *Alle Komponenten von σ sind nilpotent.*

(c) *$\mathfrak{S}G$ ist in keiner Komponente von σ enthalten.*

(d) *Ist U eine $\mathfrak{S}G$ enthaltende Untergruppe von G, so ist $\mathfrak{S}U = \mathfrak{S}G$.*

BEWEIS. Wäre σ nicht einfach, so gäbe es einen eigentlichen, σ-zulässigen Normalteiler K von G. Dieser wäre nach einem Satz von KEGEL nilpotent; vgl. KEGEL [Satz 2]. Jeder in K enthaltene minimale Normalteiler von G ist also abelsch. Da es aber wenigstens einen in $K \neq 1$ enthaltenen minimalen Normalteiler von G gibt, so enthält $\mathfrak{S}G$ wenigstens einen von 1 verschiedenen, abelschen Normalteiler von G im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, daß $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht abelsch ist. Also ist σ einfach. [Man bemerke, daß wir von der Normalität von σ bisher keinen Gebrauch gemacht haben.]

Aus der Einfachheit von σ folgt insbesondere, daß σ keine Frobenius-Partition von G ist; vgl. I, Satz 4.1, (1). Also ist keine der Komponenten von σ normalisatorgleich; und es folgt aus einem Satz von KEGEL, daß alle Komponenten von σ nilpotent sind; vgl. KEGEL [Satz 2].

Da $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht-abelsch ist, so folgt (c) aus (b).

Ist U eine $\mathfrak{S}G$ enthaltende Untergruppe von G, so ist $\mathfrak{S}G$ als einfacher Normalteiler von U gewiß in $\mathfrak{S}U$ enthalten. Wäre $\mathfrak{S}G \neq \mathfrak{S}U$, so wäre der einfache Normalteiler $\mathfrak{S}G$ von U ein direkter Faktor von $\mathfrak{S}U$; s. etwa SPECHT [p. 272–274]. Hieraus würde zunächst $\mathfrak{C}\mathfrak{S}G \neq 1$ folgen. Andererseits ist $1 = \mathfrak{Z}\mathfrak{S}G = \mathfrak{S}G \cap \mathfrak{C}\mathfrak{S}G$, da $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht abelsch ist. Da die mit $\mathfrak{S}G$ charakteristische Untergruppe $\mathfrak{C}\mathfrak{S}G \neq 1$ minimale Normalteiler von G enthält, die dann in $\mathfrak{S}G \cap \mathfrak{C}\mathfrak{S}G = 1$ enthalten sind, so sind wir zu einem Widerspruch geführt worden, aus dem (d) folgt.

HILFSSATZ A.2. *Sind K und L echte Normalteiler von $G = KL$, so ist $L \cap \mathfrak{C}k \neq 1$ für jedes Element k aus K.*

BEWEIS. Sei k ein Element aus K mit $L \cap \mathfrak{C}k = 1$. Sind dann x und y Elemente aus L mit $k \circ x = k \circ y$, so ist auch $k^x = k^y$, woraus die Zugehörigkeit von xy^{-1} zu $L \cap \mathfrak{C}k = 1$ folgt. Also ist $xy^{-1} = 1$ und $x = y$. Mithin enthält die Menge $k \circ L$ von Kommutatoren $k \circ x$ mit x aus L genau $o(L)$ Elemente. Da L ein Normalteiler von KL ist, so ist $k \circ L$ eine Teilmenge von L; und aus der Gleichmächtigkeit von L und $k \circ L$ folgt $L = k \circ L$. Da k in dem Normalteiler K von KL liegt, so ist $L = k \circ L$ in K enthalten, woraus $K = KL = G$ folgt. Dies widerspricht unserer Annahme, daß K ein echter Normalteiler von G ist; und aus diesem Widerspruch ergibt sich $L \cap \mathfrak{C}k \neq 1$ für jedes k aus K.

LEMMA A.3. *Ist K ein eigentlicher Normalteiler der Gruppe G mit p-Faktorgruppe G/K, ist die p-Sylow-Untergruppe P von G in der Komponente S der Partition σ von G enthalten, so ist $S = \mathfrak{N}S$.*

BEWEIS. Wäre dies nicht wahr, so wäre also $S \neq \mathfrak{N}S$; und wir könnten aus einem Kegelschen Satz die Nilpotenz von S folgern; vgl. KEGEL [Satz 2]. Da die p-Sylow-Untergruppe P von G in der nilpotenten Gruppe S enthalten ist, so ist P die p-Sylow-Untergruppe von S und also eine charakteristische Untergruppe von S und ein Normalteiler von $\mathfrak{N}S$. Da G/K eine von 1 verschiedene p-Gruppe ist, so wird $G = KP$ und $P \neq 1$. Aus $P \subseteq S \subset \mathfrak{N}S \subseteq G = PK$ und dem Dedekindschen Modulsatz folgt $\mathfrak{N}S = P(K \cap \mathfrak{N}S)$, so daß $K \cap \mathfrak{N}S$ nicht in S enthalten sein kann. Da S eine Komponente von σ ist und es nicht zu S

gehörige Elemente in $K \cap \mathfrak{N} S$ gibt, so gibt es ein Element w von Primzahlordnung, das zu $K \cap \mathfrak{N} S$, aber nicht zu S gehört. Da P ein Normalteiler von $\mathfrak{N} S$ ist und also von w normalisiert wird, da w nicht zu S und also auch nicht zu P gehört, und da $P \neq 1$ eine p-Sylow-Untergruppe von G ist, so ist $p = o(w)$. Wäre w mit einem Element $t \neq 1$ aus P vertauschbar, so würde aus I, Lemma 2.1 wegen der Teilerfremdheit von $o(w)$ und $o(t)$ folgen, daß w und t der gleichen Komponente S von σ angehören, was aber durch die Wahl von w ausgeschlossen ist. Also ist $P \cap \mathfrak{C} w = 1$.

P und $K \cap \mathfrak{N} S$ sind Normalteiler von $\mathfrak{N} S$. Von diesen liegt P nicht in K und also auch nicht in $K \cap \mathfrak{N} S$, da ja $K < G = K P$ ist; und $K \cap \mathfrak{N} S$ liegt nicht in S und erst recht nicht in P. Also sind P und $K \cap \mathfrak{N} S$ eigentliche Normalteiler ihres Produkts $P(K \cap \mathfrak{N} S)$. Anwendung von Hilfssatz A.2 ergibt $P \cap \mathfrak{C} w \neq 1$, da ja w in $K \cap \mathfrak{N} S$ liegt. Damit sind wir zu einem Widerspruch geführt worden, aus dem $S = \mathfrak{N} S$ folgt.

BEMERKUNG A.4. Ist S eine normalisatorgleiche Komponente der normalen Partition σ von G, so ist entweder σ trivial und $S = G$ oder σ ist eine Frobenius-Partition, auf die wir I, Satz 4.1 anwenden können.

LEMMA A.5. *Die folgenden Eigenschaften der Komponente X der normalen Partition σ von G sind äquivalent:*

(a) *X ist eine Hallsche Untergruppe von G.*

(b) *X ist eine Hallsche Untergruppe von $\mathfrak{N} X$.*

(c) *$X = \mathfrak{N} X$ oder $\sigma \cap \mathfrak{N} X$ ist eine minimale Frobenius-Partition von $\mathfrak{N} X$.*

BEWEIS. Es ist klar, daß (b) aus (a) folgt. — Wir nehmen als nächstes an, daß $X \neq \mathfrak{N} X$ und X ein Hallscher Normalteiler von $\mathfrak{N} X$ ist. Dann ist $\sigma \cap \mathfrak{N} X$ eine normale, nicht-einfache Partition von $\mathfrak{N} X$; und $\mathfrak{N} X$ ist gewiß keine Primärgruppe. Aus I, Satz 5.1, (a) folgt, daß $\sigma \cap \mathfrak{N} X$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N} X$ ist; und aus I, Satz 4.1, (4) ergibt sich weiter $X \leqq \mathfrak{F} \mathfrak{N} X$. Ist $\mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ nicht primär, so ist die nilpotente Untergruppe $\mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ von $\mathfrak{N} X$ wegen I, Folgerung 2.3 ganz in einer Komponente von $\sigma \cap \mathfrak{N} X$ enthalten und also $X = \mathfrak{F} \mathfrak{N} X$. Ist aber $\mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ primär, so folgt $X = \mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ aus $1 < X \leqq \mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ und der Tatsache, daß X als Hallsche Untergruppe von $\mathfrak{N} X$ auch eine von $\mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ ist. Also ist $\sigma \cap \mathfrak{N} X$ eine minimale Frobenius-Partition von $\mathfrak{N} X$; und wir haben (c) aus (b) hergeleitet.

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (c) an. Ist zunächst $X = \mathfrak{N} X$, so ist entweder $X = G$ und dann ist X sicherlich eine Hallsche Untergruppe von G; oder aber es ist $X \neq G$ und σ ist eine Frobenius-Partition von G. Wegen I, Satz 4.1, (1) und (2) ist dann X eine Hallsche Untergruppe von G. Bleibt noch der Fall, daß $X \neq \mathfrak{N} X$ ist. Dann ist $\sigma \cap \mathfrak{N} X$ eine minimale Frobenius-Partition von $\mathfrak{N} X$; und es ist $X = \mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ [wegen I, Satz 4.1, (4)]. Aus I, Satz 4.1, (1) folgt, daß $X = \mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ eine Hallsche Untergruppe von $\mathfrak{N} X$ ist. Wäre nun p ein gemeinsamer Primteiler von $o(X)$ und $[G:X]$, so gäbe es eine p-Sylow-Untergruppe P von G derart, daß $P \cap X$ eine p-Sylow-Untergruppe von X und $1 < P \cap X < P$ ist. Aus der Nilpotenz der p-Gruppe P folgt dann die Existenz eines Elements w in $P \cap \mathfrak{N}(P \cap X)$, das nicht in $P \cap X$ liegt.

Aus $1 \neq P \cap X$ und I, Lemma 2.5 folgt die Zugehörigkeit von w zu $\mathfrak{N}X$. Da X ein Hallscher Normalteiler von $\mathfrak{N}X$ ist, da weiter p ein Teiler von $o(X)$ und w ein p-Element ist, so gehört w sogar zu X und also zu $P \cap X$. Dies ist ein Widerspruch; und hieraus folgt wieder, daß X eine Hallsche Untergruppe von G ist. Damit ist die Äquivalenz von (a), (b) und (c) dargetan.

ZUSATZ A.6. *Ist die Komponente X der normalen Partition σ von G weder primär noch eine Hallsche Untergruppe von G, so gilt:*

(1) $[\mathfrak{N}X : X] = p$ *ist eine $o(X)$ teilende Primzahl.*

(2) $X = \mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ *wird von den Elementen aus $\mathfrak{N}X$ mit von p verschiedener Ordnung erzeugt.*

(3) *Die Menge Y der Elemente aus X mit zu p teilerfremder Ordnung ist eine Hallsche Untergruppe von G.*

(4) $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X = X \cap \mathfrak{Z}P \neq 1$ *für alle p-Sylow-Untergruppen P von $\mathfrak{N}X$.*

BEWEIS. Da X keine Hallsche Untergruppe von G ist, so ergibt sich aus Lemma A.5, daß X auch keine Hallsche Untergruppe von $\mathfrak{N}X$ ist, daß $X \neq \mathfrak{N}X$ und $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ keine minimale Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$ ist. Aus KEGEL [Satz 2] folgt dann die Nilpotenz des Normalteilers X von $\mathfrak{N}X$, so daß $X \subseteqq \mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ ist. Mit X ist auch $\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ nicht primär; und aus I, Folgerung 2.3 ergibt sich, daß $\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ ganz in einer Komponente von σ enthalten ist. Diese Komponente enthält mit $\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ auch die Komponente X von σ. Also wird $X = \mathfrak{F}\mathfrak{N}X$. Wäre $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$, so wäre $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ sogar eine minimale Frobenius-Partition. Dies haben wir bereits als unmöglich erkannt. Also ist $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ keine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$.

Da die Komponente X von $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ ein Normalteiler von $\mathfrak{N}X$ ist, so ist $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ eine normale, nicht-einfache Partition von $\mathfrak{N}X$. Sie ist keine Frobenius-Partition und $\mathfrak{N}X$ ist nicht primär. Anwendung von I, Satz 5.1, (c) ergibt, daß $[\mathfrak{N}X : X] = p$ eine Primzahl ist, und daß X von den Elementen aus $\mathfrak{N}X$ mit von p verschiedener Ordnung erzeugt wird. Wäre p kein Teiler von $o(X)$, so wäre X eine Hallsche Untergruppe von $\mathfrak{N}X$. Dies haben wir bereits als unmöglich erkannt. Damit haben wir die Gültigkeit von (1) und (2) bewiesen.

Die Menge Y der Elemente aus X mit zu p teilerfremder Ordnung ist eine charakteristische Untergruppe der nilpotenten Gruppe X. Wäre die Primzahl q ein gemeinsamer Primteiler von $o(Y)$ und $[G : Y]$, so wäre sicherlich $q \neq p$; und die q-Sylow-Untergruppe $Q \neq 1$ von Y wäre zwar auch eine q-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}X$, sogar die Gesamtheit aller q-Elemente aus $\mathfrak{N}X$, aber keine q-Sylow-Untergruppe von G. Daraus folgt die Existenz eines Q normalisierenden, aber nicht in Q enthaltenen q-Elements w in G. Aus $1 < Q \subseteqq Y \subseteqq X$ und I, Lemma 2.5 folgt die Zugehörigkeit von w zu $\mathfrak{N}X$ und also zu Q; und aus diesem Widerspruch folgt die Gültigkeit von (3).

Da $\mathfrak{N}X/Y$ offenbar eine p-Gruppe ist, so ist $\mathfrak{N}X = YP$ und $1 = Y \cap P$ für jede p-Sylow-Untergruppe P von $\mathfrak{N}X$. Wäre $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X$ nicht in X enthalten, so gäbe es wegen $[\mathfrak{N}X : X] = p$ ein Element der Ordnung p in $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X$, das

nicht zu X gehörte, wegen I, Lemma 2.1 aber zur gleichen Komponente wie Y gehören müßte. Dies ist unmöglich; und folglich ist $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X \subseteq X$. Es gibt ein nicht in X enthaltenes Element t in P; und aus I, Lemma 2.1 folgt $Y \cap \mathfrak{C}t = 1$. Also ist $Y \cap \mathfrak{Z}\mathfrak{N}X = 1$, so daß $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X$ in der p-Sylow-Untergruppe $P \cap X$ der nilpotenten Gruppe X enthalten sein muß. Man folgert sofort $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X \subseteq X \cap \mathfrak{Z}P$. Da Elemente aus Y und Elemente aus $P \cap X$ miteinander vertauschbar sind, so wird $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X = X \cap \mathfrak{Z}P$. Da $X \cap P$ ein Normalteiler von P und eine p-Sylow-Untergruppe von X ist, und da p ein Teiler von $o(X)$ ist, so wird $X \cap P \neq 1$ und also $X \cap \mathfrak{Z}P \neq 1$. Damit ist auch (4) bewiesen.

FOLGERUNG A.7. *Ist X eine Komponente der normalen Partition σ von G, so gibt es höchstens einen gemeinsamen Primteiler von $o(X)$ und $[G:X]$.*

BEWEIS. Unsere Behauptung ist trivialerweise richtig, wenn X primär ist, und ebenfalls wenn X eine Hallsche Untergruppe von G ist. Ist aber X weder eine Primärgruppe noch eine Hallsche Untergruppe von G, so folgt aus Zusatz A.6, daß $[\mathfrak{N}X:X]$ eine Primzahl p ist, die $o(X)$ teilt, und daß die Elemente aus X mit zu p teilerfremder Ordnung eine Hallsche Untergruppe Y von G bilden. Ist also q ein von p verschiedener Primteiler von $o(X)$, so ist q ein Primteiler von $o(Y)$ und Y enthält eine volle q-Sylow-Untergruppe von G, so daß q kein Teiler von $[G:Y]$ und a fortiori auch kein Teiler von $[G:X]$ ist. Also ist in diesem Falle p der einzige gemeinsame Primteiler von $o(X)$ und $[G:X]$.

LEMMA A.8. *Besitzt die p-Gruppe G eine zyklische Faktorgruppe, deren Ordnung ein Vielfaches von p^2 ist, so ist die triviale Partition die einzige Partition von G.*

BEWEIS. Gäbe es überhaupt eine nicht-triviale Partition von G, so gäbe es nach einer Kegelschen Bemerkung auch eine normale, nicht-triviale Partition σ von G; vgl. I, Beweis von Satz 4.7. Nach Voraussetzung gibt es einen Normalteiler K von G mit zyklischer Faktorgruppe G/K, deren Ordnung $[G:K]$ ein Vielfaches von p^2 ist. Es sei E eine erzeugende Restklasse von G/K. Dann ist p^2 ein Teiler von $o(e)$ für jedes e aus E. Aus I, Zusatz 5.6 folgt nun die Existenz einer Komponente S von σ, die alle Elemente aus G mit von p verschiedener Ordnung enthält. Offenbar ist E eine Teilmenge von S. Da aber $G/K = \{E\}$ ist, so folgt $G = S$. Also ist σ trivial.

SATZ A.9. *Besitzt die Gruppe G eine zyklische Faktorgruppe, deren Ordnung weder 1 noch eine Primzahl ist, so sind die normalen, nicht trivialen Partitionen von G Frobenius-Partitionen von G.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung existiert ein Normalteiler $K \neq G$ von G mit zyklischer Faktorgruppe G/K, deren Ordnung $[G:K]$ keine Primzahl ist. Sei weiter σ eine normale Partition von G.

Sei zunächst G/K eine p-Gruppe. Dann gibt es in einer G/K erzeugenden Restklasse ein p-Element a; und dieses liegt in einer p-Sylow-Untergruppe S von G. Dann wird $G = KS$, so daß $G/K \cong S/(K \cap S)$ eine zyklische p-Gruppe ist, deren Ordnung, da weder 1 noch eine Primzahl, ein Vielfaches von p^2 ist. Anwendung von Lemma A.8 zeigt, daß die normale Partition $\sigma \cap S$ von S

trivial ist. Folglich ist S ganz in einer Komponente T von σ enthalten; und es gilt offenbar $G=KS=KT$.

Sei weiter G/K nicht primär. Da $[G:K]$ weder 1 noch eine Primzahl ist, so ist $[G:K]$ durch wenigstens zwei verschiedene Primzahlen teilbar. Ist e ein G modulo K erzeugendes Element, so ist auch $o(e)$ durch wenigstens zwei verschiedene Primzahlen teilbar. Sei E die eindeutig bestimmte Komponente von σ, die e enthält. Dann ist E gewiß nicht primär. Ist E keine Hallsche Untergruppe von G, so ergibt sich aus Zusatz A.6, daß $[\mathfrak{N}E:E]=p$ eine Primzahl ist, und daß die Elemente aus E mit zu p teilerfremder Ordnung eine Hallsche Untergruppe F von G bilden. Wäre F eine Untergruppe von K, so würde aus $G/K\cong E/(E\cap K)$ folgen, daß G/K als epimorphes Bild der p-Gruppe E/F selbst primär ist. Dies ist aber im gegenwärtigen Falle ausgeschlossen. Zusammenfassend haben wir folgendes gezeigt:

Es gibt eine Komponente X von σ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $G=KX$;

(b) X enthält eine Hallsche Untergruppe Y von G, die nicht in K enthalten ist.

Insbesondere existiert ein gemeinsamer Primteiler r von $o(Y)$ und $[G:K]$. Da G/K zyklisch ist, so gibt es auch einen K enthaltenden Normalteiler R von G derart, daß G/R eine von 1 verschiedene, zyklische r-Gruppe ist. Dann ist $G=KX=RY$ und X enthält mit Y eine r-Sylow-Untergruppe von G. Anwendung von Lemma A.3 ergibt $X=\mathfrak{N}X$, so daß σ entweder trivial oder eine Frobenius-Partition von G ist.

Bemerkung A.10. Es ist leicht, Beispiele von Gruppen G zu konstruieren, die sowohl Frobenius-Partitionen wie auch zyklische Faktorgruppen besitzen, deren Ordnung weder 1 noch eine Primzahl ist.

Satz A.11. *Ist p ein Primteiler von $o(G)$, sind, falls $p=2$ ist, die 2-Sylow-Untergruppen von G dedekindsch, existiert weiter eine nicht-triviale Partition von G, so sind die folgenden Eigenschaften von G und p äquivalent:*

(a) *G ist p'-abgeschlossen.*

(b) *Es gibt eine von 1 verschiedene p-Faktorgruppe von G.*

(c) *$P\not\trianglelefteq(\mathfrak{N}P)'$ für jede p-Sylow-Untergruppe P von G.*

Es sei zunächst daran erinnert, daß eine Gruppe G dann und nur dann *p'-abgeschlossen* ist, wenn die Menge der Elemente aus G mit zu p teilerfremder Ordnung eine Untergruppe von G ist. Diese Eigenschaft ist offenbar gleichwertig mit der Existenz eines Normalteilers mit p-Faktorgruppe und zu p teilerfremder Ordnung. Weiter nennen wir Gruppen *dedekindsch*, wenn alle ihre Untergruppen Normalteiler sind.

Beweis. Aus der Existenz einer nicht trivialen Partition von G folgt nach einer Kegelschen Bemerkung die Existenz einer normalen, nicht-trivialen Partition σ von G; vgl. I, Beweis von Satz 4.7.

Ist zunächst G eine p'-abgeschlossene Gruppe, so gibt es einen Normalteiler K mit p-Faktorgruppe G/K und zu p teilerfremder Ordnung. Da aber

$o(G)$ durch p teilbar ist, so ist auch $[G:K]$ durch p teilbar, so daß G/K eine von 1 verschiedene p-Faktorgruppe von G ist. Also folgt (b) aus (a).

Gilt weiter (b), so ergibt sich aus den wohlbekannten Eigenschaften der p-Gruppen die Existenz eines Normalteilers K von G mit von 1 verschiedener abelscher p-Faktorgruppe. Insbesondere ist dann $G' \subseteq K$. Ist P eine p-Sylow-Untergruppe von G, so ist auch $G = KP$; und da $K \neq G$ ist, so ist P nicht in K enthalten. Also wird

$$P \cap (\mathfrak{N}P)' \subseteq P \cap G' \subseteq P \cap K < P,$$

womit wir (c) aus (b) hergeleitet haben.

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (c) an. Der Hauptschritt unseres Beweises ist der Nachweis der Gültigkeit folgender Aussage:

(+) *Ist R ein Normalteiler einer p-Sylow-Untergruppe von G, so ist $\mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ eine p-Gruppe.*

Diese Behauptung ist sicher richtig, wenn $R = 1$ ist. Sie ist ebenfalls sicherlich richtig, wenn $\mathfrak{N}R$ nilpotent ist, da ja in nilpotenten Gruppen Elemente teilerfremder Ordnung vertauschbar sind. Wir nehmen also im folgenden an, daß $R \neq 1$ und $\mathfrak{N}R$ nicht nilpotent ist.

Ist $\sigma \cap \mathfrak{N}R$ trivial, so ist $\mathfrak{N}R$ in einer Komponente F von σ enthalten. Mit $\mathfrak{N}R$ ist auch F nicht nilpotent; und aus einem Kegelschen Satz folgt die Normalisatorgleichheit von F; vgl. KEGEL [Satz 2]. Dann ist σ eine Frobenius-Partition von G; und aus I, Satz 4.1, (5) ergibt sich, daß eine p-Sylow-Untergruppe von F eine und nur eine Untergruppe der Ordnung p enthält. Dasselbe gilt natürlich auch von $\mathfrak{N}R$. Da aber der p-Normalteiler $R \neq 1$ von $\mathfrak{N}R$ in jeder p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}R$ enthalten ist, so besitzt $\mathfrak{N}R$ eine und nur eine Untergruppe E der Ordnung p; und diese charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}R$ ist in R enthalten.

Da R Normalteiler einer p-Sylow-Untergruppe von G ist, so enthält $\mathfrak{N}R$ volle p-Sylow-Untergruppen von G und die p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}R$ sind auch p-Sylow-Untergruppen von G. Sei P eine R enthaltende und in $\mathfrak{N}R$ enthaltene p-Sylow-Untergruppe von G.

Wir erledigen zunächst den Fall $p = 2$. Dann ist P eine dedekindsche Gruppe, die ein und nur ein Element der Ordnung 2 enthält. Eine solche ist entweder zyklisch oder eine Quaternionengruppe; vgl. ZASSENHAUS [p. 123, Satz]. Ist R zyklisch, so ist die Gruppe aller Automorphismen von R eine 2-Gruppe, so daß auch $\mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ eine 2-Gruppe ist. Ist R nicht zyklisch, so ist auch P nicht zyklisch. Dann ist P eine Quaternionengruppe. Die einzige nicht-zyklische Untergruppe von P ist dann P selbst, so daß $R = P$ ist. Aus (c) folgt, daß P nicht in $(\mathfrak{N}P)'$ enthalten ist, so daß $[\mathfrak{N}P:(\mathfrak{N}P)']$ gerade ist und es einen Normalteiler J von $\mathfrak{N}P$ mit Index $[\mathfrak{N}P:J] = 2$ gibt. Dann ist auch $[P:P \cap J] = 2$; und da P eine Quaternionengruppe ist, so ist der Normalteiler $P \cap J$ von $\mathfrak{N}P$ zyklisch der Ordnung 4. Alle Elemente aus $\mathfrak{N}P$ induzieren also in P Automorphismen, die eine zyklische Untergruppe der Ordnung 4 invariant lassen; und derartige Automorphismen der Quaternionen-

gruppe haben die Ordnung 1 oder 2. Also haben auch alle Elemente aus $\mathfrak{N}P/\mathfrak{C}P = \mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ die Ordnung 1 oder 2, so daß $\mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ eine 2-Gruppe ist.

Sei weiter p ungerade. Da P eine und nur eine Untergruppe der Ordnung p enthält, so ist P nach einem Burnsideschen Resultat zyklisch; vgl. BURNSIDE [p. 131, Theorem V]. Da alle Untergruppen einer zyklischen Gruppe charakteristische Untergruppen sind, so wird die Untergruppe R von P von jedem Element aus dem Normalisator von P normalisiert. Also ist $\mathfrak{N}P \subseteqq \mathfrak{N}R$. Da P zyklisch ist, so gilt $P \subseteqq \mathfrak{C}R$; und da P eine p-Sylow-Untergruppe von G, $\mathfrak{N}R$ und $\mathfrak{C}R$ ist, so folgt aus dem Frattinischen Schluß sogar $\mathfrak{N}R = (\mathfrak{N}P)(\mathfrak{C}R)$; vgl. etwa BAER [1; p. 117, Lemma 1]. Wäre nun $\mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ keine p-Gruppe, so wäre auch die zu $\mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{N}P/(\mathfrak{N}P \cap \mathfrak{C}R)$ keine p-Gruppe; und es gäbe also ein Element A aus $\mathfrak{N}P/(\mathfrak{N}P \cap \mathfrak{C}R)$, dessen Ordnung $o(A)$ eine von p verschiedene Primzahl q ist. Dann enthält A ein q-Element a; und dieses q-Element a liegt in $\mathfrak{N}P$, aber nicht in $\mathfrak{C}R$. Aus (c) folgt $P \subseteqq (\mathfrak{N}P)'$, so daß $[\mathfrak{N}P : (\mathfrak{N}P)']$ durch p teilbar ist. Dann besitzt $\mathfrak{N}P$ einen Normalteiler J mit $[\mathfrak{N}P : J] = p$. Das q-Element a aus $\mathfrak{N}P$ liegt dann in J. Ist b ein erzeugendes Element der zyklischen Gruppe P, so liegt b wegen $\mathfrak{N}P = PJ$ nicht in J, während der Kommutator $a \circ b$ in $P \cap J < P$ liegt. Daraus folgt aber bekanntlich, daß der von a in $P = \{b\}$ induzierte Automorphismus ein p-Automorphismus ist; und da a ein q-Element mit $q \neq p$ ist, so liegt a sogar in $\mathfrak{C}R$. Dies ist ein Widerspruch, aus dem wieder folgt, daß $\mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ eine p-Gruppe ist. Wir können und wollen also im folgenden annehmen, daß $\sigma \cap \mathfrak{N}R$ nicht trivial ist.

Wäre $\mathfrak{N}R$ isomorph der symmetrischen Gruppe des Grades 4, so wäre der primäre Normalteiler $R \neq 1$ von $\mathfrak{N}R$ notwendig elementar-abelsch der Ordnung 4; und es wäre $p = 2$. Die 2-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}R$ haben die Ordnung 8 und sind weder abelsch noch Quaternionengruppen, also nicht dedekindsch. Folglich sind die 2-Sylow-Untergruppen von G auch nicht dedekindsch, was unseren Voraussetzungen widerspricht. Mithin ist $\mathfrak{N}R$ nicht isomorph der symmetrischen Gruppe des Grades 4. Da aber $\mathfrak{N}R$ den p-Normalteiler $R \neq 1$ besitzt, und da die normale Partition $\sigma \cap \mathfrak{N}R$ nicht trivial ist, so ergibt sich aus II, Satz A die Nicht-Einfachheit von $\sigma \cap \mathfrak{N}R$.

Wäre $\sigma \cap \mathfrak{N}R$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}R$, so folgte aus I, Satz 4.1, (1) und (5), daß $\mathfrak{F}\mathfrak{N}R$ eine eigentliche, Hallsche, charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}R$ ist, und daß $\mathfrak{F}\mathfrak{N}R \cap \mathfrak{C}t = 1$ für nicht in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}R$ enthaltene Elemente t aus $\mathfrak{N}R$ gilt. Natürlich ist $1 < R \subseteqq \mathfrak{F}\mathfrak{N}R$. Da p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{F}\mathfrak{N}R$ auch p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}R$ sind, und da p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}R$ auch solche von G sind, so ist die p-Sylow-Untergruppe P der nilpotenten Gruppe $\mathfrak{F}\mathfrak{N}R$ auch eine p-Sylow-Untergruppe von G. Als charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{F}\mathfrak{N}R$ ist P auch eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}R$, so daß $\mathfrak{N}R \subseteqq \mathfrak{N}P$ ist. Aus (c) folgt, daß P nicht in $(\mathfrak{N}P)'$ enthalten ist. Also ist p ein Teiler von $[\mathfrak{N}P : (\mathfrak{N}P)']$; und hieraus folgt die Existenz eines Normalteilers J von $\mathfrak{N}P$ mit $[\mathfrak{N}P : J] = p$. Dann ist $\mathfrak{N}P = PJ \neq J$. Also ist $J^* = J \cap \mathfrak{N}R$ ein Normalteiler von $\mathfrak{N}R$, der P nicht enthält, aber $\mathfrak{N}R = PJ^*$ erfüllt. Da $\mathfrak{N}R$ nicht nilpotent ist, so ist $\mathfrak{N}R \neq P$; und damit haben wir

$\mathfrak{N}R$ als Produkt eigentlicher Normalteiler P und J^* dargestellt. Es gibt ein Element t in J^*, das nicht in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}R$ liegt, da sonst $\mathfrak{N}R$ nilpotent wäre; und für dieses Element t gilt wie oben bemerkt $P \cap \mathfrak{C}t = 1$. Dies widerspricht aber Hilfssatz A.2; und aus diesem Widerspruch folgt, daß $\sigma \cap \mathfrak{N}R$ keine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}R$ ist.

Wir haben also gezeigt, daß $\mathfrak{N}R$ nicht nilpotent und insbesondere auch nicht primär ist, und daß die Partition $\sigma \cap \mathfrak{N}R$ von $\mathfrak{N}R$ normal und nicht-einfach, aber keine Frobenius-Partition ist. Anwendung von I, Satz 5.1, (c) ergibt die Existenz einer Komponente K von $\sigma \cap \mathfrak{N}R$, die ein Normalteiler von $\mathfrak{N}R$ mit Primzahlindex $[\mathfrak{N}R : K]$ ist. Da die Komponente K als echter Normalteiler von $\mathfrak{N}R$ nicht normalisatorgleich ist, so ist sie nach einem Kegelschen Satz nilpotent; vgl. KEGEL [Satz 2]. Da R ein primärer Normalteiler von $\mathfrak{N}R$ ist, so ist KR ein nilpotenter Normalteiler von $\mathfrak{N}R$. Da $\mathfrak{N}R$ nicht nilpotent ist, so ist $KR \neq \mathfrak{N}R$; und da $[\mathfrak{N}R : K]$ eine Primzahl ist, so wird $KR = K$, d.h. $R \leqq K$.

Ist P eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}R$, so ist $R \leqq P$, da ja R ein p-Normalteiler von $\mathfrak{N}R$ ist. Da R Normalteiler einer p-Sylow-Untergruppe von G ist, so enthält $\mathfrak{N}R$ eine p-Sylow-Untergruppe von G und jede p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}R$, insbesondere P, ist eine p-Sylow-Untergruppe von G. Wäre P in K enthalten, so wäre P als p-Sylow-Untergruppe des nilpotenten Normalteilers K von $\mathfrak{N}R$ selbst ein Normalteiler von $\mathfrak{N}R$, woraus $\mathfrak{N}R \leqq \mathfrak{N}P$ folgt. Es ist also $[\mathfrak{N}R : K] = q \neq p$; und es gibt in $\mathfrak{N}R$ ein nicht in K enthaltenes Element t der Primzahlordnung q. Aus I, Lemma 2.1 folgt dann sofort $P \cap \mathfrak{C}t = 1$; und hieraus folgt, daß $o(P)$ die Anzahl der Kommutatoren der Form $x \circ t$ mit x in P ist. Also wird $P = P \circ t \leqq (\mathfrak{N}R)' \leqq (\mathfrak{N}P)'$; und dies widerspricht (c). Folglich ist P nicht in K enthalten und es wird $[\mathfrak{N}R : K] = p$ und $\mathfrak{N}R = KP$. Da Elemente teilerfremder Ordnung in der nilpotenten Gruppe K vertauschbar sind, so ist der Normalteiler R von K mit allen Elementen aus K vertauschbar, deren Ordnung zu p teilerfremd ist. Aus $\mathfrak{N}R = KP$ folgt dann $\mathfrak{N}R = P \cdot \mathfrak{C}R$. Also ist $\mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ eine p-Gruppe; und damit ist (+) voll bewiesen.

Um den Beweis des Satzes zu beenden, unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem p grade oder ungrade ist.

FALL 1: $p \neq 2$. Dann folgt aus (+) und JOHN THOMPSONS berühmtem Kriterium die p'-Abgeschlossenheit von G; vgl. THOMPSON [p. 332, Theorem A].

FALL 2: $p = 2$. Dann sind die 2-Sylow-Untergruppen von G dedekindsch; und alle 2-Untergruppen von G sind Normalteiler der sie enthaltenden 2-Sylow-Untergruppen. Aus (+) folgt also, daß $\mathfrak{N}T/\mathfrak{C}T$ für jede 2-Untergruppe T von G eine 2-Gruppe ist. Die 2'-Abgeschlossenheit folgt jetzt aus einem Satz von FROBENIUS; vgl. etwa M. HALL, JR. [p. 217, Theorem 14.4.7].

Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

BEMERKUNG A.12. Es gibt zahlreiche Gruppen mit von 1 verschiedenen p-Faktorgruppen, die nicht p'-abgeschlossen sind; man braucht ja nur das direkte Produkt einer p-Gruppe und einer nicht p'-abgeschlossenen Gruppe

zu bilden. Es ist also klar, daß die Bedingung (a) des Satzes A.11 viel schärfer ist als (b).

BEMERKUNG A.13. Ist G eine Gruppe mit abelschen p-Sylow-Untergruppen, so folgt aus (c) und dem Ersten Grünschen Satz die Existenz einer von 1 verschiedenen p-Faktorgruppe von G, d.h. (b); vgl. ZASSENHAUS [p. 135, Satz 5]. Doch hat Herr OTTO KEGEL darauf hingewiesen, daß manche Gruppen gebrochen-linearer Transformationen Beispiele einfacher Gruppen liefern, die normale, nicht-triviale Partitionen besitzen und der Bedingung (c) für $p=2$ genügen; vgl. etwa BURNSIDE, p. 440/41. Dies zeigt, daß im allgemeinen die Bedingung (c) schwächer als (b) ist, und daß die Forderung unentbehrlich ist, daß die 2-Sylow-Untergruppen dedekindsch sein sollen.

Zur bequemen Formulierung unseres nächsten Resultats sei an das Endglied der absteigenden Zentrenkette der Gruppe G erinnert, das wir aus heute naheliegenden Gründen als *Ko-Hyperzentrum* $\mathfrak{K}G$ bezeichnen wollen. Dieses ist genau der Durchschnitt aller Normalteiler mit nilpotenter Faktorgruppe und es ist eine charakteristische Untergruppe mit nilpotenter Faktorgruppe.

FOLGERUNG A.14. *Sind die 2-Sylow-Untergruppen von G dedekindsch, falls $[G:\mathfrak{K}G]$ gerade ist, besitzt G eine nicht-triviale Partition, so ist $\mathfrak{K}G$ eine Hallsche Untergruppe von G.*

BEWEIS. Ist p ein Primteiler von $[G:\mathfrak{K}G]$, so folgt aus der Nilpotenz von $G/\mathfrak{K}G$ die Existenz einer von 1 verschiedenen p-Faktorgruppe von G. Aus Satz A.11 folgt also die p'-Abgeschlossenheit von G. Mithin existiert ein Normalteiler P von G mit $(o(P), p)=1$ und p-Faktorgruppe G/P. Aus der Nilpotenz von G/P folgt $\mathfrak{K}G \leqq P$, so daß $(o(\mathfrak{K}G), p)=1$ ist. Also ist $\mathfrak{K}G$ eine Hallsche Untergruppe von G.

HILFSSATZ A.15. *Ist G eine 2-Gruppe, gibt es in G zwei nicht vertauschbare Elemente, deren Ordnungen von 2 verschieden sind, so besitzt G nur die triviale Partition.*

BEWEIS. Sei Q die Untergruppe von G, die von den Elementen mit von 2 verschiedener Ordnung erzeugt wird. Nach Voraussetzung ist Q nicht abelsch.

Gäbe es eine nicht-triviale Partition von G, so gäbe es nach einer Kegelschen Bemerkung auch eine normale, nicht-triviale Partition σ von G; vgl. I, Beweis von Satz 4.7. Da G eine 2-Gruppe mit $G^2 \neq 1$ ist [wegen $Q' \neq 1$], so können wir I, Zusatz 5.6 anwenden. Also gibt es eine Q [und $\mathfrak{Z}G$] enthaltende Komponente W von σ, die ein Normalteiler von G ist. Da σ nicht trivial ist, so ist $W \neq G$. Es gibt also ein nicht in W gelegenes Element t in G. Ist w ein Element aus W, so ist auch wt nicht in W enthalten. Nicht in W enthaltene Elemente aus G liegen nicht in Q und haben also die Ordnung 2. Also gilt:

$$t^{-1} w t = w^{-1} (wt)^2 = w^{-1} \quad \text{für jedes } w \text{ aus } W.$$

Folglich ist die Abbildung $w \to w^{-1}$ ein Automorphismus von W; und hieraus folgt die Kommutativität von W und also auch die der Untergruppe Q von W. Dies widerspricht unserer Voraussetzung, so daß die triviale Partition die einzige Partition von G ist.

LEMMA A.16. *Die normale, nicht-triviale Partition σ der Gruppe G ist dann und nur dann nicht einfach, wenn entweder G primär oder $\mathfrak{F}G$ eine eigentliche σ-zulässige Untergruppe von G ist.*

BEWEIS. Ist $\mathfrak{F}G$ eine eigentliche σ-zulässige Untergruppe von G, so ist σ nicht einfach, da ja $\mathfrak{F}G$ eine charakteristische Untergruppe von G ist. Ist G primär, so enthält $\mathfrak{Z}G$ ein Element $z \neq 1$; und die z enthaltende Komponente von σ ist wegen I, Lemma 2.5 ein Normalteiler von G, so daß σ wieder nicht einfach ist. Damit ist das Hinreichen unserer Bedingung erwiesen.

Sei umgekehrt σ nicht einfach. Ist zunächst $G=\mathfrak{F}G$ nilpotent, so ist G primär, da σ nicht trivial ist, wie aus I, Bemerkung 2.4 folgt. Ist weiter $G \neq \mathfrak{F}G$, so ist G nicht primär. Ist σ eine Frobenius-Partition von G, so ist $\mathfrak{F}G$ wegen I, Satz 4.1, (1) eine eigentliche σ-zulässige Untergruppe von G. Ist aber σ keine Frobenius-Partition von G, so folgt aus I, Satz 5.1, (c) die Existenz eines Normalteilers K von G mit Primzahlindex $[G:K]=p$, der eine Komponente von σ ist. Aus einem Satz von KEGEL folgt die Nilpotenz von K; vgl. KEGEL [Satz 2]. Der nilpotente Normalteiler K von G liegt in $\mathfrak{F}G$ und aus $K \leqq \mathfrak{F}G < G$ sowie $[G:K]=p$ folgt $K=\mathfrak{F}G$, so daß die Komponente $\mathfrak{F}G$ von σ eine eigentliche σ-zulässige Untergruppe von G ist. Damit ist auch die Notwendigkeit unserer Bedingung erwiesen.

LEMMA A.17. *Die normale, nicht-triviale Partition σ der Gruppe G ist dann und nur dann weder einfach noch eine Frobenius-Partition, wenn $\mathfrak{Z}G \neq 1$ ist.*

BEWEIS. Ist zunächst $\mathfrak{Z}G \neq 1$, so gibt es wenigstens eine Komponente S von σ, die ein von 1 verschiedenes Zentrumselement enthält. Anwendung von I, Lemma 2.5 ergibt dann, daß S ein Normalteiler von G und σ also nicht einfach ist. Wäre σ eine Frobenius-Partition von G, so wäre $\mathfrak{F}G$ von 1 und G verschieden; und es würde $1=\mathfrak{F}G \cap \mathfrak{C}g$ für jedes nicht in $\mathfrak{F}G$ enthaltene Element g aus G gelten [I, Satz 4.1, (1) und (5)]. Dann wäre aber offenbar $\mathfrak{Z}G=1$; und aus diesem Widerspruch folgt, daß σ keine Frobenius-Partition ist.

Ist umgekehrt σ weder einfach noch eine Frobenius-Partition, so ist gewiß dann $\mathfrak{Z}G \neq 1$, wenn G primär ist. Ist aber G nicht primär, so folgt aus I, Satz 5.1, (c) die Existenz einer Komponente T von σ, die ein Normalteiler von G mit Primzahlindex $[G:T]=p$ ist. Aus Lemma A.5 folgt, daß T keine Hallsche Untergruppe von G und also p ein Teiler von $o(T)$ ist; und aus einem Kegelschen Satz folgt die Nilpotenz von T; vgl. KEGEL [Satz 2]. Also ist $T=A \otimes B$ das direkte Produkt einer von 1 verschiedenen p-Gruppe A und einer Gruppe B mit $(o(B), p)=1$. Ist P eine p-Sylow-Untergruppe von G, so ist $A=T \cap P$ und $G=PB$. Da A ein Normalteiler von P ist und von B zentralisiert wird, so ist $1 < A \cap \mathfrak{Z}P \leqq \mathfrak{Z}G$, womit auch die Notwendigkeit unserer Bedingung gezeigt ist.

ZUSATZ A.18. *Ist die normale Partition σ der Gruppe G frei von normalisatorgleichen Komponenten, so ist dann und nur dann $\mathfrak{C}g$ für jedes $g \neq 1$ aus G nilpotent, wenn für jede Komponente X von σ gilt:*

(*) *Entweder ist $\mathfrak{N}X$ primär oder $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ ist eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$.*

BEWEIS. Wir bemerken zunächst, daß die Freiheit von normalisatorgleichen Komponenten von σ äquivalent damit ist, daß σ weder trivial noch eine Frobenius-Partition von G ist; und daß aus der Freiheit von normalisatorgleichen Komponenten nach einem Kegelschen Satz die Nilpotenz aller Komponenten von σ folgt; vgl. KEGEL [Satz 2].

Wir nehmen zunächst an, daß $\mathfrak{C}g$ für jedes $g \neq 1$ aus G nilpotent ist; und wir betrachten eine Komponente X von σ mit nicht-primärem Normalisator $\mathfrak{N}X$. Da X sowohl ein Normalteiler von $\mathfrak{N}X$ wie auch eine Komponente von σ und $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ ist, so ist $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ wegen $X \neq \mathfrak{N}X$ eine normale und nicht-einfache Partition von $\mathfrak{N}X$. Wäre $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ keine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$, so würde $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X \neq 1$ aus Lemma A.17 folgen. Ist $z \neq 1$ ein Element aus $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X$, so ist $\mathfrak{N}X \subseteq \mathfrak{C}z$; und aus unserer Voraussetzung folgt die Nilpotenz von $\mathfrak{C}z$ und also auch die von $\mathfrak{N}X$. Da $\mathfrak{N}X$ nicht primär ist, so folgt aus I, Folgerung 2.3, daß $\mathfrak{N}X$ in einer Komponente von σ enthalten ist, die dann notwendig mit der in $\mathfrak{N}X$ enthaltenen Komponente X zusammenfällt. Daraus ergibt sich aber der Widerspruch $X = \mathfrak{N}X$; und damit haben wir die Notwendigkeit der Bedingung (*) dargetan.

Sei umgekehrt die Bedingung (*) von σ erfüllt. Ist dann $g \neq 1$ irgendein Element aus G, so liegt g in einer und nur einer Komponente X von σ; und aus I, Lemma 2.5 folgt $\mathfrak{C}g \subseteq \mathfrak{N}X$. Ist $\mathfrak{N}X$ primär, so ist gewiß $\mathfrak{C}g$ nilpotent. Ist aber $\mathfrak{N}X$ nicht primär, so ergibt sich aus (*), daß $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$ ist. Aus I, Satz 4.1 ergibt sich nun die Alternative:

$$\text{entweder ist } \mathfrak{C}g \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}X \text{ oder aber } \mathfrak{C}g \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}X = 1;$$

und im zweiten Fall ergibt sich wieder aus I, Satz 4.1, daß $\mathfrak{C}g$ ganz in einer normalisatorgleichen Komponente von $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ enthalten ist, daß also $\mathfrak{C}g$ in beiden Fällen nilpotent ist.

SATZ A.19. *Ist σ eine normale, nicht-triviale Partition der Gruppe G, sind die Komponenten von σ nilpotent, ist p ein Primteiler von $o(G)$, folgt schließlich aus $p = 2$, daß keine Untergruppe von G der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph ist, so gilt:*

(a) *Dann und nur dann gibt es Paare verschiedener p-Sylow-Untergruppen mit nicht-trivialem Durchschnitt, wenn es eine Komponente X von σ derart gibt, daß p ein gemeinsamer Teiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X : X]$ ist, X aber keine p-Gruppe ist.*

(b) *Sind die Durchschnitte verschiedener p-Sylow-Untergruppen trivial, obgleich die p-Sylow-Untergruppen nicht in Komponenten von σ enthalten sind, so sind die Komponenten von σ entweder p-Gruppen oder von zu p teilerfremder Ordnung.*

(c) *Dann und nur dann sind die Durchschnitte verschiedener p-Sylow-Untergruppen trivial, wenn entweder G eine p-Gruppe ist oder es eine normale, nicht-triviale Verschmelzung σ^* von σ derart gibt, daß p-Sylow-Untergruppen von G in Komponenten von σ^* enthalten sind.*

BEWEIS. Gibt es Paare verschiedener p-Sylow-Untergruppen mit nicht-trivialem Durchschnitt, so gibt es auch ein Paar verschiedener p-Sylow-Untergruppen $A \neq B$ mit maximalem Durchschnitt $D = A \cap B \neq 1$. Dann ist $D < A$ und $D < B$; und aus den wohlbekannten Eigenschaften der p-Gruppen ergibt sich $D < A \cap \mathfrak{N}D$ und $D < B \cap \mathfrak{N}D$. Wäre $A \cap \mathfrak{N}D$ keine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}D$, so gäbe es eine $A \cap \mathfrak{N}D$ enthaltende p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}D$, die wiederum in einer p-Sylow-Untergruppe A^* von G enthalten ist. Natürlich ist dann $A^* \cap \mathfrak{N}D$ eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}D$; und es gilt, da ja $A \cap \mathfrak{N}D$ keine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}D$ ist,

$$D < A \cap \mathfrak{N}D < A^* \cap \mathfrak{N}D \quad \text{und} \quad D < A \cap A^*.$$

Aus der Maximalität von D und der zweiten Ungleichung folgt $A = A^*$; und dies ist mit der ersten Ungleichung unverträglich. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß $A \cap \mathfrak{N}D$ eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}D$ ist; und ebenso sieht man ein, daß $B \cap \mathfrak{N}D$ eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}D$ ist. Aus $D < A \cap \mathfrak{N}D$ und $D < B \cap \mathfrak{N}D$ zusammen mit $D = A \cap B$ folgt schließlich die Verschiedenheit dieser beiden p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}D$. Da $D \neq 1$ ein p-Normalteiler von $\mathfrak{N}D$ ist, so ist $\mathfrak{F}\mathfrak{N}D$ kein Hallscher Normalteiler von $\mathfrak{N}D$; und zwar ist p ein gemeinsamer Primteiler von $o(\mathfrak{F}\mathfrak{N}D)$ und $[\mathfrak{N}D : \mathfrak{F}\mathfrak{N}D]$.

Da $\mathfrak{N}D$ nicht nilpotent ist, während alle Komponenten von σ nilpotent sind, so ist $\mathfrak{N}D$ in keiner Komponente von σ enthalten und $\sigma \cap \mathfrak{N}D$ ist also eine normale, nicht-triviale Partition von $\mathfrak{N}D$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{N}D$ nicht der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph, wenn $p = 2$ ist; und es ergibt sich also aus II, Satz A die Nicht-Einfachheit von $\sigma \cap \mathfrak{N}D$. Da $\mathfrak{F}\mathfrak{N}D$ keine Hallsche Untergruppe von $\mathfrak{N}D$ ist, so folgt aus I, Satz 4.1, (1), daß $\sigma \cap \mathfrak{N}D$ keine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}D$ ist. Anwendung von I, Satz 5.1, (c) ergibt die Existenz einer Komponente W von $\sigma \cap \mathfrak{N}D$, die ein Normalteiler von $\mathfrak{N}D$ ist, und deren Index $[\mathfrak{N}D : W]$ eine $o(W)$ teilende Primzahl q ist. Mit den Komponenten von σ ist auch W nilpotent. Wäre $q \neq p$, so wäre die p-Sylow-Untergruppe von W ein Normalteiler von $\mathfrak{N}D$ und eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}D$ und dies ist unmöglich. Also ist $p = q = [\mathfrak{N}D : W]$ ein Teiler von $o(W)$.

Die Komponente W von $\sigma \cap \mathfrak{N}D$ liegt in einer und nur einer Komponente V von σ. Da W von $\mathfrak{N}D$ normalisiert wird, so folgt aus I, Lemma 2.5, daß $\mathfrak{N}D \subseteq \mathfrak{N}V$ ist. Aus $W = V \cap \mathfrak{N}D$ und $[\mathfrak{N}D : W] = p$ folgt weiter, daß p ein gemeinsamer Teiler von $[\mathfrak{N}V : V]$ und $o(V)$ ist. Wäre V eine p-Gruppe, so wäre auch W und wegen $[\mathfrak{N}D : W] = p$ sogar $\mathfrak{N}D$ eine p-Gruppe, was unmöglich ist. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung von (a) bewiesen.

Sei umgekehrt die Komponente X von σ keine p-Gruppe, aber p ein gemeinsamer Primteiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X : X]$. Nach Voraussetzung ist die Komponente X von σ nilpotent. Besäße $\mathfrak{N}X$ eine und nur eine p-Sylow-Untergruppe P, so wäre PX ein nilpotenter Normalteiler von $\mathfrak{N}X$. Mit X ist auch PX nicht primär; und die nilpotente, nicht primäre Untergruppe PX von G ist wegen I, Folgerung 2.3 in einer Komponente Y von σ enthalten. Dann wäre aber $X = Y$, so daß P in X enthalten und $[\mathfrak{N}X : X]$ zu p teilerfremd

wäre. Dies ist unmöglich; und $\mathfrak{N}X$ besitzt also zwei verschiedene p-Sylow-Untergruppen. Wegen Zusatz A.6, (4) ist aber $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X \neq 1$ in allen p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ enthalten, so daß diese paarweise einen von 1 verschiedenen Durchschnitt haben. Damit ist (a) vollständig bewiesen.

Wir nehmen weiter an, daß die Durchschnitte verschiedener p-Sylow-Untergruppen trivial sind, daß aber keine p-Sylow-Untergruppe in einer Komponente von σ enthalten ist. Sei X eine Komponente von σ, deren Ordnung $o(X)$ durch p teilbar ist. Da X keine p-Sylow-Untergruppe von G enthalten kann, so ist X gewiß keine Hallsche Untergruppe von G. Wäre also X keine p-Gruppe, so würde Anwendung von Zusatz A.6 ergeben, daß

$[\mathfrak{N}X:X]$ eine $o(X)$ teilende Primzahl q ist und

die Menge Y der Elemente aus X mit zu q teilerfremder Ordnung eine Hallsche Untergruppe von G ist.

Wäre $p \neq q$, so würden Y und X also eine volle p-Sylow-Untergruppe von G enthalten, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Es ist also $p = q$ ein gemeinsamer Teiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X:X]$. Da X keine p-Gruppe ist, so ergibt unsere Aussage (a) die Existenz von verschiedenen p-Sylow-Untergruppen mit nicht-trivialem Durchschnitt; und aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß X eine p-Gruppe ist, wenn p ein Teiler von $o(X)$ ist. Damit ist auch (b) bewiesen.

Beim Beweise von (c) wollen wir o.B.d.A. annehmen, daß G keine p-Gruppe ist. Gibt es eine normale, nicht-triviale Verschmelzung σ^* von σ derart, daß p-Sylow-Untergruppen von G in Komponenten von σ^* enthalten sind, so sind die Durchschnitte verschiedener p-Sylow-Untergruppen von G sicher dann trivial, wenn Komponenten von σ^* höchstens eine p-Sylow-Untergruppe von G enthalten. Gäbe es nun eine Komponente X^* von σ^*, die zwei verschiedene p-Sylow-Untergruppen enthielte, so wäre X^* sicher nicht nilpotent; und Anwendung eines Kegelschen Satzes ergäbe $X^* = \mathfrak{N}X^*$ — vgl. KEGEL [Satz 2]. Aus I, Satz 4.7, (c) würde dann folgen, daß X^* auch eine Komponente von σ wäre; und dies würde unserer Voraussetzung widersprechen, daß die Komponenten von σ nilpotent sind. Also folgt aus der Existenz von σ^*, daß verschiedene p-Sylow-Untergruppen triviale Durchschnitte haben.

Wir nehmen umgekehrt an, daß verschiedene p-Sylow-Untergruppen triviale Durchschnitte haben. Dann sind entweder die p-Sylow-Untergruppen von G in Komponenten von σ enthalten; und wir können $\sigma^* = \sigma$ wählen. Oder aber es folgt aus (b), daß Komponenten von σ entweder p-Gruppen sind oder zu p teilerfremde Ordnung haben. Sei dann σ^* die Menge von Untergruppen von G, die einerseits aus den p-Sylow-Untergruppen von G und andererseits aus den Komponenten von σ mit zu p teilerfremder Ordnung besteht. Man überzeugt sich mühelos, daß σ^* eine normale, nicht-triviale Partition von G und eine gesuchte Verschmelzung von σ ist.

BEMERKUNG A.20. Ist G die symmetrische Gruppe des Grades 4 und σ die Menge der nicht in $\mathfrak{S}G$ enthaltenen zyklischen Untergruppen von G, so ist σ eine normale, nicht-triviale Partition von G. Die 2-Sylow-Untergruppen

von G enthalten stets $\mathfrak{S}G$, haben also nicht-triviale Durchschnitte; es gibt aber keine Komponente X von σ derart, daß 2 ein gemeinsamer Teiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X:X]$ ist, während X keine 2-Gruppe ist. Dies zeigt die Unentbehrlichkeit unserer $p=2$ betreffenden Zusatzannahme.

B. BEWEIS DES HAUPTSATZES. Wäre die Aussage (a) des Hauptsatzes falsch, so gäbe es unter den Gegenbeispielen eines G von kleinster Ordnung. Dieser „kleinste Verbrecher" G hätte die folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathfrak{S}G$ ist einfach und nicht abelsch.

(2) $[G:\mathfrak{S}G] \neq 1$ und $\neq 2$.

(3) G besitzt eine nicht-triviale Partition.

Aus (3) folgt nach einer Kegelschen Bemerkung [vgl. I, Beweis von Satz 4.7] sogar:

(3*) G besitzt eine normale, nicht-triviale Partition σ.

Aus (1) folgt wegen Hilfssatz A.1, (a) weiter:

(4) σ ist einfach.

Aus (1) und (3*) folgt wegen Hilfssatz A.1, (b) und (c)

(5) alle Komponenten von σ sind nilpotent und $\mathfrak{S}G$ ist in keiner Komponente von σ enthalten.

Aus (1) folgt natürlich $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}G=1$. Also wird $\mathfrak{S}G \cap \mathfrak{C}\mathfrak{S}G=1$. Wäre $\mathfrak{C}\mathfrak{S}G \neq 1$, so würde diese charakteristische Untergruppe natürlich einen minimalen Normalteiler von G enthalten, der aber doch in $\mathfrak{S}G$ liegen müßte. Aus diesem Widerspruch folgt:

(6) $\mathfrak{C}\mathfrak{S}G=1$.

Angenommen $[G:\mathfrak{S}G]$ wäre eine Primzahl p. Dann würde aus (2) folgen, daß $p \neq 2$ ist. Aus (3*) und (4) folgt, daß die Komponenten von σ nicht normalisatorgleich sind [I, Satz 4.1, (1)]. Anwendung von Satz A.11 ergibt dann die p'-Abgeschlossenheit von G. Dies ist wegen (1) und $[G:\mathfrak{S}G]=p$ gleichwertig mit $(o(\mathfrak{S}G), p)=1$. Dann sind aber die p-Sylow-Untergruppen von G sämtlich zyklisch der Ordnung p und nicht in $\mathfrak{S}G$ enthalten. Sie sind als zyklische Untergruppen in Komponenten von σ enthalten; und diese Komponenten wären wegen Lemma A.3 normalisatorgleich. Da aber σ, wie schon bemerkt, keine normalisatorgleichen Komponenten besitzt, so sind wir auf einen Widerspruch geführt worden; und es gilt:

(7) $[G:\mathfrak{S}G]$ ist keine Primzahl.

Da $G/\mathfrak{S}G \neq 1$ wegen (2) ist, so folgt aus (7), daß $G/\mathfrak{S}G$ eigentliche Untergruppen besitzt. Ist $E/\mathfrak{S}G$ eine eigentliche Untergruppe von $G/\mathfrak{S}G$, so ist $\mathfrak{S}G$ wegen (1) ein minimaler Normalteiler von E und also ein direkter Faktor von $\mathfrak{S}E$; vgl. etwa SPECHT [p. 272, Satz 27]. Aus (6) folgt dann sofort

$\mathfrak{S}G = \mathfrak{S}E$. Wegen (5) ist die normale Partition $\sigma \cap E$ nicht trivial. Aus der Minimalität von G ergibt sich dann $[E:\mathfrak{S}G] = 2$. Damit haben wir gesehen, daß $[G:\mathfrak{S}G] \neq 1$ und auch nicht von Primzahlordnung ist, daß aber jede eigentliche Untergruppe von $G/\mathfrak{S}G$ die Ordnung 2 hat. Es folgt, daß $G/\mathfrak{S}G$ eine 2-Gruppe ist; also gilt:

(2*) $[G:\mathfrak{S}G] = 4$ und $G/\mathfrak{S}G$ ist entweder zyklisch oder elementar-abelsch.

Wäre nun $G/\mathfrak{S}G$ zyklisch der Ordnung 4, so würde aus Satz A.9 folgen, daß σ eine Frobenius-Partition, also wegen I, Satz 4.1, (1) nicht einfach im Widerspruch zu (4) ist. Folglich gilt:

(8) $G/\mathfrak{S}G$ ist elementar-abelsch der Ordnung 4.

Wir betrachten jetzt eine 2-Untergruppe P von G mit folgenden drei Eigenschaften:

$P \not\leqq \mathfrak{S}G$;

P ist eine 2-Sylow-Untergruppe von $H = P \cdot \mathfrak{S}G$;

P ist in einer Komponente von σ enthalten.

Dann ist P auch in einer Komponente S der normalen Partition $\sigma \cap H$ von H enthalten. Wegen $\mathfrak{S}G < H$ können wir Lemma A.3 anwenden; und es wird $S = H \cap \mathfrak{N}S$. Da S in einer Komponente von σ liegt, so folgt die Nilpotenz von S aus (5); und da $\mathfrak{S}G$ wegen (1) nicht nilpotent ist, so ist auch H nicht nilpotent und folglich $S \neq H$. Also ist $\sigma \cap H$ eine Frobenius-Partition von H; und es folgt aus I, Satz 4.1, (1), daß $\mathfrak{F}H$ eine eigentliche charakteristische Untergruppe von H ist. Wegen (1) und (6) ist dann $\mathfrak{S}G = \mathfrak{S}H$ als einziger minimaler Normalteiler von H in $\mathfrak{F}H$ enthalten. Also ist $\mathfrak{S}G$ nilpotent im Widerspruch zu (1); und aus diesem Widerspruch folgt:

(9) Ist die 2-Untergruppe T von G nicht in $\mathfrak{S}G$ enthalten, aber eine 2-Sylow-Untergruppe von $T \cdot \mathfrak{S}G$, so ist T in keiner Komponente von σ enthalten.

Sei p ein ungerader Primteiler von $o(\mathfrak{S}G)$ und P eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{S}G$. Dann ist $P \neq 1$ auch eine p-Sylow-Untergruppe von G; und aus dem wohlbekannten Frattinischen Schluß folgt $G = (\mathfrak{N}P)(\mathfrak{S}G)$; vgl. etwa Baer [1; p. 117, Lemma 1]. Ist Q eine 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}P$, so wird

$$G = Q \cdot \mathfrak{S}G,$$

da ja $\mathfrak{N}P/(\mathfrak{N}P \cap \mathfrak{S}G) \cong G/\mathfrak{S}G$ eine 2-Gruppe und also $\mathfrak{N}P = Q(\mathfrak{N}P \cap \mathfrak{S}G)$ ist. Wir setzen $H = PQ$. Dann ist P ein p-Normalteiler von $H \subsetneqq \mathfrak{N}P$ mit zu Q isomorpher Faktorgruppe H/P. Wir untersuchen die natürlich normale Partition $\sigma \cap H$ von H.

Wäre $\sigma \cap H$ trivial, so wäre H in einer wegen (5) nilpotenten Komponente L von σ enthalten. Die p-Sylow-Untergruppe P von G ist in H und also in L enthalten; sie ist folglich eine charakteristische Untergruppe der nilpotenten Gruppe L. Wäre Q keine 2-Sylow-Untergruppe von G, so gäbe

es ein Q normalisierendes 2-Element v, das nicht in Q liegt. Aus $1 < Q \subseteq H \subseteq L$ und I, Lemma 2.5 folgt, daß v zu $\mathfrak{N}L$ gehört und also auch die charakteristische Untergruppe P von L normalisiert. Also liegt v sogar in $\mathfrak{N}P$. Da Q von v normalisiert wird, so ist $Q\{v\}$ eine 2-Untergruppe von $\mathfrak{N}P$; und da Q eine 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}P$ ist, so liegt v doch in Q. Aus diesem Widerspruch folgt, daß Q eine 2-Sylow-Untergruppe von G ist. Also ist $G = Q \cdot \mathfrak{S}G$; und Q ist eine zwar nicht in $\mathfrak{S}G$, aber in einer Komponente von σ enthaltene 2-Sylow-Untergruppe von G. Dies widerspricht (9). Also ist $\sigma \cap H$ nicht trivial.

Da P ein von 1 verschiedener Hallscher Normalteiler von H und $\sigma \cap H$ normal, aber nicht trivial ist, so folgt aus II, Satz B die Nicht-Einfachheit von $\sigma \cap H$.

Angenommen, $\sigma \cap H$ wäre eine Frobenius-Partition von H. Der p-Normalteiler P von H ist sicherlich in $\mathfrak{F}H$ enthalten. Da H/P eine 2-Gruppe und $\mathfrak{F}H$ wegen I, Satz 4.1, (1) ein eigentlicher Hallscher Normalteiler von H ist, so wird $P = \mathfrak{F}H$. Als Komplement von $\mathfrak{F}H$ in H ist Q wegen I, Satz 4.1, (2) eine normalisatorgleiche Komponente von $\sigma \cap H$, die als 2-Gruppe wegen I, Satz 4.1, (5) eine und nur eine zyklische Untergruppe der Ordnung 2 enthält. Aus $G/\mathfrak{S}G \cong Q/(Q \cap \mathfrak{S}G)$ und (8) folgt, daß Q eine elementar-abelsche Faktorgruppe der Ordnung 4 besitzt und also nicht zyklisch ist. Aus einem Resultat von BURNSIDE folgt, daß Q eine verallgemeinerte Quaternionengruppe ist; vgl. BURNSIDE, p. 132, Theorem VI. Insbesondere enthält also Q ein Paar nicht vertauschbarer Elemente, deren Ordnungen durch 4 teilbar sind. Ist W eine Q enthaltende 2-Sylow-Untergruppe von G, so folgt aus Hilfssatz A.15, daß $\sigma \cap W$ die triviale Partition von W ist. Also liegt W in einer Komponente V von σ; und dies widerspricht (9) wegen $Q \subseteq W \subseteq V$ und $G = Q \cdot \mathfrak{S}G$. Aus diesem Widerspruch folgt, daß $\sigma \cap H$ auch keine Frobenius-Partition von H ist.

Da H gewiß nicht primär ist — denn $o(H)$ ist durch $2p$ teilbar — so können wir I, Satz 5.1, (c) anwenden. Also existiert ein Normalteiler K von H mit Primzahlindex $[H:K]$, der eine Komponente von $\sigma \cap H$ ist und der von allen Elementen aus H mit von $[H:K]$ verschiedener Ordnung erzeugt wird. Da 2 und p die einzigen Primteiler von $o(H)$ sind, so ist $[H:K] = 2$ oder p. Da H nicht primär und $\sigma \cap H$ nicht trivial ist, so ist H wegen I, Folgerung 2.3 nicht nilpotent.

Wäre $[H:K] = p$, so wäre die 2-Sylow-Untergruppe Q von H in der Komponente K von $\sigma \cap H$ enthalten. Da P ein eigentlicher Normalteiler von H mit $H = PQ$ ist, so folgt aus Lemma A.3, daß $K = \mathfrak{N}K = H \neq K$ ist. Dies ist unmöglich; und folglich ist $[H:K] = 2$. Der p-Normalteiler P von H ist also in der Komponente K von $\sigma \cap H$ enthalten, so daß P auch in der K enthaltenden Komponente L von σ enthalten ist. Aus $H = PQ$ und $P \subseteq K$ und dem Dedekindschen Modulsatz folgt noch $K = P(Q \cap K)$.

Aus $G = Q \cdot \mathfrak{S}G$ und $[G:\mathfrak{S}G] = 4$ [wegen (8)] folgt, daß $o(Q)$ ein Vielfaches von 4 ist. Aus $[H:K] = 2$ folgt dann, daß 2 ein Teiler von $o(Q \cap K)$ ist. Da K von H normalisiert wird, so folgt aus I, Lemma 2.5 und $1 < K \subseteq L$, daß L von H normalisiert wird. Wir bemerken, daß $K = L \cap H$ ist, und also $HL/L \cong H/(H \cap L) = H/K$ die Ordnung 2 hat. Aus $Q \cap K = Q \cap L \cap H = Q \cap L$

folgt, daß auch $o(L)$ durch 2 teilbar ist. Damit haben wir gezeigt, daß sowohl $o(L)$ wie auch das Vielfache $[\mathfrak{N}L:L]$ von $[HL:L]$ gerade sind. Da $o(L)$ gewiß durch $2p$ teilbar und L also nicht primär ist, da L eine Komponente von $\sigma \cap \mathfrak{N}L$ und $L \neq \mathfrak{N}L$ ist, so ergibt eine direkte Anwendung von I, Satz 5.1, (c), daß $[\mathfrak{N}L:L]=2$ und die wegen (5) nilpotente Komponente L von σ von den Elementen aus $\mathfrak{N}L$ erzeugt wird, deren Ordnung von 2 verschieden ist.

Wäre $\mathfrak{N}L \cap \mathfrak{S}G = L \cap \mathfrak{S}G$, so wäre $L \cap \mathfrak{S}G$ eine normalisatorgleiche Komponente der normalen und wegen (5) nicht trivialen Partition $\sigma \cap \mathfrak{S}G$. Dann wäre aber $\sigma \cap \mathfrak{S}G$ eine Frobenius-Partition der einfachen und nicht-abelschen Gruppe $\mathfrak{S}G$, was wegen I, Satz 4.1, (1) unmöglich ist. Also ist $L \cap \mathfrak{S}G < \mathfrak{N}L \cap \mathfrak{S}G$; und aus $[\mathfrak{N}L:L]=2$ folgt dann $[\mathfrak{N}L \cap \mathfrak{S}G : L \cap \mathfrak{S}G]=2$. Da $G = \mathfrak{N}L \cdot \mathfrak{S}G$ ist und $4=[G:\mathfrak{S}G]=[Q:Q \cap \mathfrak{S}G]$ aus (8) und $G=Q \cdot \mathfrak{S}G$ folgt, so sehen wir, daß $o(\mathfrak{N}L)$ wenigstens durch 8 teilbar ist.

Ist T eine 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}L$, so ist $\mathfrak{N}L = TL$. Es ist $o(T)$ ein Vielfaches von 8 und $[T:T \cap L]=[\mathfrak{N}L:L]=2$. Wäre T keine 2-Sylow-Untergruppe von G, so gäbe es ein T normalisierendes, aber nicht zu T gehörendes 2-Element t. Aus

$$2=[T:T \cap L]=[T:T \cap L^t]$$

folgt, daß $[T:T \cap L \cap L^t]$ ein Teiler von 4 ist. Da $o(T)$ ein Vielfaches von 8 ist, so sind $T \cap L \cap L^t$ und also auch $L \cap L^t$ von 1 verschieden. Da L und Lt Komponenten der normalen Partition σ sind, so wird $L=L^t$, so daß t zu $\mathfrak{N}L$ gehört. Da T von t normalisiert wird, so ist $T\{t\}$ eine 2-Untergruppe von $\mathfrak{N}L$; und da T eine 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}L$ ist, so gehört t zu T. Aus diesem Widerspruch folgern wir, daß die 2-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}L$ auch 2-Sylow-Untergruppen von G sind. Wir fassen zusammen:

(10) Ist p ein ungerader Primteiler von $o(\mathfrak{S}G)$ und P eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{S}G$ [und wegen (8) auch von G], so ist P in einer Komponente P^* von σ enthalten; es ist $[\mathfrak{N}P^*:P^*]=2$, $o(P^*)$ ein Vielfaches von 4 und $\mathfrak{N}P^*$ enthält eine 2-Sylow-Untergruppe von G.

Da $\mathfrak{S}G$ wegen (4) einfach und nicht abelsch ist, so ist $\mathfrak{S}G$ keine 2-Gruppe; und es gibt also sicher einen ungeraden Primteiler p von $o(\mathfrak{S}G)$. Sei P irgendeine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{S}G$ und P^* die nach (10) existierende, eindeutig bestimmte, P enthaltende Komponente von σ. Wegen (10) ist weiter

$$[\mathfrak{N}P^*:P^*]=2,\ [G:\mathfrak{N}P^*] \text{ ungerade, } 8 \text{ ein Teiler von } o(\mathfrak{N}P^*).$$

Sei q ein von p verschiedener, ungerader Primteiler von $o(\mathfrak{S}G)$. Ist Q eine q-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{S}G$, so ist Q wegen (10) in einer und nur einer Komponente Q^* von σ enthalten mit $[\mathfrak{N}Q^*:Q^*]=2$, ungeradem $[G:\mathfrak{N}Q^*]$ und durch 8 teilbarem $o(\mathfrak{N}Q^*)$. Da $\mathfrak{N}P^*$ und $\mathfrak{N}Q^*$ je eine 2-Sylow-Untergruppe von G enthalten, so gibt es ein Element g in G derart, daß $\mathfrak{N}P^* \cap \mathfrak{N}Q^{*g}$ eine 2-Sylow-Untergruppe Y von G enthält. Aus $2=[\mathfrak{N}P^*:P^*]=[\mathfrak{N}Q^{*g}:Q^{*g}]$ und daraus, daß Y eine gemeinsame 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}P^*$ und $\mathfrak{N}Q^{*g}$ ist, folgern wir $2=[Y:Y \cap P^*]=[Y:Y \cap Q^{*g}]$. Da $o(Y)$ durch 8 teilbar

ist, und da $[Y: Y \cap P^* \cap Q^{*g}]$ ein Teiler von 4 ist, so ist $o(Y \cap P^* \cap Q^{*g})$ gerade und also $P^* \cap Q^{*g} \neq 1$. Da P^*, Q^* und Q^{*g} Komponenten der normalen Partition σ sind, so ist $P^* = Q^{*g}$; und P^* enthält die q-Sylow-Untergruppe Q^g von $\mathfrak{S}G$. Damit haben wir gezeigt, daß P^* für jeden ungeraden Primteiler q von $o(\mathfrak{S}G)$ [und also auch von $o(G)$] eine q-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{S}G$ und also auch von G enthält. Weiter enthält $\mathfrak{N}P^*$ auch noch eine 2-Sylow-Untergruppe von G. Also ist $G = \mathfrak{N}P^*$. Da P^* wegen (5) nilpotent und $2 = [\mathfrak{N}P^* : P^*]$ ist, so folgt hieraus die Auflösbarkeit von G im Widerspruch zu (1). Unsere Annahme der Falschheit von (a) hat zu einem Widerspruch geführt, aus dem die Gültigkeit von (a) folgt.

Wir wenden uns jetzt dem Beweise der Behauptungen (b) und (c) zu. Hierzu betrachten wir eine nicht-einfache Gruppe G, deren Sockel $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht-abelsch ist, und die eine nicht-triviale Partition besitzt. Aus einer Kegelschen Bemerkung folgern wir dann die Existenz einer normalen, nicht-trivialen Partition σ von G; vgl. I, Beweis von Satz 4.7. Wir folgern aus Hilfssatz A.1, (a) die Einfachheit von σ. Dann ist σ wegen I, Satz 4.1, (1) keine Frobenius-Partition von G; und wir erschließen aus einem Kegelschen Satze die Nilpotenz aller Komponenten von σ; vgl. KEGEL [Satz 2]. Schließlich folgt noch aus Hauptsatz (a), daß $[G: \mathfrak{S}G] = 2$ ist.

Wären die 2-Sylow-Untergruppen von G dedekindsch, so wäre G wegen Satz A.11 eine $2'$-abgeschlossene Gruppe, da ja eine einfache, normale und nicht-triviale Partition frei von normalisatorgleichen Komponenten ist. Da $\mathfrak{S}G$ der einzige eigentliche Normalteiler von G ist, da G [mit $\mathfrak{S}G$] keine 2-Gruppe, aber $[G: \mathfrak{S}G] = 2$ ist, so würde aus der $2'$-Abgeschlossenheit von G die Ungeradheit von $o(\mathfrak{S}G)$ folgen. Dann wären die 2-Sylow-Untergruppen von G sogar zyklisch der Ordnung 2 und komplementär zu $\mathfrak{S}G$ in G. Da zyklische Untergruppen in Komponenten von σ liegen, so würde aus Lemma A.3 doch die Existenz einer normalisatorgleichen Komponente von σ folgen; und aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß die 2-Sylow-Untergruppen von G nicht dedekindsch sind, d.h. die Gültigkeit von (c).

Sei weiter p ein ungerader Primteiler von $o(G)$ und P eine p-Sylow-Untergruppe von G. Dann folgt $1 < P < \mathfrak{S}G$ aus $[G: \mathfrak{S}G] = 2$.

Ist zunächst P in einer Komponente X von σ enthalten, so ist X nilpotent und die p-Sylow-Untergruppe P von G ist eine charakteristische Untergruppe von X, die also auch ein Normalteiler von $\mathfrak{N}X$ ist. Aus $P \neq 1$ und I, Lemma 2.5 folgt aber auch, daß X von $\mathfrak{N}P$ normalisiert wird; und damit haben wir $\mathfrak{N}P = \mathfrak{N}X$ bewiesen. Da σ frei von normalisatorgleichen Komponenten ist, so folgt aus $[G: \mathfrak{S}G] = 2$ und Lemma A.3, daß X keine 2-Sylow-Untergruppe von G enthält. Aus dem wohlbekannten Frattinischen Schluß folgt $G = (\mathfrak{N}P)(\mathfrak{S}G)$; vgl. etwa BAER [1; p. 117, Lemma 1]. Aus $2 = [G: \mathfrak{S}G] = [\mathfrak{N}P : \mathfrak{N}P \cap \mathfrak{S}G]$ folgt dann die Existenz von nicht in X enthaltenen 2-Elementen aus $\mathfrak{N}P = \mathfrak{N}X$. Es gibt also ein Element v der Ordnung 2 in $\mathfrak{N}X$, das nicht in X liegt. Dann folgt $P \cap \mathfrak{C}v = 1$ aus I, Lemma 2.1. Da P von v normalisiert wird, so induziert also v einen Frobenius-Automorphismus der Ordnung 2 in P, woraus bekanntlich die Kommutativität von P folgt; vgl. etwa BURNSIDE, p. 90.

Es bleibt noch der Fall zu behandeln, daß P in keiner Komponente von σ enthalten ist. Wir folgern wieder zunächst aus dem Frattinischen Schluß, daß $G=(\mathfrak{N}P)(\mathfrak{S}G)$ und also $2=[G:\mathfrak{S}G]=[\mathfrak{N}P:\mathfrak{N}P\cap\mathfrak{S}P]$ ist. Die normale Partition $\sigma\cap\mathfrak{N}P$ ist nicht trivial, da sonst mit $\mathfrak{N}P$ auch P in einer Komponente von σ enthalten wäre. Weiter ist $o(\mathfrak{N}P)$ gewiß durch $2p$ teilbar, so daß $\mathfrak{N}P$ insbesondere nicht primär ist. Der p-Normalteiler P von $\mathfrak{N}P$ ist natürlich in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ enthalten. Wäre $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ nicht primär, so wäre diese nilpotente Untergruppe, und mit ihr auch P, wegen I, Folgerung 2.3 in einer Komponente von σ enthalten. Die folglich primäre Untergruppe $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ enthält die p-Sylow-Untergruppe $P\neq 1$, woraus sofort $P=\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ folgt. Da P ein von 1 verschiedener p-Normalteiler von $\mathfrak{N}P$ und $p\neq 2$ ist, so folgt aus II, Satz A die Nicht-Einfachheit von $\sigma\cap\mathfrak{N}P$. Wäre $\sigma\cap\mathfrak{N}P$ keine Frobenius-Partition, so besäße $\sigma\cap\mathfrak{N}P$ wegen I, Satz 5.1, (c) eine Komponente, die ein Normalteiler von $\mathfrak{N}P$ mit Primzahlindex, also gleich $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P=P$ wäre, was im vorliegenden Fall unmöglich ist. Also ist $\sigma\cap\mathfrak{N}P$ eine Frobenius-Partition. Da $[\mathfrak{N}P:P]=[\mathfrak{N}P:\mathfrak{F}\mathfrak{N}P]$ gerade ist, so gibt es wegen I, Satz 4.1, (5) ein Element in $\mathfrak{N}P$, das in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P=P$ einen Frobenius-Automorphismus der Ordnung 2 induziert; und hieraus folgt wieder [wegen BURNSIDE, p. 90] die Kommutativität von P. Damit haben wir auch (b) und also unseren Hauptsatz voll bewiesen.

Als erste Anwendung des Hauptsatzes beweisen wir zwei Einfachheitskriterien, die sich von den in der Einleitung formulierten wesentlich unterscheiden.

SATZ B.1. *Die folgenden Eigenschaften der normalen, nicht-trivialen Partition σ der Gruppe G sind äquivalent:*

(1) *σ ist nicht einfach.*

(2) *G ist entweder primär oder es existiert ein eigentlicher Hallscher Normalteiler von G.*

(3) *Es gibt eine charakteristische Sylow-Untergruppe $\neq 1$ von G.*

BEWEIS. Daß (3) aus (1) folgt, ergibt sich ohne weiteres aus II, Satz B; und es ist trivial, daß (2) aus (3) folgt.

Ist schließlich σ einfach, so ergibt sich aus II, Bemerkung die folgende Alternative: Entweder ist G isomorph zur symmetrischen Gruppe des Grades 4; oder der Sockel $\mathfrak{S}G$ ist einfach und nicht-abelsch. Im ersten Fall ist G nicht primär und besitzt auch keinen eigentlichen Hallschen Normalteiler. Im zweiten Fall ist G entweder einfach oder aber es ist $[G:\mathfrak{S}G]=2$ und die 2-Sylow-Untergruppen von G sind nicht dedekindsch [Hauptsatz]. Dann ist aber natürlich auch G nicht primär und es ist frei von eigentlichen Hallschen Normalteilern. Mithin folgt aus der Einfachheit von σ die Ungültigkeit von (2), womit die Äquivalenz von (1) bis (3) dargetan ist.

SATZ B.2. *Die normale, nicht-triviale Partition σ der Gruppe G ist dann und nur dann einfach, wenn*

(I) $\mathfrak{N}P \neq \mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ *für jede* p*-Sylow-Untergruppe* P *von* G *mit ungeradem Primteiler* p *von* $o(G)$ *gilt und*

(II) $G/\mathfrak{F}G$ *keine 2-Gruppe ist und*

(III) *alle Komponenten von* σ *nilpotent sind.*

BEWEIS. Sei zunächst σ einfach. Dann ist wegen I, Satz 4.1, (1) insbesondere σ keine Frobenius-Partition, so daß die Komponenten von σ auch nicht normalisatorgleich sind. Anwendung eines Kegelschen Satzes ergibt die Nilpotenz der Komponenten von σ; vgl. KEGEL [Satz 2], womit die Notwendigkeit von (III) dargetan ist. — Weiter erschließen wir aus II, Bemerkung das Bestehen der folgenden Alternative:

Entweder ist G isomorph der symmetrischen Gruppe des Grades 4 oder $\mathfrak{S}G$ ist einfach und nicht-abelsch.

Ist G der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph, so ist 3 der einzige ungerade Primteiler von $o(G)$ und die Normalisatoren der 3-Sylow-Untergruppen sind nicht-abelsch der Ordnung 6; weiter ist $\mathfrak{F}G = \mathfrak{S}G$ elementar-abelsch der Ordnung 4 und $G/\mathfrak{F}G$ ist nicht-abelsch der Ordnung 6. In diesem Falle gelten also die beiden Bedingungen (I) und (II).

Ist aber $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht-abelsch, so ist $\mathfrak{F}G = 1$ und G keine 2-Gruppe, woraus wieder (II) folgt. Weiter ergibt sich aus dem Hauptsatz (a), daß $[G:\mathfrak{S}G] = 1$ oder 2 ist. Folglich existiert für keinen ungeraden Primteiler p von $o(G)$ eine von 1 verschiedene p-Faktorgruppe von G. Also folgt aus Satz A.11, daß $P \leqq (\mathfrak{N}P)'$ für jede p-Sylow-Untergruppe P von G gilt. Wäre trotzdem $\mathfrak{N}P = \mathfrak{F}\mathfrak{N}P$, so wäre P ein direkter Faktor der nilpotenten Gruppe $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P = \mathfrak{N}P$ und P wäre also gewiß nicht in $(\mathfrak{N}P)'$ enthalten, ein Widerspruch, der die Notwendigkeit von (I) ergibt.

Sei umgekehrt σ nicht einfach. Wäre G primär, so wäre $G = \mathfrak{F}G$ und $G/\mathfrak{F}G = 1$ eine 2-Gruppe, also (II) nicht erfüllt. Im folgenden nehmen wir deshalb an, daß G nicht primär ist. Sei weiter σ eine Frobenius-Partition von G. Dann ist $\mathfrak{F}G$ eine eigentliche, σ-zulässige, Hallsche Untergruppe von G; und die normalisatorgleichen Komponenten sind genau die Komplemente von $\mathfrak{F}G$ in G; vgl. I, Satz 4.1, (2). Sind nun etwa die Bedingungen (II) und (III) erfüllt, so betrachten wir eine normalisatorgleiche Komponente W von σ. Diese ist wegen (III) nilpotent; sie ist als Komplement von $\mathfrak{F}G$ in G zu $G/\mathfrak{F}G$ isomorph und mit $\mathfrak{F}G$ eine Hallsche Untergruppe von G. Es gibt einen ungraden Primteiler p von $o(W)$; und die nilpotente Gruppe W besitzt eine und nur eine p-Sylow-Untergruppe P, die natürlich $\neq 1$ ist. Da P eine charakteristische Untergruppe von W ist, so ist $W \leqq \mathfrak{N}P$. Aus dem Dedekindschen Modulsatz folgt dann $\mathfrak{N}P = W(\mathfrak{F}G \cap \mathfrak{N}P)$. Nun ist aber

$$P \circ (\mathfrak{F}G \cap \mathfrak{N}P) \leqq P \cap \mathfrak{F}G = 1,$$

so daß $\mathfrak{F}G \cap \mathfrak{N}P = \mathfrak{F}G \cap \mathfrak{C}P$ wird. Anwendung von I, Satz 4.1, (5) ergibt dann $\mathfrak{F}G \cap \mathfrak{N}P = 1$, so daß $\mathfrak{N}P = W$ nilpotent wird und also (I) nicht gilt, wenn (II) und (III) gelten.

Schließlich nehmen wir an, daß G nicht primär und σ weder einfach noch eine Frobenius-Partition von G ist. Anwendung von I, Satz 5.1, (c) ergibt dann die Existenz einer Komponente V von G, die Normalteiler von G ist und deren Index $[G:V]$ eine $o(V)$ teilende Primzahl p ist. Zusatz A.6, (2) ergibt, daß $V = \mathfrak{F}G$ von den Elementen aus G mit von p verschiedener Ordnung erzeugt wird. Gilt (II), so ist $p \neq 2$. Die Menge Y der Elemente aus V mit zu p teilerfremder Ordnung ist eine charakteristische Untergruppe von V und G. Ist P eine p-Sylow-Untergruppe von G, so ist $G = VP = YP$ und $Y \cap P = 1$. Wieder ist

$$(Y \cap \mathfrak{N}P) \circ P \subseteqq Y \cap P = 1$$

und also $Y \cap \mathfrak{N}P = Y \cap \mathfrak{C}P$. Elemente aus $Y \cap \mathfrak{C}P$ liegen aber wegen $(o(Y), o(P)) = 1$ und I, Lemma 2.1 in der gleichen Komponente wie die von 1 verschiedenen Elemente aus P, woraus $Y \cap \mathfrak{N}P = 1$ folgt, da Y eine von 1 verschiedene Untergruppe der Komponente V ist, P dagegen nicht in V enthalten ist. Es folgt $\mathfrak{N}P = P$, so daß (I) falsch ist, wenn (II) gilt. Damit haben wir gezeigt, daß die Nicht-Einfachheit von σ mit der gleichzeitigen Gültigkeit von (I), (II), (III) unverträglich ist.

C. Wir wollen in diesem Abschnitt die Analyse der Struktur der im Hauptsatz diskutierten Gruppen weitertreiben. Wir werden also in diesem Abschnitt eine Gruppe G mit den folgenden zwei Eigenschaften untersuchen:

(A) *G ist nicht einfach, aber $\mathfrak{S}G$ ist einfach und nicht abelsch.*

(B) *G besitzt eine nicht triviale Partition.*

Wir werden diese Voraussetzungen in den abzuleitenden Aussagen nicht wiederholen.

(1) $[G:\mathfrak{S}G] = 2$ *und die 2-Sylow-Untergruppen von G sind nicht dedekindsch.*

Dies ist weiter nichts als eine Wiederholung der Aussagen (a) und (c) des Hauptsatzes.

(2) *Es gibt eine einfache, normale, nicht triviale Partition σ von G.*

Dies folgt aus (B) und einer schon häufig angewandten Kegelschen Bemerkung; vgl. I, Beweis von Satz 4.7. Die Einfachheit von σ ergibt sich wegen (A) aus Hilfssatz A.1, (a).

Die folgende Untersuchung wird sich meist mit dem Paar G, σ befassen, das wir deshalb festhalten.

(3) *Ist X eine Komponente von σ, so ist $X \neq \mathfrak{N}X$ und X ist nilpotent.*

Beweis. Wäre nämlich $X = \mathfrak{N}X$, so wäre σ entweder trivial oder eine Frobenius-Partition. Die erste Möglichkeit ist durch unsere Wahl von σ ausgeschlossen; und aus der zweiten würde wegen I, Satz 4.1, (1) die (2) widersprechende Nicht-Einfachheit von σ folgen. Also ist $X \neq \mathfrak{N}X$; und hieraus folgt nach einem Satz von Kegel die Nilpotenz von X; vgl. Kegel [Satz 2].

(4) *Keine 2-Sylow-Untergruppe von G ist in einer Komponente von σ enthalten.*

BEWEIS. Ist P eine 2-Sylow-Untergruppe von G, so ist $G = P \cdot \mathfrak{S}G \neq \mathfrak{S}G$ wegen (1). Wäre P in der Komponente X von σ enthalten, so würde $X = \mathfrak{N}X$ aus Lemma A.3 folgen; und dies ist wegen (3) unmöglich.

(5) *Ist P eine 2-Sylow-Untergruppe von G, so ist $P^2 \neq 1$ und die Elemente mit von 2 verschiedener Ordnung aus P erzeugen eine abelsche Untergruppe $A \neq 1$ von P mit $[P:A] = 2$. Ist b ein nicht in A enthaltenes Element aus P, so ist $o(b) = 2$ und $a^{-1} = a^b$ für jedes a aus A. Schließlich ist $\mathfrak{Z}P$ genau die Gesamtheit der Elemente x aus A mit $x^2 = 1$.*

BEWEIS. Wäre $P^2 = 1$, so wäre P abelsch, was wegen (1) unmöglich ist. Also ist $A \neq 1$. Wäre A nicht abelsch, so gäbe es in P ein Paar nicht vertauschbarer Elemente, deren Ordnungen durch 4 teilbar sind. Aus Hilfssatz A.15 folgt dann, daß $\sigma \cap P$ trivial ist. Dann wäre aber P in einer Komponente von σ enthalten, was wegen (4) unmöglich ist. Also ist A abelsch. Da A abelsch und $A^2 \neq 1$ ist, so folgt aus I, Zusatz 5.6 die Trivialität von $\sigma \cap A$, so daß also A in einer Komponente von σ enthalten ist. Da P wegen (4) in keiner Komponente von σ enthalten ist, so ist $A \neq P$.

Ist b irgendein nicht in A enthaltenes Element aus P, so ist $o(b) = 2$, wie aus der Konstruktion von A folgt. Ist a ein Element aus A und b ein Element aus P, das nicht in A liegt, so ist auch ab ein nicht in A gelegenes Element aus P. Also ist auch $o(ab) = 2$, so daß

$$a^b = bab = a^{-1}(ab)^2 = a^{-1}$$

ist.

Sind b' und b'' Elemente aus P, die nicht in A liegen, so haben nach dem bereits Gezeigten diese beiden Elemente die Ordnung 2; und es gilt

$$a^{b'b''} = (a^{-1})^{b''} = a \quad \text{für jedes } a \text{ aus } A.$$

Also ist $b'b''$ mit jedem Element aus A vertauschbar. Wegen $P^2 \neq 1$ enthält A ein Element c der Ordnung 4. Wäre $b'b''$ nicht in A enthalten, so wäre auch $o(b'b'') = 2$ und $o(ab'b'') = o(a) = 4$. Es lägen also a und $ab'b''$ in der Untergruppe A; und hieraus folgt die Zugehörigkeit von $b'b''$ zu A. Da b' und b'' Elemente der Ordnung 2 sind, so folgt hieraus $Ab' = Ab''$; und damit ist $[P:A] = 2$ bewiesen.

Sei t ein Element aus $\mathfrak{Z}P$. Wäre t nicht in A enthalten, so betrachten wir eines der wegen $P^2 \neq 1$ existierenden Elemente s der Ordnung 4 aus A. Es gilt

$$st = ts = s^{-1}t \neq st.$$

Aus diesem Widerspruch folgt die Zugehörigkeit von t zu A, so daß also $\mathfrak{Z}P \subseteq A$ ist. — Ist a ein Element aus A und b ein nicht in A enthaltenes Element aus P, so ist

$$ab = ba^b = ba^{-1};$$

und es ist also dann und nur dann $ab = ba$, wenn $a = a^{-1}$ ist. Da A abelsch ist, so folgt jetzt unmittelbar, daß $\mathfrak{Z}P$ genau die Menge der $a^2 = 1$ erfüllenden Elemente a aus A ist.

(6) *G ist nicht 2-normal.*

Wir erinnern daran, daß die Gruppe G dann und nur dann 2-*normal* ist, wenn für 2-Sylow-Untergruppen P und Q von G aus $\mathfrak{Z}P \subseteq Q$ stets $\mathfrak{Z}P = \mathfrak{Z}Q$ folgt.

Beweis. Wir betrachten zum Beweise zunächst eine 2-Sylow-Untergruppe P von G. Wegen (5) ist $P^2 \neq 1$ und die von den Elementen mit von 2 verschiedener Ordnung aus P erzeugte charakteristische Untergruppe A von P ist abelsch mit $[P:A]=2$. Aus I, Zusatz 5.6 folgt, daß A in einer Komponente von $\sigma \cap P$ enthalten ist. Also gibt es eine A enthaltende Komponente B von σ. Aus (5) folgt noch $1 < \mathfrak{Z}P \subseteq A \subseteq B$.

Ist t ein $\mathfrak{Z}P$ normalisierendes Element, so folgt aus $1 < \mathfrak{Z}P \subseteq B$ und I, Lemma 2.5 die Zugehörigkeit von t zu $\mathfrak{N}B$. Also gilt $P \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{Z}P \subseteq \mathfrak{N}B$. Aus (4) folgt noch, daß P nicht in B enthalten ist. Wegen $A \subseteq B$ und $[P:A]=2$ wird $A = P \cap B$. Da P eine 2-Sylow-Untergruppe von G und also auch von $\mathfrak{N}B$ ist, so ist A eine 2-Sylow-Untergruppe des Normalteilers B von $\mathfrak{N}B$. Da die Komponente B von σ wegen (3) nilpotent ist, so ist die 2-Sylow-Untergruppe A von B eine charakteristische Untergruppe von B. Da $\mathfrak{Z}P$ wegen (5) eine charakteristische Untergruppe von A und also auch von B ist, so ist $\mathfrak{Z}P$ ein Normalteiler von $\mathfrak{N}B$. Folglich ist $\mathfrak{N}B \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{Z}P$; und damit haben wir $\mathfrak{N}B = \mathfrak{N}\mathfrak{Z}P$ bewiesen.

Aus $A = P \cap B$, $P \subseteq \mathfrak{N}B$ und $[P:A]=2$ folgt, daß $[\mathfrak{N}B:B]$ zwar durch 2, aber nicht durch 4 teilbar ist. Wäre $[\mathfrak{N}B:B] \neq 2$, so gäbe es eine $[\mathfrak{N}B:B]$ teilende ungerade Primzahl p. Insbesondere wäre $\mathfrak{N}B$ nicht primär. Da B eine Komponente von $\sigma \cap \mathfrak{N}B$ ist, so ist die Partition $\sigma \cap \mathfrak{N}B$ normal und nicht einfach. Da $[\mathfrak{N}B:B]$ durch $2p$ teilbar ist, so folgt aus I, Satz 5.1, (c), daß $\sigma \cap \mathfrak{N}B$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}B$ ist. Aus I, Satz 4.1, (1) folgt dann, daß $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ eine $(\sigma \cap \mathfrak{N}B)$-zulässige, eigentliche, Hallsche, nilpotente, charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}B$ ist. Der nilpotente Normalteiler B von $\mathfrak{N}B$ ist natürlich in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ enthalten. Also ist $A \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}B$; und da $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ Hallsch in $\mathfrak{N}B$ ist, so ist P die 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$. Weiter gibt es ein nicht in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ enthaltenes Element t in $\mathfrak{N}B$ von Primzahlordnung, das in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ wegen I, Satz 4.1, (5) einen Frobenius-Automorphismus induziert. Aus $P \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ und $G = P \cdot \mathfrak{S}G$ folgt sofort, daß $\mathfrak{N}B = \mathfrak{F}\mathfrak{N}B\ (\mathfrak{S}G \cap \mathfrak{N}B)$ das Produkt seiner eigentlichen Normalteiler $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ und $\mathfrak{S}G \cap \mathfrak{N}B$ ist. Aus $[G:\mathfrak{S}G]=2$ folgt, daß das Element t, dessen Ordnung ja eine ungerade Primzahl ist, da es nicht in P, aber doch in $\mathfrak{N}B$ liegt, zu $\mathfrak{S}G \cap \mathfrak{N}B$ gehört. Anwendung von Hilfssatz A.2 ergibt $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B \cap \mathfrak{C}t \neq 1$; und dies widerspricht der Tatsache, daß t in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ einen Frobenius-Automorphismus induziert. Aus diesem Widerspruch folgt $[\mathfrak{N}B:B]=2$.

Die Elemente ungerader Ordnung in der nilpotenten Gruppe B bilden eine charakteristische Untergruppe U von B mit ungerader Ordnung. Dann ist U ein Normalteiler von $\mathfrak{N}B$; und $\mathfrak{N}B/U \cong P$. Da P nicht zyklisch ist, so besitzen P und also auch $\mathfrak{N}B$ Faktorgruppen, die elementar-abelsch der Ordnung 4 sind. Insbesondere ist also die sog. 2-Faktorkommutatorgruppe von $\mathfrak{N}B$ nicht zyklisch der Ordnung 2. Da aber die 2-Faktorkommutatorgruppe von G wegen (A) und (1) zyklisch der Ordnung 2 ist, so sind die

2-Faktorkommutatorgruppen von G und $\mathfrak{N}B=\mathfrak{N}\mathfrak{Z}P$ nicht isomorph. Anwendung des Zweiten Grünschen Satzes ergibt, daß G nicht 2-normal ist; vgl. ZASSENHAUS [p. 135, Satz 6].

(7) *Die Zentren der 2-Sylow-Untergruppen von G haben die Ordnung 2.*

BEWEIS. Angenommen, dies wäre falsch. Sei P eine 2-Sylow-Untergruppe von G. Es folgt aus (5), daß $(\mathfrak{Z}P)^2=1$ ist; und aus unserer Annahme ergibt sich, daß 4 ein Teiler von $o(\mathfrak{Z}P)$ ist. Wegen (6) gibt es eine 2-Sylow-Untergruppe Q von G mit $\mathfrak{Z}Q\neq\mathfrak{Z}P\subseteq Q$. Aus (5) folgt, daß die von den Elementen mit von 2 verschiedener Ordnung aus Q erzeugte Untergruppe A von Q abelsch ist, $[Q:A]=2$ erfüllt, und daß $\mathfrak{Z}Q$ aus 1 und den Elementen der Ordnung 2 aus A besteht. Da $o(\mathfrak{Z}P)$ durch 4 teilbar ist, so ist $A\cap\mathfrak{Z}P\neq 1$; und hieraus folgt sogar $1<A\cap\mathfrak{Z}P=\mathfrak{Z}Q\cap\mathfrak{Z}P$. Es ist klar, daß die verschiedenen 2-Sylow-Untergruppen P und Q in $W=\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}Q\cap\mathfrak{Z}P)$ enthalten sind. Sei B die Untergruppe von P, die von den Elementen aus P mit von 2 verschiedener Ordnung erzeugt wird. Auch B ist abelsch mit $[P:B]=2$. Aus (5) folgt noch, daß $\mathfrak{Z}P\subseteq B$ ist; und es gilt also

$$1<\mathfrak{Z}P\cap\mathfrak{Z}Q\subseteq A\cap B.$$

Anwendung von I, Zusatz 5.6 ergibt, daß A in einer Komponente A^* von σ und B in einer Komponente B^* von σ enthalten ist. Dann ist aber $1\neq A\cap B\subseteq A^*\cap B^*$, woraus $A^*=B^*$ folgt. Wegen (3) ist diese Komponente A^* von σ nilpotent; und da 2-Sylow-Untergruppen von G wegen (4) nicht in Komponenten von σ enthalten sind, so ist A genau die 2-Sylow-Untergruppe von A^* und B die 2-Sylow-Untergruppe von B^*. Aus $A^*=B^*$ folgt $A=B$; und hieraus folgt wegen (5) weiter $\mathfrak{Z}P=\mathfrak{Z}Q$. Dies ist ein Widerspruch, aus dem (7) folgt.

(8) *Ist P eine 2-Sylow-Untergruppe von G, so ist $P=\{a,b\}$ mit $o(b)=2$, $a^b=a^{-1}\neq a$.*

Dies folgt durch mühelose Kombination von (5) und (7), und damit ist auch die Behauptung (c*) des Hauptsatzes bewiesen.

(9) *Ist A eine 2-Untergruppe von G, so ist $\mathfrak{N}A/\mathfrak{C}A$ eine 2-Gruppe, wenn A nicht elementar-abelsch der Ordnung 4 ist.*

BEWEIS. Ist A zyklisch der Ordnung 2^i, so hat die Automorphismengruppe von A die Ordnung 2^{i-1}. Sei A weder zyklisch noch elementar-abelsch der Ordnung 4. Da A natürlich in einer 2-Sylow-Untergruppe von G enthalten ist, so folgt aus [(5) und] (8), daß A einen zyklischen Normalteiler K besitzt, dessen Ordnung ein Vielfaches von 4 ist, und dessen Index $[A:K]=2$ ist, daß weiter die nicht in K enthaltenen Elemente aus A sämtlich die Ordnung 2 haben. Ist etwa $o(K)=2^k$, so ist die Ordnung der Automorphismengruppe von A genau 2^{2k-1}, da wir erstens ein gegebenes erzeugendes Element von K auf ein beliebiges erzeugendes Element von K abbilden können [2^{k-1} Möglichkeiten], und da wir unabhängig hiervon ein gegebenes nicht in K enthaltenes Element aus A auf ein beliebiges nicht in K enthaltenes Element

abbilden können [2^k Möglichkeiten]. Also ist in beiden Fällen die Gruppe aller Automorphismen von A eine 2-Gruppe. Da $\mathfrak{N}A/\mathfrak{C}A$ im wesentlichen mit einer Gruppe von Automorphismen von A identisch ist, so ist $\mathfrak{N}A/\mathfrak{C}A$ auch eine 2-Gruppe.

(10) *Es gibt elementar-abelsche Untergruppen A der Ordnung 4 von G, deren Normalisator $\mathfrak{N}A$ der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph ist.*

Beweis. Wäre $\mathfrak{N}A/\mathfrak{C}A$ für jede 2-Untergruppe A von G eine 2-Gruppe, so wäre G nach einem Kriterium von Frobenius eine 2'-abgeschlossene Gruppe; vgl. etwa Hall [p. 217, Theorem 14.4.7]. Nun sind aber 2'-abgeschlossene Gruppen auch 2-normal. Also folgt aus (6), daß es eine 2-Untergruppe A von G derart gibt, daß $\mathfrak{N}A/\mathfrak{C}A$ keine 2-Gruppe ist; und aus (9) folgt dann, daß ein solches A elementar-abelsch der Ordnung 4 ist; [und zwar ist $A=\{\mathfrak{Z}P, b\}$].

Sei also A elementar-abelsch der Ordnung 4 und $\mathfrak{N}A/\mathfrak{C}A$ keine 2-Gruppe. Da die Automorphismengruppe von A genau die Ordnung 6 hat, so ist $[\mathfrak{N}A:\mathfrak{C}A]$ ein Teiler von 6. Da $[\mathfrak{N}A:\mathfrak{C}A]$ keine Potenz von 2 ist, so muß also $[\mathfrak{N}A:\mathfrak{C}A]$ ein Vielfaches von 3 sein. Ist P irgendeine A enthaltende 2-Sylow-Untergruppe, so folgt aus (8) einmal, daß $A\subset P\cap\mathfrak{N}A$ ist, und daß $A\neq P\cap\mathfrak{C}A$ und also $[P\cap\mathfrak{N}A:A]=2$ ist. Damit ist bereits gezeigt, daß $[\mathfrak{N}A:\mathfrak{C}A]=6$ ist. Wäre $\mathfrak{C}A\neq A$, so müßte $\mathfrak{C}A$ ein Element w von ungerader Primzahlordnung enthalten, da ja A gewiß die 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{C}A$ ist. Aus I, Lemma 2.1 würde dann folgen, daß die w enthaltende Komponente W von σ auch A enthält. Ist wieder P eine A enthaltende 2-Sylow-Untergruppe, so ist $P=BA$, wobei B ein zyklischer Normalteiler von P mit Index $[P:B]=2$ ist [wegen (8)]. Die Ordnung von B ist ein Vielfaches von 4 und $A\cap B=\mathfrak{Z}P\neq 1$ [wegen (8)]. Es müßte also auch B in W enthalten sein, so daß sogar $P\subseteq W$ im Widerspruch zu (4) gelten würde. Damit haben wir $\mathfrak{C}A=A$ und also auch $o(\mathfrak{N}A)=24$ bewiesen. Nun ist aber bekanntlich die symmetrische Gruppe des Grades 4 genau die Gruppe der Ordnung 24, die in einem elementar-abelschen Normalteiler der Ordnung 4 dessen volle Automorphismengruppe induziert. Damit haben wir gezeigt, daß $\mathfrak{N}A$ der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph ist.

(11) *Ist P eine 2-Sylow-Untergruppe von G, so ist $P=\mathfrak{N}P$ und $P\cap\mathfrak{S}G$ enthält eine elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung 4.*

Beweis. Aus (9) folgt, daß $\mathfrak{N}P/\mathfrak{C}P$ eine 2-Gruppe und also $\mathfrak{N}P=P\cdot\mathfrak{C}P$ ist. Natürlich ist $\mathfrak{Z}P=P\cap\mathfrak{C}P$ eine 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{C}P$. Wäre $\mathfrak{Z}P\subset\mathfrak{C}P$, so gäbe es in $\mathfrak{C}P$ ein Element w von ungerader Primzahlordnung; und aus I, Lemma 2.1 würde folgen, daß P in der w enthaltenden Komponente von σ enthalten ist. Dies widerspricht aber (4). Also ist $\mathfrak{Z}P=\mathfrak{C}P$ und $\mathfrak{N}P=P\cdot\mathfrak{Z}P=P$.

Aus $[G:\mathfrak{S}G]=2$ folgen $G=P\cdot\mathfrak{S}G$ und $[P:P\cap\mathfrak{S}G]=2$. Aus (7) folgt $o(\mathfrak{Z}P)=2$; und da der Normalteiler $P\cap\mathfrak{S}G$ von P von 1 verschieden ist, so ist sicherlich $\mathfrak{Z}P\subseteq P\cap\mathfrak{S}G$. Es folgt, daß alle 2-Sylow-Zentren im Sockel

liegen. Aus (6) ergibt sich die Existenz einer 2-Sylow-Untergruppe Q, deren Zentrum $\mathfrak{Z}Q$ zwar in P enthalten ist, aber von $\mathfrak{Z}P$ verschieden ist. Dann ist $\mathfrak{Z}P \otimes \mathfrak{Z}Q$ eine elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung 4 von P, die in $\mathfrak{S}G$ enthalten ist, da ja alle 2-Sylow-Zentren im Sockel liegen.

(12) *Ist p ein ungerader Primteiler von $o(G)$, so sind die Durchschnitte verschiedener p-Sylow-Untergruppen von G trivial.*

BEWEIS. Wäre dies nicht wahr, so gäbe es ein Paar verschiedener p-Sylow-Untergruppen A, B von G mit $A \cap B \neq 1$. Aus Hauptsatz (b) folgt die Kommutativität von A und B [wegen $p \neq 2$]. Setzen wir $U = \mathfrak{N}(A \cap B)$, so sind also gewiß A und B Untergruppen [und mithin p-Sylow-Untergruppen] von U. Da U zwei verschiedene p-Sylow-Untergruppen besitzt, so ist U nicht nilpotent und $\mathfrak{F}U$ enthält keine p-Sylow-Untergruppe von U. Es ist also zwar $A \cap B$, aber weder A noch B in $\mathfrak{F}U$ enthalten. Folglich ist $\mathfrak{F}U$ keine Hallsche Untergruppe von U, und hieraus folgt wegen I, Satz 4.1, (1), daß $\sigma \cap U$ keine Frobenius-Partition von U ist. Aus $U \neq \mathfrak{F}U$ und (3) folgt, daß U in keiner Komponente von σ enthalten und $\sigma \cap U$ mithin nicht trivial ist. Da $A \cap B$ ein von 1 verschiedener p-Normalteiler von U und $p \neq 2$ ist, so ergibt sich aus II, Satz A, daß $\sigma \cap U$ nicht einfach ist. Anwendung von I, Satz 5.1, (c) ergibt jetzt die Existenz einer Komponente V von $\sigma \cap U$, die ein Normalteiler von U mit Primzahlindex $[U:V]$ ist. Wegen (3) ist V nilpotent, kann also weder A noch B enthalten. Es folgt $[U:V] = p$ und V enthält zwar $A \cap B$, ist aber keine p-Gruppe, also auch nicht primär.

Natürlich liegt V in einer eindeutig bestimmten Komponente W von σ. Da die Untergruppe $V \neq 1$ von W ein Normalteiler von U ist, so ist U wegen I, Lemma 2.5 in $\mathfrak{N}W$ enthalten. Also ist p ein gemeinsamer Primteiler von $o(W)$ und $[\mathfrak{N}W:W]$. Natürlich ist $\sigma \cap \mathfrak{N}W$ eine normale, nicht einfache Partition der nicht primären Gruppe $\mathfrak{N}W$. Es ist W wegen (3) nilpotent; und aus Zusatz A.6 folgern wir, daß $p = [\mathfrak{N}W:W]$ ist, und daß die Elemente aus W mit zu p teilerfremder Ordnung eine Hallsche Untergruppe H von G bilden [die charakteristisch in W und $\mathfrak{N}W$ ist]. Da $\mathfrak{N}W$ nicht primär ist, so ist $H \neq 1$. Wäre $o(H)$ gerade, so würde H als Hallsche Untergruppe von G eine ganze 2-Sylow-Untergruppe von G enthalten, die dann im Widerspruch zu (4) in der Komponente W von σ läge. Also sind W [und $\mathfrak{N}W$] Gruppen ungerader Ordnung. Ist q ein Primteiler von $o(H)$, so enthält die Hallsche Untergruppe H von G eine q-Sylow-Untergruppe Q von G. Aus $[G:\mathfrak{S}G] = 2$ folgt, daß Q eine q-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{S}G$ ist; und aus dem Frattinischen Schluß ergibt sich $G = (\mathfrak{S}G)(\mathfrak{N}Q)$; vgl. BAER [*1*; p. 117, Lemma 1]. Folglich ist $o(\mathfrak{N}Q)$ gerade. Aus $1 < Q \leqq H \leqq W$ und I, Lemma 2.5 folgt $\mathfrak{N}Q \leqq \mathfrak{N}W$ und also auch die Gradheit von $o(\mathfrak{N}W)$. Dies ist ein Widerspruch, aus dem die Gültigkeit von (12) folgt.

(13) *Ist A eine p-Sylow-Untergruppe von G mit $p \neq 2$, ist b ein nicht in A enthaltenes Element aus G mit $A \cap \mathfrak{C}b \neq 1$, so ist A in der b enthaltenden Komponente B von σ enthalten.*

Beweis. Es folgt aus Hauptsatz (b), daß A abelsch ist. Da A und A^b zwei p-Sylow-Untergruppen von G mit ungradem p und $1 < A \cap \mathfrak{C}b \subseteq A \cap A^b$ sind, so folgt $A = A^b$ aus (12). Da A von b normalisiert wird, während b nicht zu A gehört, so ist b kein p-Element und es gibt eine Potenz d von b mit Primzahlordnung $o(d) \neq p$. Natürlich ist auch $A \cap \mathfrak{C}d \neq 1$; und mit b liegt auch d in der Komponente B von σ. Wir nehmen an, daß $A \subsetneqq B$ gilt.

Sei $D = A\{d\}$. Dann ist $B^* = B \cap D \neq D$ und B^* ist eine d enthaltende Komponente von $\sigma \cap D$. Da $o(d)$ eine von p verschiedene Primzahl ist, so folgt aus I, Lemma 2.1, daß $1 < A \cap \mathfrak{C}d \subseteq B^*$ ist. Die Komponente B^* von $\sigma \cap D$ ist also nicht primär; sie erfüllt $A \cap B^* \neq 1$; und sie ist wegen (3) nilpotent. Natürlich ist der p-Normalteiler A von D in $\mathfrak{F}D$ enthalten. Wäre $A \neq \mathfrak{F}D$, so würde $D = \mathfrak{F}D$ aus $[D:A] = o(d)$, eine Primzahl, folgen; und die nicht primäre nilpotente Gruppe $D = \mathfrak{F}D$ wäre ganz in einer Komponente von σ enthalten [wegen I, Folgerung 2.3], was $D \neq B^*$ widerspricht. Also ist $A = \mathfrak{F}D$. Aus II, Satz B folgt, daß die normale, nicht triviale Partition $\sigma \cap D$ von D auch nicht einfach ist. Da B^* zwar nicht in $A = \mathfrak{F}D$ enthalten ist, es aber nicht-trivial schneidet, so folgt aus I, Satz 4.1, (1), daß $\sigma \cap D$ keine Frobenius-Partition von D sein kann. Aus I, Satz 5.1, (c) folgt nun die Existenz einer Komponente E von $\sigma \cap D$, die ein Normalteiler von D mit Primzahlindex $[D:E]$ ist. Wegen (3) ist E nilpotent. Der nilpotente Normalteiler E ist also in $\mathfrak{F}D = A$ enthalten. Daraus folgt $E \cap B^* = 1$, so daß $o(B^*)$ ein Teiler der Primzahl $[D:E]$ ist. Aber $o(B^*)$ ist durch die zwei verschiedenen Primzahlen p und $o(d)$ teilbar. Unsere Annahme, daß A nicht in B enthalten ist, hat zu einem Widerspruch geführt; und (13) ist bewiesen.

(14) *Ist X eine Komponente von σ, so ist die ungrade Primzahl p dann und nur dann ein gemeinsamer Teiler von $o(X)$ und $[G:X]$, wenn X eine p-Gruppe, aber keine p-Sylow-Untergruppe von G ist.*

Beweis. Als Komponente von σ ist $X \neq 1$. Ist also X eine p-Gruppe, ohne eine p-Sylow-Untergruppe von G zu sein, so ist p ein gemeinsamer Teiler von $o(X)$ und $[G:X]$.

Sei umgekehrt p ein gemeinsamer Teiler von $o(X)$ und $[G:X]$, aber X keine p-Gruppe. Dann ist X weder primär noch eine Hallsche Untergruppe von G. Anwendung von Zusatz A.6 ergibt dann, daß $[\mathfrak{N}X:X]$ eine $o(X)$ teilende Primzahl q ist, und daß die Elemente aus X mit zu q teilerfremder Ordnung eine Hallsche Untergruppe Y von G bilden. Wäre $p \neq q$, so wäre der Teiler p von $o(X)$ auch ein Teiler von $o(Y)$ und also kein Teiler von $[G:Y]$ und erst recht keiner von $[G:X]$. Dies ist unmöglich und also ist $p = q = [\mathfrak{N}X:X]$. Da X keine p-Gruppe ist, so ist $Y \neq 1$. Wäre $o(Y)$ gerade, so wären die 2-Sylow-Untergruppen von Y in X enthaltene 2-Sylow-Untergruppen von G, was (4) widerspricht. Also ist $o(Y)$ und wegen der Ungradheit von p auch $o(\mathfrak{N}X)$ ungerade; und aus $[G:\mathfrak{S}G] = 2$ folgt $\mathfrak{N}X \subseteq \mathfrak{S}G$. Da $Y \neq 1$ ist, so gibt es einen Primteiler r von $o(Y)$. Ist R eine r-Sylow-Untergruppe von Y, so ist R eine in $\mathfrak{S}G$ enthaltene r-Sylow-Untergruppe von G [und $\mathfrak{S}G$]; und Anwendung des Frattinischen Schlusses ergibt $G = (\mathfrak{S}G)(\mathfrak{N}R)$; vgl.

BAER [1; p. 117, Lemma 1]. Also ist $\mathfrak{N}R$ nicht in $\mathfrak{S}G$ enthalten. Andererseits folgt aus $1 < R \subseteq Y \subseteq X$ und I, Lemma 2.5, daß $\mathfrak{N}R \subseteq \mathfrak{N}X \subseteq \mathfrak{S}G$ ist. Dies ist ein Widerspruch. Also ist X eine p-Gruppe. Da aber p ein Teiler von $[G:X]$ ist, so kann X keine p-Sylow-Untergruppe von G sein, womit (14) vollständig bewiesen ist.

(15) *Ist X eine Komponente von σ und $o(X)$ gerade, so enthält X ein und nur ein Element der Ordnung 2; und es ist $[\mathfrak{N}X:X]=2$.*

BEWEIS. Wegen (3) ist X nilpotent und besitzt also eine und nur eine 2-Sylow-Untergruppe E. Da $o(X)$ gerade ist, so ist $E \neq 1$; und E enthält also wenigstens ein Element der Ordnung 2. Enthielte E mehr als ein Element der Ordnung 2, so enthielte E auch eine elementar-abelsche Untergruppe F der Ordnung 4. Natürlich ist E in einer 2-Sylow-Untergruppe P von G enthalten; und aus (8) folgt, daß $o(\mathfrak{Z}P)=2$ und $\mathfrak{Z}P < F \subseteq E \subseteq X$ ist. Nun ist $\mathfrak{Z}P$ in dem zyklischen Normalteiler B von P mit $[P:B]=2$ enthalten; und die eindeutig bestimmte, die zyklischen Untergruppe B enthaltende Komponente von σ muß also X sein. Dann enthielte aber X mit B und F auch $BF=P$; und dies widerspricht (4). Also enthält X ein und nur ein Element der Ordnung 2.

Aus $1 < E \subseteq X$ und I, Lemma 2.5 folgt $\mathfrak{N}E \subseteq \mathfrak{N}X$. Da E wegen (4) eine echte Untergruppe der 2-Sylow-Untergruppe P von G ist, so ist $E < \mathfrak{N}E \cap P$; und hieraus folgt sofort die Gradheit von $[\mathfrak{N}X:X]$. Ist zunächst $o(X)=2$, so ist $X=E$ und $\mathfrak{N}X=\mathfrak{C}X$, woraus wegen I, Lemma 2.1 folgt, daß $\mathfrak{N}X$ eine 2-Gruppe ist. Es folgt weiter, daß X nicht das Zentrum einer Sylow-Untergruppe sein kann, da dann der ganze zyklische Normalteiler der 2-Sylow-Untergruppe P mit Index 2 in X enthalten sein müßte; und aus (8) folgt $[\mathfrak{N}X:X]=2$. Ist aber X eine zyklische 2-Gruppe von einer Ordnung $\neq 2$, so ist $X=E$ der zyklische Normalteiler von P mit Index 2. Anwendung von (9) und I, Lemma 2.1 ergibt wieder, daß $\mathfrak{N}X$ eine 2-Gruppe und also $[\mathfrak{N}X:X]=2$ ist. Ist schließlich X keine 2-Gruppe, so folgern wir $[\mathfrak{N}X:X]=2$ aus Zusatz A.6.

(16) *Komponenten gerader Ordnung von σ sind dann und nur dann in G konjugiert, wenn ihre Elemente der Ordnung 2 in derselben Restklasse modulo $\mathfrak{S}G$ liegen.*

Wir übergehen den Beweis dieser Tatsache, da wir von ihr im folgenden keinen Gebrauch machen wollen

(17) *Alle Komponenten von σ sind abelsch.*

Diese Aussage (17) verdanke ich einem Hinweis von Herrn O. KEGEL.

BEWEIS. Jede Komponente X von σ ist wegen (3) nilpotent. Ist p ein ungrader Primteiler von $o(X)$, so ist wegen Hauptsatz (b) jede p-Sylow-Untergruppe von G abelsch. Also ist auch die p-Sylow-Untergruppe von X abelsch. Ist 2 ein Teiler von $o(X)$, so enthält X wegen (15) ein und nur ein Element der Ordnung 2; und jetzt folgt aus (8), daß die 2-Sylow-Untergruppe von X zyklisch ist. Also ist X als direktes Produkt abelscher Gruppen abelsch.

D. Beweis des Einfachheitskriteriums. Ist zunächst σ einfach und $\mathfrak{F}G \neq 1$, so ergibt sich wegen II, Satz A, daß G der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph ist. Damit haben wir (II) aus (I) hergeleitet.

Gilt (II), ohne daß G isomorph zur symmetrischen Gruppe des Grades 4 ist, so ist $\mathfrak{F}G = 1$. Dann ist der Sockel $\mathfrak{S}G$ das direkte Produkt einfacher, nicht-abelscher Gruppen. Anwendung von I, Folgerung 3.6 ergibt dann daß $\mathfrak{S}G$ sogar einfach und nicht abelsch ist, da ja σ eine normale, nicht-triviale Partition von G ist. Damit haben wir (III) aus (II) hergeleitet.

Aus (III) folgt (IV) wegen (C.10).

Wir nehmen schließlich an, daß zwar σ nicht einfach ist, G aber eine zur symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorphe Untergruppe S enthält. Aus $o(S) = 2^3 \cdot 3$ folgt, daß G nicht primär ist. Da S drei verschiedene 2-Sylow-Untergruppen besitzt, so gibt es in G wenigstens drei verschiedene 2-Sylow-Untergruppen. Also ist G nicht 2-abgeschlossen; und dies ist gleichwertig mit der Aussage: $\mathfrak{F}G$ enthält keine 2-Sylow-Untergruppe von G.

Wäre nun σ eine Frobenius-Partition von G, so wäre wegen I, Satz 4.1 einmal $\mathfrak{F}G$ eine eigentliche, nilpotente, charakteristische, σ-zulässige Hallsche Untergruppe von G und eine p-Sylow-Untergruppe von $G/\mathfrak{F}G$ enthielte höchstens eine zyklische Untergruppe der Ordnung p. Da $\mathfrak{F}G$ keine 2-Sylow-Untergruppe von G enthalten kann, so muß $o(\mathfrak{F}G)$ ungerade sein. Der Sockel $\mathfrak{S}S$ ist elementar-abelsch der Ordnung 4. Also ist $\mathfrak{F}G \cap \mathfrak{S}S = 1$, so daß $\mathfrak{S}S$ der Untergruppe $(\mathfrak{F}G)(\mathfrak{S}S)/\mathfrak{F}G$ von $G/\mathfrak{F}G$ isomorph ist. Dies widerspricht aber der Tatsache, daß $G/\mathfrak{F}G$ keine elementar-abelschen Untergruppen der Ordnung 4 enthalten kann. Aus diesem Widerspruch folgt, daß σ keine Frobenius-Partition ist.

Da G nicht primär und die normale Partition σ von G weder einfach noch eine Frobenius-Partition ist, so folgt aus I, Satz 5.1, (c) die Existenz einer Komponente K von σ, die ein Normalteiler von G mit Primzahlindex $[G:K] = p$ ist. Da K gewiß nicht normalisatorgleich ist, so können wir aus einem Kegelschen Resultat die Nilpotenz von K folgern; vgl. Kegel [Satz 2]. Dann ist $S \cap K$ ein nilpotenter Normalteiler von S, dessen Index $[S:S \cap K] = 1$ oder p ist. Aber S ist der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph und besitzt folglich keinen derartigen Normalteiler. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß (I) aus (IV) folgt, womit unser Kriterium voll bewiesen ist.

Bemerkung. Durch Kombination des Hauptsatzes und des Einfachheitskriteriums ergibt sich folgendes: Ist σ eine normale, einfache und nicht triviale Partition der Gruppe G, so ist entweder G isomorph zur symmetrischen Gruppe des Grades 4 oder G ist einfach und nicht abelsch oder aber $\mathfrak{S}G$ ist einfach und nicht-abelsch mit Index $[G:\mathfrak{S}G] = 2$. Jede dieser drei Möglichkeiten kann wirklich eintreten. Ist nämlich G die symmetrische Gruppe des Grades 4, so ist die Menge σ der nicht in $\mathfrak{S}G$ enthaltenen zyklischen Untergruppen eine normale, nicht-triviale, einfache Partition. Es gibt unendlich viele Beispiele einfacher, nicht-abelscher Gruppen mit normalen, nicht-trivialen Partitionen. Ist schließlich G die symmetrische Gruppe des Grades 5, so ist $\mathfrak{S}G$ die alternierende Gruppe des Grades 5. Ist σ die Menge der zyklischen Untergruppen

von G, die entweder nicht in $\mathfrak{S}G$ liegen oder die Ordnung 5 haben, so ist σ eine normale, nicht-triviale, einfache Partition von G. Ist allgemeiner G die gebrochen-lineare Gruppe [mit beliebiger Determinante $\neq 0$] über dem Primkörper der Charakteristik $p \neq 2$, so ist $\mathfrak{S}G$ einfach, nicht-abelsch und vom Index $[G:\mathfrak{S}G]=2$; und die Menge der zyklischen Untergruppen von G der Ordnungen $p-1, p, p+1$ ist eine normale, einfache und nicht triviale Partition von G.

E. Die Situation einer Komponente X der normalen Partition σ von G wird in erster Annäherung durch die Partition $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ von $\mathfrak{N}X$ beschrieben. Wir wollen im folgenden solche Komponenten X betrachten, deren Situation etwa durch Zusatz A.6 beschrieben wird; vgl. hierzu auch Zusatz A.18 und A.19.

SATZ E.1. *Ist X eine nicht primäre Komponente der normalen Partition σ von G und p ein ungrader gemeinschaftlicher Primteiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X:X]$, so sind die folgenden Eigenschaften [von G, σ, X, p] äquivalent:*

(1) *σ ist einfach.*

(2) *$\mathfrak{S}G$ ist einfach und nicht abelsch.*

(3) *G ist einfach.*

(4) *$[G:\mathfrak{C}t]$ ist für kein Element $t \neq 1$ aus G eine Primzahlpotenz.*

(5) $(o(\mathfrak{Z}G), p) = 1$.

(6) *$[G:X]$ ist keine Primzahlpotenz.*

(7) $G \neq \mathfrak{N}X$.

BEWEIS. Da $o(G)$ gewiß durch das Quadrat der ungeraden Primzahl p teilbar ist, so ist G sicher nicht isomorph zur symmetrischen Gruppe des Grades 4. Anwendung unseres Einfachheitskriteriums ergibt nun, daß (2) eine Folge von (1) ist.

Ist $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht abelsch, ist weiter G nicht einfach, so können wir unser Resultat (C.14) anwenden. Daraus ergibt sich, daß eine Komponente X von σ notwendig primär ist, wenn die ungerade Primzahl p ein gemeinsamer Teiler von $o(X)$ und $[G:X]$ ist. Also ist (3) eine Folge von (2).

Gilt (3), so ist G einfach und nicht abelsch, da die Ordnung von G ja durch p^2 teilbar ist. Anwendung eines Satzes von BURNSIDE ergibt nun, daß die Anzahl der Konjugierten eines Elements $t \neq 1$ aus G keine Primzahlpotenz ist; vgl. BURNSIDE [p. 332, Corollary II]. Also ist (4) eine Folge von (3).

Wir wollen jetzt aus (4) die Bedingung (6) erschließen. Wäre nämlich $[G:X]$ eine Primzahlpotenz, so müßte $[G:X]$ eine Potenz des Primteilers p von $[\mathfrak{N}X:X]$ sein. Da X wegen Zusatz A.6 nilpotent ist, so ist $\mathfrak{Z}X \neq 1$. Ist $x \neq 1$ ein Element aus $\mathfrak{Z}X$, so ist $X \subseteq \mathfrak{C}x$; und mit $[G:X]$ ist auch $[G:\mathfrak{C}x]$ eine Potenz von p. Mit (6) ist also auch (4) falsch, d.h. (6) folgt aus (4). Da,

wie schon bemerkt, $[\mathfrak{N}X:X]=p$ aus Zusatz A.6 folgt, so ist (7) eine Folge von (6).

Wir setzen weiter die Nicht-Einfachheit von σ voraus. Wäre σ eine Frobenius-Partition von G, so würde aus I, Satz 4.1 folgen, daß $\mathfrak{F}G$ eine σ-zulässige, eigentliche, Hallsche, charakteristische Untergruppe von G ist, und daß die nicht in $\mathfrak{F}G$ enthaltenen Komponenten von σ sämtlich normalisatorgleich sind. Da $X \neq \mathfrak{N}X$ ist, so ist also die Komponente X in der σ-zulässigen Untergruppe $\mathfrak{F}G$ enthalten; und da $\mathfrak{F}G$ eine Hallsche Untergruppe von G ist, und da aus Zusatz A.6 sich ergibt, daß $p=[\mathfrak{N}X:X]$ ein Teiler von $o(X)$ und also auch von $o(\mathfrak{F}X)$ ist, so ist $\mathfrak{N}X$ eine Untergruppe von $\mathfrak{F}G$ und also nilpotent. Nun ist aber X nicht primär, so daß auch $\mathfrak{N}X$ zwar nilpotent, aber nicht primär ist. Anwendung von I, Folgerung 2.3 ergibt das Enthaltensein von $\mathfrak{N}X$ in einer Komponente von σ, woraus der Widerspruch $X=\mathfrak{N}X$ folgt. Also ist σ gewiß keine Frobenius-Partition von G. Nun ist aber σ nicht einfach und mit X ist auch G nicht primär. Anwendung von I, Satz 5.1, (c) ergibt die Existenz einer Komponente Y von σ, die Normalteiler von G mit Primzahlindex $[G:Y]$ ist. Wäre $X \neq Y$, so müßte $o(X)=[G:Y]$ sein, was unmöglich ist. Also ist $X=Y$ ein Normalteiler von G und $G=\mathfrak{N}X$. Mithin folgt aus der Falschheit von (1) die Falschheit von (7), so daß (1) aus (7) folgt und die Äquivalenz der Bedingungen (1), (2), (3), (4), (6), (7) dargetan ist.

Ist (3) richtig, so ist $\mathfrak{Z}G=1$; und also ist (5) eine Folge von (3). — Ist $G=\mathfrak{N}X$, so folgt aus Zusatz A.6, (4), daß p ein Teiler von $o(\mathfrak{Z}G)$ ist; also folgt (7) aus (5). Damit ist auch die Äquivalenz der Bedingungen (1) bis (7) bewiesen.

Bemerkung E.2. Es scheint eine offene Frage zu sein, ob es Partitionen mit Komponenten der in Satz E.1 charakterisierten Art überhaupt gibt. Doch sei darauf hingewiesen, daß die Situation sich völlig ändert, wenn wir auf die Voraussetzung verzichten, daß p ungrade ist. Ist etwa G die symmetrische Gruppe des Grades 5, so ist G selbst nicht einfach, während der Sockel $\mathfrak{S}G$ [die alternierende Gruppe] einfach und nicht abelsch ist. Eine normale, nichttriviale [und notwendig einfache] Partition σ von G besteht aus den zyklischen Untergruppen der Ordnung 5 und den nicht in $\mathfrak{S}G$ enthaltenen zyklischen Untergruppen. Ist S eine zyklische Untergruppe der Ordnung 6, so ist $[\mathfrak{N}S:S]=2$, so daß $[\mathfrak{N}S:S]$ ein Primteiler von $o(S)$ ist. Diese Partition leistet also das Verlangte; sie zeigt weiter die Unentbehrlichkeit von $p \neq 2$ für die Gültigkeit von Satz E.1.

Wir wollen noch eine Reihe weiterer Eigenschaften der in Satz E.1 betrachteten Partitionen herleiten, entweder als Hilfe für ihren Nicht-Existenzbeweis oder für ihr mehr ins einzelne gehende Studium. Wir beginnen mit einer zweiten Reihe charakteristischer Eigenschaften dieser Partitionenklasse, in denen aber die p-Sylow-Untergruppen eine zentrale Rolle spielen.

Satz E.3. *Ist X eine nicht primäre Komponente der normalen Partition σ von G und p ein ungrader gemeinschaftlicher Primteiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X:X]$,*

so sind die folgenden Eigenschaften der p-Sylow-Untergruppe P von G äquivalent:

(a) $G = \mathfrak{N}X$

(b) $\mathfrak{N}P$ *ist p'-abgeschlossen.*

(c) $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ *ist keine Frobenius-Partition von* $\mathfrak{N}P$.

(d) $\mathfrak{N}P = P$.

(e) $P \not\subseteq (\mathfrak{N}P)'$.

(f) $\mathfrak{N}\mathfrak{Z}P = \mathfrak{C}\mathfrak{Z}P$.

(g) *Es gibt eine charakteristische Untergruppe R von P mit p'-abgeschlossenem Normalisator* $\mathfrak{N}R$.

(h) G *ist p'-abgeschlossen.*

BEWEIS. Sei zunächst $G = \mathfrak{N}X$. Dann folgt aus Zusatz A.6, daß $[\mathfrak{N}X : X] = p$ ist, und daß die Elemente aus X mit zu p teilerfremder Ordnung eine charakteristische Untergruppe Y von X bilden. Es folgt, daß Y ein Normalteiler von $\mathfrak{N}X = G$ und $o(Y)$ zu p teilerfremd ist, während $G/Y = \mathfrak{N}X/Y$ eine p-Gruppe ist. Also folgt (h) aus (a). Gilt (h), so ist G nicht einfach und $G = \mathfrak{N}X$ folgt aus Satz E.1, womit die Äquivalenz von (a) und (h) dargetan ist.

Mit G ist jede Untergruppe von G eine p'-abgeschlossene Gruppe, so daß (b) aus (h) folgt. Gilt (b), so ist $\mathfrak{N}P$ das direkte Produkt seines Normalteilers P und des Normalteilers Q von $\mathfrak{N}P$, der aus allen Elementen aus $\mathfrak{N}P$ mit zu p teilerfremder Ordnung besteht. Wäre $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}P$, so würde aus I, Satz 4.1 folgen, daß $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ eine eigentliche, Hallsche, charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}P$ ist, und daß jeder Normalteiler von $\mathfrak{N}P$ entweder $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ enthält oder in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ enthalten ist. Da aber $P \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ ist, so sind beide Alternativen unmöglich; und wir haben (c) aus (b) abgeleitet.

Wir schieben jetzt den Nachweis einer von der Gültigkeit der Bedingungen (a) bis (h) unabhängigen Eigenschaft ein.

(+) P *ist in keiner Komponente von σ enthalten und $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ ist eine normale, nicht-einfache Partition von* $\mathfrak{N}P$.

Da $o(X)$ ein Vielfaches von p ist, so gibt es ein Element g in G mit $X \cap P^g \neq 1$ Wäre P in der Komponente Y enthalten, so wäre auch $X \cap Y^g \neq 1$. Da σ normal und also Y^g ebenfalls eine Komponente von σ ist, so ist $X = Y^g$ und es wäre also die p-Sylow-Untergruppe P^g von G in X enthalten. Dann wäre aber $[G : X]$ und a fortiori $[\mathfrak{N}X : X]$ zu p teilerfremd, was unseren Voraussetzungen widerspricht. Also ist P in keiner Komponente von σ enthalten. Die normale Partition $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ von $\mathfrak{N}P$ ist also sicher nicht trivial. Da $P \neq 1$ ein p-Normalteiler von $\mathfrak{N}P$ und $p \neq 2$ ist, so folgt schließlich die Nicht-Einfachheit von $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ aus II, Satz A.

Wir nehmen als nächstes die Gültigkeit von (c) an. Wäre $P \neq \mathfrak{N}P$, so wäre $\mathfrak{N}P$ nicht primär. Wäre $\mathfrak{N}P$ nilpotent, so würde sich aus I, Folgerung 2.3 ergeben, daß $\mathfrak{N}P$ in einer Komponente von σ enthalten und $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ im Wider-

spruch zu (+) trivial ist. Also ist $\mathfrak{N}P$ nicht nilpotent. Da $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ eine normale, nicht-einfache Partition [wegen (+)] der nicht primären Gruppe $\mathfrak{N}P$ und wegen (c) keine Frobenius-Partition ist, so ergibt sich aus I, Satz 5.1, (c) die Existenz einer Komponente W von $\sigma \cap \mathfrak{N}P$, die ein Normalteiler von $\mathfrak{N}P$ mit Primzahlindex $[\mathfrak{N}P:W]$ ist. Aus (+) folgt, daß P nicht in W enthalten ist. Also ist $p=[\mathfrak{N}P:W]$ und $PW=\mathfrak{N}P$. Da W nicht normalisatorgleich ist, so ergibt sich aus einem Kegelschen Satz die Nilpotenz von W; vgl. KEGEL [Satz 2]. Als Produkt seiner beiden nilpotenten Normalteiler P und W ist $\mathfrak{N}P$ nilpotent; und dies ist ein Widerspruch. Also ist $P=\mathfrak{N}P$; und wir haben (d) aus (c) hergeleitet.

Es ist klar, daß (e) aus (d) folgt. Gilt (e), so folgt aus Satz A.11 die p'-Abgeschlossenheit von G, d.h. (h); und damit ist die Äquivalenz der Bedingungen (a), (b), (c), (d), (e) und (h) dargetan.

Ist G eine p'-abgeschlossene Gruppe, so ist bekanntlich $\mathfrak{N}\mathfrak{Z}P/\mathfrak{C}\mathfrak{Z}P$ eine p-Gruppe. Da aber $\mathfrak{Z}P$ von P zentralisiert wird, so gilt $\mathfrak{N}\mathfrak{Z}P=P\cdot\mathfrak{C}\mathfrak{Z}P=\mathfrak{C}\mathfrak{Z}P$; und wir haben (f) aus (a) hergeleitet. — Gilt umgekehrt (f), so ist $\mathfrak{N}P\subseteqq\mathfrak{N}\mathfrak{Z}P=\mathfrak{C}\mathfrak{Z}P$, da ja $\mathfrak{Z}P$ eine charakteristische Untergruppe von P ist. Also liegt $\mathfrak{Z}P\neq 1$ im Zentrum von $\mathfrak{N}P$, so daß $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}P\neq 1$ ist. Aus Lemma A.17 folgt dann, daß $\sigma\cap\mathfrak{N}P$ keine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}P$ ist. Damit haben wir (c) aus (f) hergeleitet und die Äquivalenz von (a), (c), (f) dargetan.

Es ist trivial, daß (g) aus (b) folgt. Ist umgekehrt R eine charakteristische Untergruppe von P mit p'-abgeschlossenem $\mathfrak{N}R$, so ist $\mathfrak{N}P\subseteqq\mathfrak{N}R$; und hieraus folgt (b), da ja Untergruppen p'-abgeschlossener Gruppen selbst p'-abgeschlossen sind. Damit ist die Äquivalenz aller Bedingungen (a) bis (h) dargetan.

ZUSATZ E.4. *Ist X eine nicht primäre Komponente der normalen, einfachen Partition σ von G und p ein ungrader gemeinschaftlicher Primteiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X:X]$, so sind die p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ elementar-abelsch der Ordnung p^2; und $\mathfrak{N}X$ ist dann und nur dann keine Hallsche Untergruppe von G, wenn die p-Sylow-Zentren zyklisch der Ordnung p sind.*

BEWEIS. Wir folgern zunächst aus Zusatz A.6, daß $[\mathfrak{N}X:X]=p$, X nilpotent ist und daß die Elemente mit zu p teilerfremder Ordnung aus X [und $\mathfrak{N}X$] eine Hallsche Untergruppe Y von G bilden.

Sei nun P eine p-Sylow-Untergruppe von G derart, daß $o(P\cap\mathfrak{N}X)$ durch p^3 teilbar ist, daß aber P nicht in $\mathfrak{N}X$ enthalten ist. Aus den bekannten Eigenschaften der p-Gruppen folgt dann die Existenz eines nicht in $\mathfrak{N}X$ enthaltenen, $P\cap\mathfrak{N}X$ normalisierenden Elements w aus P. Aus $[\mathfrak{N}X:X]=p$ folgt, daß $[P\cap\mathfrak{N}X:P\cap X]$ entweder 1 oder p ist. Also ist auch $[(P\cap\mathfrak{N}X)^w:(P\cap X)^w]=[P\cap\mathfrak{N}X:P\cap X^w]$ ein Teiler von p; und $[P\cap\mathfrak{N}X:(P\cap X)\cap(P\cap X^w)]$ ist folglich ein Teiler von p^2. Da p^3 ein Teiler von $o(P\cap\mathfrak{N}X)$ ist, so muß $X\cap X^w\neq 1$ sein; und da mit X auch X^w eine Komponente der normalen Partition σ ist, so wird $X=X^w$, so daß w zu $\mathfrak{N}X$ gehört. Dies ist ein Widerspruch, aus dem das Zwischenresultat folgt:

(+) Ist P eine p-Sylow-Untergruppe von G derart, daß p^3 ein Teiler von $o(P\cap\mathfrak{N}X)$ ist, so ist P in $\mathfrak{N}X$ enthalten.

Es gibt eine p-Sylow-Untergruppe P von G derart, daß $P \cap \mathfrak{N}X$ eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}X$ ist. Wäre p^3 ein Teiler von $o(\mathfrak{N}X)$, so wäre p^3 auch ein Teiler von $o(P \cap \mathfrak{N}X)$; und durch Anwendung von (+) ergibt sich $P \leqq \mathfrak{N}X$. Sei t ein Element aus $\mathfrak{N}P$. Aus $[\mathfrak{N}X : X] = p$ folgt zunächst $[P : P \cap X] = p$; und hieraus folgt

$$p = [P^t : (P \cap X)^t] = [P : P \cap X^t].$$

Dann ist $[P : (P \cap X) \cap (P \cap X^t)]$ ein Teiler von p^2; und da $o(P)$ ein Vielfaches von p^3 ist, so ist sicherlich $X \cap X^t \neq 1$. Da X^t mit X Komponente der normalen Partition σ ist, so wird $X = X^t$; und wir haben $\mathfrak{N}P \leqq \mathfrak{N}X$ gezeigt. Nun haben wir bereits am Anfang des Beweises die p'-Abgeschlossenheit von $\mathfrak{N}X$ [wenigstens implicite] erwähnt. Folglich ist auch die Untergruppe $\mathfrak{N}P$ von $\mathfrak{N}X$ eine p'-abgeschlossene Gruppe. Kombination der Sätze E.1 und E.3 ergibt die Nicht-Einfachheit von σ. Dies widerspricht unserer Voraussetzung. Also ist p^3 kein Teiler von $o(\mathfrak{N}X)$. Da $p = [\mathfrak{N}X : X]$ ein Teiler von $o(X)$ ist, so ist p^2 ein Teiler von $o(\mathfrak{N}X)$. Also ist p^2 die genaue Ordnung der p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}X$. Diese können nicht zyklisch sein, da die nicht in X enthaltenen p-Elemente aus $\mathfrak{N}X$ sämtlich die Ordnung p haben, und da es solche gibt. Also sind die p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ elementar-abelsch der Ordnung p^2.

Sind die p-Sylow-Zentren von G zyklisch der Ordnung p, so sind die p-Sylow-Untergruppen von G gewiß nicht abelsch, da ihre Ordnung ja wenigstens p^2 ist. Also können die p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ nicht gleichzeitig p-Sylow-Untergruppen von G sein; und $\mathfrak{N}X$ ist gewiß keine Hallsche Untergruppe von G. — Seien jetzt umgekehrt die p-Sylow-Zentren von G nicht zyklisch der Ordnung p. Es gibt eine p-Sylow-Untergruppe P von G derart, daß $P \cap \mathfrak{N}X$ eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}X$ ist. Dann ist $P \cap X$ eine p-Sylow-Untergruppe von X, da ja X ein Normalteiler von $\mathfrak{N}X$ ist. Insbesondere ist $P \cap X \neq 1$; und da X eine Komponente der normalen Partition σ von G ist, so ist $\mathfrak{Z}P \leqq \mathfrak{N}X$ wegen I, Lemma 2.5. Da $o(\mathfrak{Z}P)$ nach Voraussetzung ein Vielfaches der Ordnung p^2 der p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ ist, so folgt $\mathfrak{Z}P = P \cap \mathfrak{N}X$. Insbesondere ist $X \cap \mathfrak{Z}P = X \cap P \neq 1$; und aus I, Lemma 2.5 folgt $P \leqq \mathfrak{N}X$. Also ist die p-Sylow-Untergruppe P von G eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}X$, so daß die p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ auch p-Sylow-Untergruppen von G sind. Es ist also $([G : \mathfrak{N}X], p) = 1$. Da $\mathfrak{N}X = YP$ und Y eine Hallsche Untergruppe von G mit $(o(Y), p) = 1$ ist, so ist $\mathfrak{N}X$ eine Hallsche Untergruppe von G.

FOLGERUNG E.5. *Ist X eine nicht-primäre Komponente der normalen Partition σ von G und p ein ungrader Primteiler von $(o(X), [\mathfrak{N}X : X])$, so ist dann und nur dann $G = \mathfrak{N}X$, wenn $p^2 - 1$ und $[\mathfrak{N}P : P]$ für p-Sylow-Untergruppen P von G keinen gemeinsamen ungraden Primteiler besitzen.*

BEWEIS. Ist zunächst $G = \mathfrak{N}X$, so ist $P = \mathfrak{N}P$ für p-Sylow-Untergruppen P von G [wegen Satz E.3, (d)], woraus die Notwendigkeit unserer Bedingung folgt.

Sei umgekehrt $G \neq \mathfrak{N}X$. Es gibt eine p-Sylow-Untergruppe P von G, die X und $\mathfrak{N}X$ in p-Sylow-Untergruppen $X \cap P$ von X bzw. $P \cap \mathfrak{N}X$ von $\mathfrak{N}X$ schneidet. Es folgt aus Zusatz E.4, daß $P \cap \mathfrak{N}X$ elementar-abelsch der Ordnung p^2 ist, woraus sich $o(P \cap X) = p$ ergibt. Weiter entnehmen wir Zusatz E.4, daß entweder $o(\mathfrak{Z}P) = p$ oder $P = P \cap \mathfrak{N}X$ ist. Schließlich ergibt sich $P \neq \mathfrak{N}P$ aus Satz E.3, (d).

Aus Satz E.3 folgt wegen $G \neq \mathfrak{N}X$, daß $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$ ist. Natürlich ist $P \subseteqq \mathfrak{F}\mathfrak{N}P$. Wäre $P \neq \mathfrak{F}\mathfrak{N}P$, so wäre $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ nicht primär; und es ergäbe sich aus I, Folgerung 2.3 die Existenz einer $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ enthaltenden Komponente W von σ. Dann wäre auch P in W enthalten; und dies ist unmöglich, da einige, aber nicht alle Elemente ($\neq 1$) aus P zu X gehören. Also ist $P = \mathfrak{F}\mathfrak{N}P$; und es folgt aus I, Satz 4.1, (5), daß $1 = P \cap \mathfrak{C}t$ für jedes nicht in P enthaltene Element t aus $\mathfrak{N}P$ gilt.

Wäre $[\mathfrak{N}P : P]$ grade, so gäbe es ein Element s mit $o(s) = 2$ in $\mathfrak{N}P$. Da s nicht in P liegen kann, so folgt aus einem Resultat von BURNSIDE, daß $y^s = y^{-1}$ für jedes y aus P gilt; vgl. BURNSIDE, p. 90. Insbesondere wird also $1 \neq P \cap X$ von s normalisiert, so daß s wegen I, Lemma 2.5 zu $\mathfrak{N}X$ gehört. Wegen Zusatz A.6 ist aber X nilpotent und enthält alle Elemente aus $\mathfrak{N}X$, deren Ordnung von p verschieden ist. Folglich liegt s in X und ist mit den Elementen aus $P \cap X$ vertauschbar. Dies ist ein Widerspruch, so daß $[\mathfrak{N}P : P]$ ungrade ist.

Da $\mathfrak{Z}P$ eine charakteristische Untergruppe des Normalteilers P von $\mathfrak{N}P$ ist, so induzieren die Elemente aus $\mathfrak{N}P$ in $\mathfrak{Z}P$ eine Gruppe von Automorphismen, die im wesentlichen mit $\mathfrak{N}P/P$ identisch ist, da ja $1 = P \cap \mathfrak{C}t$ für jedes nicht in P enthaltene t aus $\mathfrak{N}P$ gilt. Nun ist, wie oben bemerkt, $\mathfrak{Z}P$ entweder zyklisch der Ordnung p oder elementar-abelsch der Ordnung p^2; und $[\mathfrak{N}P : P]$ ist also ein zu $2p$ teilerfremder Teiler der Ordnung der Automorphismengruppe von $\mathfrak{Z}P$. Folglich ist $[\mathfrak{N}P : P]$ ein von 1 verschiedener ungrader Teiler von $p^2 - 1$; und damit ist auch das Hinreichen unserer Bedingung erwiesen.

Literatur

[1] BAER, REINHOLD: Classes of finite groups and their properties. Illinois J. Math. **1**, 115–187 (1957).

[2] — Partitionen endlicher Gruppen; zitiert als I. Math. Z. **75**, 333–372 (1961).

[3] — Einfache Partitionen endlicher Gruppen mit nicht-trivialer Fittingscher Untergruppe; zitiert als II. Arch. Math. **12**, 81–89 (1960).

BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, 2nd edition. Cambridge 1911.

HALL jr., M.: The theory of groups. New York 1959.

KEGEL, O. H.: Die Nilpotenz der H_p-Gruppen. Math. Z. **75**, 373–376 (1961).

SPECHT, W.: Gruppentheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

THOMPSON, JOHN G.: Normal p-complements for finite groups. Math. Z. **72**, 332–354 (1960).

ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. Leipzig u. Berlin 1937.

Mathematisches Seminar der Universität Frankfurt am Main

(Eingegangen am 3. März 1961)

MEISTER, E.
Math. Zeitschr. 77, 38–44 (1961)

Ein Eindeutigkeitsbeweis für ein gemischtes Randwertproblem der Schwingungsgleichung

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von
ERHARD MEISTER

§ 1. Einleitung

Im Jahre 1912 hat A. SOMMERFELD [1] die bekannte Ausstrahlungsbedingung eingeführt, die die eindeutige Lösbarkeit der ersten Randwertaufgabe für die Schwingungsgleichung $\Delta\varphi + k^2 \cdot \varphi = 0$ und das Äußere eines endlichen Bereichs garantieren sollte. Zusätzlich benötigten er und W. MAGNUS [2] die Beschränktheitsbedingung $\varphi = O\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right)$ für $r \to \infty$ (n die Dimension des Raumes). In einer späteren Arbeit konnte W. MAGNUS [3] die letzte Bedingung fallen lassen. Er benutzte dabei ein berühmt gewordenes Ergebnis von F. RELLICH [4]. Es besagt, daß jede im Außenraum eines endlichen regulären Bereichs $\mathfrak{B}$ zweimal stetig differenzierbare Lösung der Schwingungsgleichung, die der allgemeinen Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{\Sigma_R} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial R} - i k \varphi \right|^2 dS = 0 \tag{1.1}$$

genügt, die Eigenschaft

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{\Sigma_R} |\varphi|^2 dS \neq 0 \tag{1.2}$$

hat, es sei denn $\varphi \equiv 0$. Σ_R bezeichne dabei eine $(n-1)$-Sphäre vom Radius R um einen festen Raumpunkt. R. LEIS [5] erweiterte diese Aussagen für das Äußere eines endlichen regulären Bereichs auf das zweite und dritte Randwertproblem.

Für ein unbeschränktes Gebiet, dessen Rand ins Unendliche läuft, sind noch längst nicht entsprechende Resultate erzielt worden. Der oben erwähnte Satz von RELLICH gilt aber auch — wie er selbst in der genannten Arbeit gezeigt hat — für paraboloidähnliche, unendliche Gebiete. In neuerer Zeit haben D. S. JONES [6] und W. L. MIRANKER [7] Eindeutigkeitstheoreme für spezielle (konische) unbeschränkte Gebiete bewiesen. Die Integration in (1.1) ist dann nur über den Durchschnitt des Gebietes mit der Hyperkugel Σ_R zu erstrecken. Andererseits haben RELLICH [8] und JONES [l.c.] gezeigt, daß es unendliche Gebiete gibt, zu denen die Schwingungsgleichung bei homogenen Randbedingungen Punkteigenwerte hat, wenn man die Ausstrahlungsbedingung fallen läßt.

In der Aerodynamik oder Beugungstheorie stößt man auf Randwertprobleme für $\Delta\varphi + k^2 \cdot \varphi = 0$, bei denen die Ränder der betrachteten Gebiete

sog. Gitter mit periodischer Struktur sind. Wir werden sie noch genau definieren. Die bisher bekanntgewordenen Eindeutigkeitssätze lassen sich nicht hier anwenden. Im folgenden Abschnitt soll die eindeutige Lösbarkeit eines gemischten Randwertproblems bewiesen werden.

§ 2. Eindeutigkeitssatz für ein gemischtes Randwertproblem

Wir wollen beweisen den folgenden

SATZ. VOR.: $\varphi(x, y)$ *sei eine zweimal stetig differenzierbare, komplexwertige Funktion in dem Gittergebiet* $\mathfrak{G}$ *mit* $\partial\mathfrak{G} = \{(x, y) \mid 0 \leqq x < \infty,\ y = n \cdot T,\ n$ *ganz,* $T > 0$ *fest*$\}$. *Sie genüge dort den Bedingungen:*

1. $\Delta\varphi + k^2 \cdot \varphi = 0, \quad k >$
2. $\varphi(x, y + n \cdot T) = e^{i n \delta} \cdot \varphi(x, y)$ *mit ganzem* n *und festem* $0 \leqq \delta < 2\pi$.
3. a) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, n \cdot T \pm 0) = 0$ *für* $0 < x < 1$
   b) $\varphi(x, n \cdot T \pm 0) = 0$ *für* $1 < x < \infty$ $\Big\}$ n *ganz.*
4. a) $\operatorname{grad}\varphi = O\left(\left[x^2 + (y - n \cdot T)^2\right]^{-\mu/2}\right)$ *für* $(x, y) \to (0, n \cdot T)$ *mit* $0 \leqq \mu < 1$, n *ganz.*
   b) $\operatorname{grad}\varphi = O(1)$ *für* $(x, y) \to (1, n \cdot T)$, n *ganz.*
5. φ *und* $\operatorname{grad}\varphi = O(1)$ *für* $|x| \to \infty$ *und* φ *enthalte nur solche Terme, die auslaufenden Wellen entsprechen.*

BEH.: $\varphi \equiv 0$ *in* $\mathfrak{G}$.

BEWEIS. Zur Abkürzung führen wir ein:

$$\mathfrak{S}_- \overset{\text{Def.}}{=} \{(x, y) \mid -\infty < x < 0,\ 0 < y < T\}, \tag{2.1a}$$

$$\mathfrak{S}_0 \overset{\text{Def.}}{=} \{(x, y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < T\}, \tag{2.1b}$$

$$\mathfrak{S}_+ \overset{\text{Def.}}{=} \{(x, y) \mid 1 < x < \infty,\ 0 < y < T\}. \tag{2.1c}$$

Auf Grund der Periodizitätsbedingung 2. reicht es aus zu zeigen, daß $\varphi \equiv 0$ ist in $\overline{\mathfrak{S}}_- \cup \overline{\mathfrak{S}}_0 \cup \overline{\mathfrak{S}}_+$. Wir wollen zunächst in einem Lemma Darstellungen von φ, das 1. bis 5. genügt, in den drei Gebieten $\mathfrak{S}$ angeben.

LEMMA. *Genügt* φ *den im Satz geforderten Eigenschaften, dann läßt es sich darstellen in der Form*

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cdot \exp\left[x \cdot \sqrt{\left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2 - k^2} + i\, y \frac{2\pi n + \delta}{T}\right], \quad (x, y) \in \mathfrak{S}_-, \tag{2.2a}$$

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Bigg\{ & C_n \cdot \exp\left[(x - 1)\sqrt{\left(\frac{\pi n}{T}\right)^2 - k^2}\right] + \\ & + D_n \cdot \exp\left[-x\sqrt{\left(\frac{\pi n}{T}\right)^2 - k^2}\right]\Bigg\} \cos\frac{\pi n y}{T}, \quad (x, y) \in \mathfrak{S}_0, \end{aligned}\right. \tag{2.2b}$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \cdot \exp\left[-(x - 1)\sqrt{\left(\frac{\pi n}{T}\right)^2 - k^2}\right] \cdot \sin\frac{\pi n y}{T}, \quad (x, y) \in \mathfrak{S}_+. \tag{2.2c}$$

Die Quadratwurzeln sind positiv für positive Radikanden und positiv imaginär für negative Radikanden, wenn wir $e^{i\omega t}$ als Zeitfaktor wählen. $A_n, \ldots, E_n$ sind Konstanten. Die Reihen konvergieren absolut und gleichmäßig in jedem kompakten Teilbereich.

BEWEIS DES LEMMAS. a) Da $\partial\mathfrak{G}$ in $x \geqq 0$ liegt, so muß $\varphi(x, y)$ in $x < 0$ zweimal stetig differenzierbare Lösung der Schwingungsgleichung sein. Da die Bedingung 2. von x unabhängig ist in dieser Halbebene, versuchen wir spezielle Lösungen mittels der Methode der Separation zu finden. Mit dem Ansatz $\varphi(x, y) = \psi(x) \cdot \chi(y)$ gewinnen wir aus $\Delta\varphi + k^2 \cdot \varphi = 0$ die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\psi''(x) - (\lambda^2 - k^2)\psi(x) = 0 \quad \text{in } x < 0, \tag{2.3a}$$

$$\chi''(y) + \lambda^2 \chi(y) = 0 \quad \text{in } -\infty < y < +\infty. \tag{2.3b}$$

Die Periodizitätsbedingung 2. für $\varphi(x, y)$ führt insbesondere zu den Relationen $\varphi(x, T) - e^{i\delta} \cdot \varphi(x, 0) = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, T) - e^{i\delta} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = 0$ für $x < 0$. Diese beiden Gleichungen liefern mit (2.3b) für $\chi(y)$ in $0 \leqq y \leqq T$ ein selbstadjungiertes Eigenwertproblem zu den Randbedingungen

$$\chi(T) - e^{i\delta} \cdot \chi(0) = 0, \tag{2.4a}$$

$$\chi'(T) - e^{i\delta} \cdot \chi'(0) = 0. \tag{2.4b}$$

Die allgemeine Lösung von (2.3b) ist $\chi(y) = A \cdot e^{i\lambda y} + B \cdot e^{-i\lambda y}$. Die Bedingungen (2.4) ergeben nur dann nichttriviale Lösungen, die Eigenfunktionen $\chi_n^-(y)$, wenn $\lambda = (2\pi n + \delta)/T$ ist mit ganzzahligem n.

$$\chi_n^-(y) = \exp\left[i\, y \cdot \frac{2\pi n + \delta}{T}\right]. \tag{2.5}$$

Diese Funktionen sind für $-\infty < y < +\infty$ beliebig oft differenzierbar und genügen der Bedingung $\chi(y + m \cdot T) = e^{im\delta} \cdot \chi(y)$. Sie bilden dann im Raume $L_2(0, T)$ ein vollständiges Orthogonalsystem mit der Eigenschaft, daß sich jede in $0 \leqq y \leqq T$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, die den Randbedingungen genügt, in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den $\chi_n^-(y)$ entwickeln läßt (KAMKE [9]). Das gilt insbesondere für φ, also

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \cdot \exp\left[i\, y\, \frac{2\pi n + \delta}{T}\right].$$

Diese Reihe ist in $x < 0$ sogar beliebig oft stetig differenzierbar als Lösung der Schwingungsgleichung. Setzen wir die Reihe in diese ein, so folgt durch Koeffizientenvergleich, daß $\psi_n(x)$ der Gl. (2.3a) mit $\lambda = (2\pi n + \delta)/T$ genügt, d.h. es ist

$$\psi_n(x) = A_n \cdot \exp\left[x \cdot \sqrt{\left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2 - k^2}\right] + B_n \cdot \exp\left[-x\sqrt{\left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2 - k^2}\right] \tag{2.6}$$

für ganzzahlige n. Die Bedingung 5. des Satzes fordert $B_n = 0$, wenn die Quadratwurzel positiv imaginär gewählt wird für negative Radikanden. Setzen wir dann $\psi_n(x)$ oben ein, so resultiert die Reihe (2.2a).

b) Im Gebiet $\mathfrak{S}_0$ erhalten wir durch Separation für $\chi(y)$ das selbstadjungierte Eigenwertproblem

$$\chi''(y) + \lambda^2 \cdot \chi(y) = 0 \quad \text{in} \quad 0 \leqq y \leqq T \quad \text{mit} \tag{2.7a}$$

$$\chi'(0) = \chi'(T) = 0 \tag{2.7b}$$

mit den Eigenfunktionen

$$\chi_n^0(y) = \cos \frac{\pi n y}{T}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.8}$$

Analoge Überlegungen wie im Fall a) führen dazu, daß sich φ in $\mathfrak{S}_0$ in die Reihe (2.2b) entwickeln läßt, die dort absolut und gleichmäßig in jedem Kompaktum konvergiert. Es ist nur zu beachten, daß jetzt keine Bedingung 5. des Satzes wirksam wird, so daß die C_n und D_n erscheinen.

c) Im Gebiet $\mathfrak{S}_+$ schließlich lautet das selbstadjungierte Eigenwertproblem für das separierte $\chi(y)$:

$$\chi''(y) + \lambda^2 \cdot \chi(y) = 0 \quad \text{in} \quad 0 \leqq y \leqq T \quad \text{mit} \tag{2.9a}$$

$$\chi(0) = \chi(T) = 0 \tag{2.9b}$$

mit den Eigenfunktionen

$$\chi_n^+(y) = \sin \frac{\pi n y}{T}; \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{2.10}$$

Hieraus resultiert dann analog wie in a) die Entwicklung (2.2c)

Fortsetzung des Beweises des Satzes: Sei $\frac{\pi r}{T} \leqq k < \frac{\pi (r+1)}{T}$ mit festem $r = 0, 1, 2, \ldots$. In der Entwicklung (2.2c) sind dann in den r Termen am Anfang die Radikanden negativ. Wir schreiben daher für $(x, y) \in \mathfrak{S}_+$:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{r} E_n \cdot \exp\left[-i(x-1) \cdot \sqrt[+]{k^2 - \left(\frac{\pi n}{T}\right)^2} \right] \cdot \sin \frac{\pi n y}{T} + \varphi_\varepsilon^+ \tag{2.11}$$

mit φ_ε^+ und grad $\varphi_\varepsilon^+ = O(e^{-\varepsilon x})$ für $x \to +\infty$ in $0 \leqq y \leqq T$ gleichmäßig. Hierbei ist $\varepsilon = \sqrt[+]{\frac{\pi^2 (r+1)^2}{T^2} - k^2} > 0$. Wegen $0 \leqq \delta < 2\pi$ sind dann die Wurzeln in der Entwicklung (2.2a) positiv, für die $n \geqq \left[\frac{kT - \delta}{2\pi}\right] + 1 \overset{\text{Def.}}{=} N + 1$ bzw. $n \leqq -\left[\frac{kT + \delta}{2\pi}\right] - 1 \overset{\text{Def.}}{=} -M - 1$. Für $(x, y) \in \mathfrak{S}_-$ können wir daher schreiben

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=-M}^{N} A_n \cdot \exp\left[i x \cdot \sqrt[+]{k^2 - \left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2} \right] \cdot \exp\left[i y \frac{2\pi n + \delta}{T} \right] + \varphi_\varepsilon^- \tag{2.12}$$

mit φ_ε^- und grad $\varphi_\varepsilon^- = O(e^{\varepsilon x})$ für $x \to -\infty$ in $0 \leqq y \leqq T$ gleichmäßig mit $\varepsilon = \min_{\nu \cdots > 0} \sqrt{\left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2 - k^2} > 0$.

Sei nun $\mathfrak{S}_{L_1 L_2}$ das Rechteck $-L_1 \leqq x \leqq L_2$, $0 \leqq y \leqq T$ mit $L_1 > 0$, $L_2 > 1$. Wir wenden den ersten Greenschen Satz auf φ und $\overline{\varphi}$ an und erhalten

$$\iint_{\mathfrak{S}_{L_1 L_2}} (\varphi \, \Delta \overline{\varphi} + |\operatorname{grad} \varphi|^2) \, dx \, dy - \int_{\partial \mathfrak{S}_{L_1 L_2}} \varphi \cdot \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n} \, ds = 0. \tag{2.13}$$

Dabei sei $\mathfrak{S}^*_{L_1 L_2}$ aus $\mathfrak{S}_{L_1 L_2}$ dadurch entstanden, daß wir bei den Punkten $(x, y) = (0, 0)$ und $(0, T)$ beliebig kleine Halbkreisscheiben ausgelassen haben. Wegen $\Delta \bar{\varphi} = -k^2 \cdot \bar{\varphi}$ und der Bedingung 4.a) dürfen wir $\mathfrak{S}^*_{L_1 L_2}$ durch $\mathfrak{S}_{L_1 L_2}$ ersetzen und erhalten

$$(2.14) \qquad \iint\limits_{\mathfrak{S}_{L_1 L_2}} \left(-k^2 \cdot |\varphi|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2\right) dx\, dy - \int\limits_{\partial \mathfrak{S}_{L_1 L_2}} \varphi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n}\, ds = 0.$$

Die Beiträge im Randintegral, die von den Strecken $y=0$ bzw. $y=T$, $-L_1 \leqq x \leqq L_2$ herrühren, verschwinden, da für $0 < x < 1$ $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = 0$ ist, für $1 < x \leqq L_2$ $\varphi = 0$ ist nach Bedingung 3.a) und b), und auf $-L_1 \leqq x < 0$ gilt wegen Bedingung 2.:

$$(2.15) \qquad \begin{cases} -\int\limits_{-L_1}^{0} \varphi(x,0) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}(x,0)\, dx + \int\limits_{0}^{-L_1} \varphi(x,T) \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}(x,T) \cdot (-dx) \\ = -\int\limits_{-L_1}^{0} \left\{ \varphi(x,0) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}(x,0) - e^{i\delta} \cdot \varphi(x,0)\, e^{-i\delta} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}(x,0) \right\} dx = 0. \end{cases}$$

Wir berechnen nun die Beiträge über die vertikalen Randstücke:

$$(2.16a) \qquad \int\limits_{0}^{T} \varphi(L_2, y) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}(L_2, y)\, dy = \frac{iT}{2} \sum_{n=1}^{r} |E_n|^2 \cdot \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{T}\right)^2} + O(e^{-\varepsilon L_2})$$

für $L_2 \to +\infty$ und

$$(2.16b) \qquad \begin{cases} -\int\limits_{0}^{T} \varphi(-L_1, y) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}(-L_1, y)\, dy \\ = iT \cdot \sum_{n=-M}^{N} |A_n|^2 \cdot \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2} + O(e^{-\varepsilon L_1}) \end{cases}$$

für $L_1 \to +\infty$.

Lassen wir nun $L_1, L_2 \to +\infty$ streben, so erhalten wir aus (2.14):

$$\lim_{L_1, L_2 \to \infty} \left\{ \iint\limits_{\mathfrak{S}_{L_1 L_2}} \left[-k^2 |\varphi|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2\right] dx\, dy - \right.$$
$$\left. - \frac{iT}{2} \sum_{n=1}^{r} |E_n|^2 \cdot \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{T}\right)^2} - iT \cdot \sum_{n=-M}^{N} |A_n|^2 \cdot \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2} \right\} = 0.$$

Da die Summen rechts von L_1, L_2 nicht abhängen und rein imaginär sind, das Doppelintegral aber reell, so müssen die Grenzwerte getrennt existieren und es muß sein,

$$(2.17a) \qquad \begin{cases} \iint\limits_{\mathfrak{S}} \left[-k^2 |\varphi|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2\right] dx\, dy = 0 \\ \text{mit} \quad \mathfrak{S} = \{(x, y) | -\infty < x < +\infty,\ 0 < y < T\}, \end{cases}$$

$$(2.17b) \qquad \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{r} |E_n|^2 \cdot \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{T}\right)^2} + T \cdot \sum_{n=-M}^{N} |A_n|^2 \cdot \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2} = 0.$$

Wenn keine Wurzel verschwindet, dann resultiert aus (2.17b) $E_n=0$ für $n=1,\dots,r$ und $A_n=0$ für $n=-M,\dots,N$. Ist $k=\pi r/T$, dann könnte zunächst $E_r\neq 0$ sein, ebenso für $k=(2\pi N+\delta)/T$ $A_N\neq 0$ und für $k=(-2\pi M+\delta)/T$ $A_{-M}\neq 0$ sein könnten. Stets müssen jedoch $E_n=0$ für $n=1,\dots,r-1$ und $A_n=0$ für $n=-M+1,\dots,N-1$ sein. In den Ausnahmefällen ist

$$\varphi(x,y)=E_r\cdot\sin\frac{\pi r y}{T}+\varphi_e^+\quad\cdot(x,y)\in\mathfrak{S}_+$$

$$\varphi(x,y)=A_{-M}\cdot\exp\left[i y\cdot\frac{-2\pi M+\delta}{T}\right]+A_N\cdot\exp\left[i y\cdot\frac{2\pi N+\delta}{T}\right]+\varphi_e^-\quad(x,y)\in\mathfrak{S}_-.$$

Die durch E_r, A_{-M}, A_N gekennzeichneten Terme stellen aber keine ins Unendliche auslaufenden Wellentypen sondern stehende dar. Die Bedingung 5. des Satzes schließt diese aber aus, so daß: $E_r=0$, $A_{-M}=A_N=0$ sein müssen. $\varphi(x,y)$ verhält sich dann für $|x|\to\infty$ wie $O(e^{-\varepsilon|x|})$ gleichmäßig in $0\leqq y\leqq T$.

Für $x\neq 0$ und 1 gilt wegen der Stetigkeit von φ und grad φ dort *):

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\int_0^T\left[\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2-\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2+k^2|\varphi|^2\right]dy\\
&=2\int_0^T\left[\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}\right)-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial y}\right)+k^2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}\cdot\varphi\right)\right]dy\\
&=-2\,\mathrm{Re}\int_0^T\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial y}\right]dy\quad\text{wegen}\quad\Delta\varphi+k^2\varphi=0\\
&=-2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial y}\right\}\Bigg|_{y=0}^{T}+2\,\mathrm{Re}\int_0^T\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial y^2}\right]dy\\
&=2\,\mathrm{Re}\int_0^T\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial y}\right]dy=0.
\end{aligned}\tag{2.18}$$

Der integralfreie Ausdruck verschwindet für $x<0$ wegen Bedingung 2., in $0<x<1$ wegen Bedingung 3.a) und in $x>1$ wegen Bedingung 3.b). Wir haben damit bewiesen

$$\int_0^T\left[\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2-\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2+k^2|\varphi|^2\right]dy=\begin{cases}c_- & \text{in } x<0\\ c_0 & \text{in } 0<x<1\\ c_+ & \text{in } x>1.\end{cases}\tag{2.19}$$

Für $|x|\to\infty$ strebt aber der Integrand gleichmäßig gegen Null, so daß $c_-=c_+=0$ sein müssen. $\varphi(x,y)$ verhält sich einschließlich seiner Ableitungen auf $x=1$, $0<y<T$ stetig und φ und grad φ bleiben dort wegen Bedingung 4.b) beschränkt, so daß sich die Integrale (2.19) für $x\to 1-0$ und $x\to 1+0$ stetig anschließen müssen, d.h. $c_0=c_+=0$ notwendig. Für $x=0$ können wir diesen

*) Man wähle zunächst $\int_\eta^{T-\eta}$ mit $0<\eta<T/2$ und lasse dann $\eta\to+0$ streben.

Schluß nicht benutzen, da für $\mu \geqq \frac{1}{2}$ nach Bedingung 4.a) der Integrand von (2.19) auf $x=0$ nicht mehr integrabel zu sein braucht. Die Bedingung 4.b) könnten wir abschwächen zu der Forderung quadratischer Integrabilität von grad φ auf $x=1$. Da φ und grad φ für $|x| \to \infty$ exponentiell abklingen, so können wir (2.19) von $-\infty$ bis $+\infty$ bezüglich x integrieren und erhalten

$$\iint_{\mathfrak{S}} \left[\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 - \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 + k^2 \cdot |\varphi|^2 \right] dx\, dy = 0. \tag{2.20}$$

Addieren wir diese Gleichung zu (2.17a), so resultiert

$$2 \cdot \iint_{\mathfrak{S}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 dx\, dy = 0, \tag{2.21}$$

was wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ in $\mathfrak{S}$ nur für $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv 0$ in $\mathfrak{S}$ möglich ist, d.h. $\varphi(x, y) = \Phi(y)$. Als Lösung der Schwingungsgleichung muß dann aber für Φ gelten:

$$\Phi(y) = a \cdot e^{iky} + b \cdot e^{-iky}. \tag{2.22}$$

Es muß aber $a=b=0$ sein, da sonst $\Phi(y)$ für $|x| \to \infty$ nicht exponentiell abklingt. Damit haben wir also $\varphi(x, y) = 0$ gezeigt.

Entsprechende Sätze kann man auch beweisen für analoge zylindersymmetrische Gebiete, bei denen konzentrische Halbzylinder als Berandungen auftreten.

Literatur

[1] SOMMERFELD, A.: Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. Jahresb. d. dtsch. Math. Ver. **21**, 309 (1912).

[2] MAGNUS, W.: Über Eindeutigkeitsfragen bei einer Randwertaufgabe von $\Delta u + k^2 u = 0$. Jahresb. d. dtsch. Math. Ver. **52**, 177 (1942).

[3] — Fragen der Eindeutigkeit und des Verhaltens im Unendlichen für Lösungen von $\Delta u + k^2 \cdot u = 0$. Abhdl. d. math. Sem. Univ. Hamburg **16**, 77 (1949).

[4] RELLICH, F.: Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda \cdot u = 0$ in unendlichen Gebieten. Jahresb. d. dtsch. Math. Ver. **53**, 57 (1943).

[5] LEIS, R.: Über das Neumannsche Randwertproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung. Arch. Rational. Mech. Anal. **2**, 107 (1958).

[6] JONES, D. S.: The eigenvalues of $\Delta u + \lambda \cdot u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains. Proc. Cambridge Phil. Soc. **49**, 668 (1953).

[7] MIRANKER, W. L.: Uniqueness and representation theorems for solutions of $\Delta u + k^2 \cdot u = 0$ in infinite domains. J. Math. Mech. **6**, 847 (1957).

[8] RELLICH, F.: Das Eigenwertproblem von $\Delta u + \lambda \cdot u = 0$ in Halbröhren. Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, Jan. 8th, 1948, S. 329. New York: Interscience Publishers.

[9] KAMKE, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. 1, S. 261. Leipzig 1944.

Institut für Mathematik der Universität des Saarlandes

(Eingegangen am 6. März 1961)

MÜLLER, D.
Math. Zeitschr. 77, 45–62 (1961)

Verbandsgruppen und Durchschnitte endlich vieler Bewertungsringe

Herrn FRIEDRICH-KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von
DIETRICH MÜLLER

Vorwort

Die vorliegende Arbeit baut auf Gedanken von KRULL [3] und LORENZEN [4] zur multiplikativen Idealtheorie auf. Der Krull-Ribenboimsche Unabhängigkeitssatz der allgemeinen Bewertungstheorie wird in die Theorie der Verbandsgruppen übertragen, indem statt Bewertungen eines Körpers, Bewertungen gewisser Verbandsgruppen[1]) betrachtet werden. Dabei ergibt sich ein konstruktiver Überblick über die Klasse der Verbandsgruppen mit endlich vielen minimalen isolierten Untergruppen. Es wird eine Übersicht über die Ideale einer solchen Gruppe gegeben und die Theorie ihrer isolierten Komponentenideale entwickelt. Sämtliche dabei gewonnenen Ergebnisse lassen sich mit Hilfe des Unabhängigkeitssatzes auf die Idealtheorie des Durchschnitts endlich vieler allgemeiner Bewertungsringe übertragen.

Abschnitt I bringt eine kurze Übersicht über die verwendeten Begriffe. In der Terminologie haben wir uns im wesentlichen an [4] angeschlossen.

In II wird der von W. KRULL stammende Begriff des Schichtensystems $\mathfrak{W}$ einer Menge von totalgeordneten Gruppen dargestellt, und zwar in gegenüber [3] vereinfachtem Aufbau. $\mathfrak{W}$ besteht aus einer endlichen Menge totalgeordneter „Basisgruppen" $V_1, \ldots, V_n$ und aus gewissen kanonisch totalgeordneten Quotientengruppen der V_i, die jeweils gemeinsame Quotientengruppen mindestens zweier Basisgruppen sind. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ heißt „restgebunden bezüglich $\mathfrak{W}$", wenn stets α_i und α_k in gemeinsamen Quotientengruppen von V_i und V_k, die zu $\mathfrak{W}$ gehören, dasselbe Element repräsentieren. Die Menge der restgebundenen Elemente von $V_1 \times \cdots \times V_n$ bildet eine Verbandsgruppe V^* mit endlich vielen minimalen isolierten Untergruppen. Ihre Struktur wird ebenfalls in II untersucht.

W. KRULL vermutete in [3], daß alle Verbandsgruppen V mit endlich vielen minimalen isolierten Untergruppen $E_1, \ldots, E_n$ als eine solche Gruppe V^* vorkommen, genauer, daß V kanonisch isomorph zu der größten restgebundenen Untergruppe V^* von $V/E_1 \times \cdots \times V/E_n$ wird, und zwar bezüglich eines in natürlicher Weise zu V gehörigen Schichtensystems. Die Richtigkeit dieser Vermutung wird in III bewiesen[2]).

[1]) Ordnungshomomorphismen auf totalgeordnete Gruppen. Terminologie nach P. JAFFARD [1].

[2]) Frühere Beweise finden sich bereits in meiner Staatsexamensarbeit (März 1957) und meiner Dissertation [5]. Aus einer brieflichen Mitteilung geht hervor, daß P. JAFFARD unabhängig davon Beweise dieser Vermutung gefunden hat.

In IV wird ein Überblick über die Ideale von V dadurch gewonnen, daß auf die Idealtheorie in $V/E_1, \ldots, V/E_n$ zurückgegriffen wird. Der Begriff des restgebundenen Elements $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V/E_1 \times \cdots \times V/E_n$ wird auf Systeme $(A_1, \ldots, A_n)$ übertragen, wobei A_i die Menge der Repräsentanten eines Ideals von V/E_i ist. Die Ideale A von V und die verträglichen Systeme $(A_1, \ldots, A_n)$ entsprechen sich umkehrbar eindeutig, wobei $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ist, und A_i die Menge der Repräsentanten des von A in V/E_i erzeugten Ideals darstellt. Daneben wird in diesem Abschnitt eine Theorie der isolierten Komponentenideale der Ideale von V entwickelt.

$\mathfrak{D}$ sei der Durchschnitt endlich vieler beliebiger Bewertungsringe $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ eines Körpers $\mathfrak{K}$. Die Hauptidealgruppe von $\mathfrak{D}$ heiße $\mathfrak{H}$. V_i sei die zu $\mathfrak{B}_i$ gehörende Wertgruppe. Dann ergibt sich wieder in natürlicher Weise zu $V_1 \times \cdots \times V_n$ ein Schichtensystem $\mathfrak{W}$, da die Wertgruppen V_i zu Bewertungen desselben Körpers $\mathfrak{K}$ gehören. Der Krull-Ribenboimsche Unabhängigkeitssatz vermittelt den kanonischen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{H}$ und V^*, der größten bezüglich $\mathfrak{W}$ restgebundenen Untergruppe von $V_1 \times \cdots \times V_n$. In Abschnitt V wird über die bisher bekannten Ergebnisse hinaus gezeigt, daß durch diesen Isomorphismus die Ideale von $\mathfrak{D}$ und die Ideale von V^* einander eindeutig umkehrbar zugeordnet werden, so daß sich sämtliche idealtheoretischen Sätze von V^* auf $\mathfrak{D}$ übertragen lassen und umgekehrt. Damit ist die Idealtheorie des Durchschnitts endlich vieler beliebiger Bewertungsringe abgeschlossen[3]).

I. Vorbemerkungen zur Theorie der Verbandsgruppen

Wir stellen in diesem Abschnitt die zum Folgenden notwendigen Definitionen und Sätze aus der Theorie der Verbandsgruppen zusammen. In der Terminologie haben wir uns dabei LORENZEN [4] angeschlossen.

Geordnete Mengen

Wir verstehen unter einer Ordnung in einer Menge $M = \{a, b, c, \ldots\}$ eine Relation $\leqq$ mit:

$$a \leqq a \quad \text{für alle} \quad a \in M$$

$$a \leqq b, \quad b \leqq c \Rightarrow a \leqq c$$

$$a \leqq b, \quad b \leqq a \Rightarrow a = b.$$

Falls für $a, b \in M$ stets $a \leqq b$ oder $b \leqq a$ gilt, sprechen wir von einer Totalordnung in M.

---

[3]) Die in Abschnitt II und III dieser Arbeit dargestellten Ergebnisse finden sich inhaltlich bereits in meiner Dissertation [5]. Die Abschnitte IV und V sind zu [5] neu dazu gekommen. Andererseits werden in [5] auch Systeme unendlich vieler Bewertungen eines Körpers betrachtet.

Herrn Professor W. KRULL verdanke ich viele wertvolle Anregungen und Ratschläge zu der vorliegenden Arbeit.

Geordnete Gruppen

Obwohl wir in dieser Arbeit stets nur kommutative Gruppen betrachten werden, verwenden wir die multiplikative Schreibweise. Eine Gruppe G heißt geordnet, wenn ihre Elemente eine geordnete Menge bilden und

$$a \leqq b \Rightarrow x\,a \leqq x\,b \quad \text{für beliebige} \quad x \in G$$

gilt.

G heißt totalgeordnet, wenn die Ordnung ihrer Elemente eine Totalordnung ist.

In G gilt genau dann $a \leqq b$, wenn $a\,b^{-1} \leqq 1$ ist.

Die Elemente $a \in G$ mit $a \geqq 1$ bilden eine Unterhalbgruppe[4]) R von G.

Verbandsgruppen

Eine geordnete Gruppe V heißt Verbandsgruppe, wenn ihre Ordnung einen Verband bildet. In Verbandsgruppen gilt

$$a \wedge b = (a^{-1} \vee b^{-1})^{-1}, \qquad a \vee b = (a^{-1} \wedge b^{-1})^{-1},$$
$$x(a \wedge b) = x\,a \wedge x\,b, \qquad x(a \vee b) = x\,a \vee x\,b.$$

Ferner gelten die Distributivgesetze:

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) = (a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d)$$
$$(a \vee b) \wedge (c \vee d) = (a \wedge c) \vee (a \wedge d) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge d).$$

Prime vollständige Unterhalbgruppen

Eine Unterhalbgruppe S von R heißt vollständig, wenn für alle $a, b \in R$ gilt:

$$a \leqq b, \quad b \in S \Rightarrow a \in S.$$

Eine vollständige Unterhalbgruppe S von R heißt prim, wenn für alle $a, b \in R$ gilt:

$$a \notin S, \quad b \notin S \Rightarrow a \wedge b \notin S.$$

Falls die 1 selbst eine prime vollständige Unterhalbgruppe ist, ist V totalgeordnet. In jedem Fall gibt es minimale prime vollständige Unterhalbgruppen[5]).

SATZ 1. *$S^1, \ldots, S^n$ seien endlich viele prime vollständige Unterhalbgruppen von R und $D = \bigcap_{i=1}^{n} S^i$. Dann gilt für jede prime vollständige Unterhalbgruppe S von R mit $S \supseteq D$ auch $S \supseteq S^i$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

BEWEIS. Wenn die Behauptung falsch wäre, gäbe es für alle $i = 1, \ldots, n$ jeweils ein $a_i \in S^i$ mit $a_i \notin S$. Dann wäre zwar $a = a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in D$, aber $a \notin S$.

[4]) Unterhalbgruppen mögen stets die $1 \in G$ enthalten.

[5]) Ist S eine prime vollständige Unterhalbgruppe von R, so ist $R - S$ ein Filter in R. S ist genau dann minimal, wenn $R - S$ ein Ultrafilter von R ist. Man könnte also statt von minimalen primen vollständigen Unterhalbgruppen von R auch von Antiultrafiltern in R sprechen.

Zu jeder primen vollständigen Unterhalbgruppe S von R gehört die durch S erzeugte und dadurch eindeutig bestimmte Untergruppe E von V. Es ist $E=\{a_1a_2^{-1}|\,a_1, a_2\in S\}$. E heißt die durch S erzeugte isolierte Untergruppe[6]). Wir werden stets die durch $S^{\cdots}$ erzeugte Gruppe mit $E^{\cdots}$ bezeichnen. Die Beziehung zwischen S und E ist umkehrbar eindeutig, denn es gilt

SATZ 2. $S=E\cap R$.

BEWEIS. $S\subseteqq E\cap R$ ist klar.

Es sei $c\in E\cap R$. Dann ist $e=a_1a_2^{-1}$ mit $a_1, a_2\in S$, also $e\cdot a_2\in S$. Aus $1\leqq e\leqq ea_2$ folgt $e\in S$ und damit $S\supseteqq E\cap R$.

Für jede prime vollständige Unterhalbgruppe S von R gilt

SATZ 3. *V/E ist in kanonischer Weise totalgeordnet*[7]). *Die (primen*[8])*) vollständigen Unterhalbgruppen $\bar{S}'$ von $R\cdot E/E$ und die primen vollständigen Unterhalbgruppen S' von R mit $S'\supseteqq S$ entsprechen sich umkehrbar eindeutig, wobei die Beziehung $\bar{S}'=S'\cdot E/E$ gilt.*

Die Menge der primen vollständigen Unterhalbgruppen S' von R mit $S'\supseteqq S$ ist gemäß der Relation $\subseteqq$ totalgeordnet.

BEWEIS. Für den ersten Teil des Beweises können wir auf JAFFARD [*1*] oder LORENZEN [*4*] verweisen.

Ferner ist zunächst klar, daß mit S' auch $\bar{S}'=S'\cdot E/E$ prime vollständige Unterhalbgruppe ist. Aus $S'\supseteqq S$ und der Vollständigkeit von S' folgt $S'\cdot E\cap R=S'$; d.h. $S'=\{s\in R|\,\bar{s}\in\bar{S}'\}$. Ist umgekehrt $\bar{S}'$ prime vollständige Unterhalbgruppe von $R\cdot E/E$, dann sei $S'=\{s\in R|\,\bar{s}\in\bar{S}'\}$. Es gilt $S'\supseteqq S$, und man sieht, daß S' wieder prime vollständige Unterhalbgruppe ist. Außerdem gilt $S'\cdot E/E=\bar{S}'$.

Da die vollständigen Unterhalbgruppen einer totalgeordneten Gruppe stets gemäß $\subseteqq$ totalgeordnet sind, folgt der letzte Teil des Satzes aus den vorhergehenden.

II. Schichtensysteme totalgeordneter Gruppen; direkte Produkte mit Restbindungen

Unter einem Schichtensystem $\mathfrak{W}$ totalgeordneter Gruppen verstehen wir ein Paar $(\mathfrak{M}, \Phi)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\mathfrak{M}=\{W_0^0; W_1^1, \ldots, W_{k_1}^1; \ldots; W_1^l, \ldots, W_{k_l}^l\}$$
$$\Phi=\{\varphi_1^1, \ldots, \varphi_{k_1}^1; \ldots; \varphi_1^l, \ldots, \varphi_{k_l}^l\}.$$

a) Die W_i^s sind totalgeordnete Gruppen.

b) W_0^0 ist die nur aus dem Einselement bestehende Gruppe.

c) Die k_i sind ganze Zahlen mit $k_i\geqq 1$ für $i=1, \ldots, l$.

d) φ_i^s ist *echter* Ordnungshomomorphismus von W_i^s auf ein W_i^{s-1}.

[6]) Terminologie nach JAFFARD [*1*].

[7]) Das bedeutet: Für $\bar{a}\in V/E$ gilt genau dann $\bar{a}\geqq\bar{1}$, wenn es einen Repräsentanten a von $\bar{a}$ mit $a\geqq 1$ gibt.

[8]) Wegen der Totalordnung von V/E ist jede vollständige Unterhalbgruppe von $R\cdot E/E$ prim.

e) Falls für $s \geqq 2$ die Gruppe W_t^{s-1} Bild einer Gruppe $W_{t'}^s$ unter $\varphi_{t'}^s$ ist, dann gibt es auch eine Gruppe $W_{t''}^s$ mit $t'' \neq t'$ derart, daß W_t^{s-1} auch Bild von $W_{t''}^s$ unter $\varphi_{t''}^s$ ist.

Wir nennen die Menge der Gruppen $W_1^s, \ldots, W_{k_s}^s$ die s-te Schicht von $\mathfrak{W}$. Aus d) folgt, daß die Gruppen der ersten Schicht durch die zugehörigen Elemente von Φ sämtlich auf W_0^0 abgebildet werden.

Man beachte ferner, daß für $s \neq 0$ nicht verlangt wird, daß W_t^s als Bild einer Gruppe $W_{t'}^{s+1}$ unter dem Homomorphismus $\varphi_{t'}^{s+1}$ vorkommt. Es gibt also in $\mathfrak{W}$ im allgemeinen auch außerhalb der l-ten Schicht Gruppen, die nicht als Bildgruppen auftreten. Jede Gruppe von $\mathfrak{M}$, die nicht als Bildgruppe bezüglich Φ auftritt, nennen wir Basisgruppe von $\mathfrak{W}$.

In der Menge $\mathfrak{M}$ erklären wir nun eine Ordnungsrelation $\leqq$. Es sei $W_t^s < W_{n_m}^{s+m}$, wenn W_t^s Bild der Gruppe $W_{n_m}^{s+m}$ unter dem Homomorphismus $\varphi_{n_1}^{s+1} \ldots \varphi_{n_m}^{s+m}$ ist. Wir schreiben $W_t^s \leqq W_{t'}^{s'}$, wenn $W_t^s < W_{t'}^{s'}$ oder $W_t^s = W_{t'}^{s'}$ ist. Unmittelbar aus a) bis e) folgt dann

LEMMA 1. *Zu jeder Gruppe $W_t^s \in \mathfrak{M}$ gibt es, falls $r \leqq s$ ist, in der r-ten Schicht genau eine Gruppe $W_{t'}^r$ mit $W_{t'}^r \leqq W_t^s$.*

Daraus folgt sofort

LEMMA 2. *Die Menge $\{W_{t'}^r \in \mathfrak{M} \mid W_{t'}^r \leqq W_t^s\}$ ist gemäß $\leqq$ totalgeordnet.*

Wir zeigen nun

SATZ 4. *$\mathfrak{M}$ bildet bezüglich $\leqq$ einen Halbverband.*

BEWEIS. Aus den gegebenen Definitionen folgt sofort

$$W_t^s \leqq W_t^s$$
$$W_t^s \leqq W_{t'}^{s'}, \quad W_{t'}^{s'} \leqq W_{t''}^{s''} \Rightarrow W_t^s \leqq W_{t''}^{s''}$$
$$W_t^s \leqq W_{t'}^{s'}, \quad W_{t'}^{s'} \leqq W_t^s \Rightarrow W_t^s = W_{t'}^{s'}.$$

Aus der Tatsache, daß für jede Gruppe $W_t^s \in \mathfrak{M}$ stets $W_0^0 \leqq W_t^s$ ist, und aus Lemma 2 folgt, daß zu zwei Gruppen $W_t^s, W_{t'}^{s'}$ die Gruppe $W_t^s \wedge W_{t'}^{s'}$ (g.g.T. bezüglich der Ordnung $\leqq$) stets existiert und eindeutig bestimmt ist.

Abweichend von der bisherigen Bezeichnungsweise werden nun die Basisgruppen von $\mathfrak{W}$ mit $V_1, \ldots, V_n$ in irgendeiner Numerierung bezeichnet. Für $V_i \wedge V_k$ schreiben wir kurz V_{ik} (insbesondere für V_i auch V_{ii}).

SATZ 5. *Für jede Gruppe $W_t^s \neq W_0^0$ gilt $W_t^s = V_{ik}$ bei passend gewählten i, k.*

BEWEIS. Falls W_t^s Basisgruppe ist, ist alles klar. Sonst gilt wegen der Eigenschaft e) von $\mathfrak{W}$: $W_t^s \leqq W_{t_1}^{s+1}$ und $W_t^s \leqq W_{t_2}^{s+1}$ für passend gewählte t_1, t_2. Falls $W_{t_1}^{s+1}$ nicht selbst Basisgruppe ist, gibt es ein $W_{\ldots}^{s+2}$ mit $W_{t_1}^{s+1} \leqq W_{\ldots}^{s+2}$ usw. Schließlich kommen wir zu einer Basisgruppe V_i. Entsprechend verfahren wir mit $W_{t_2}^{s+1}$ und kommen zu einer Basisgruppe V_k. Es ist klar, daß $W_t^s \leqq V_{ik}$ gilt (s. Lemma 2). Aus Lemma 1 und 2 folgt $V_{ik} < W_{t_1}^{s+1}$ und $V_{ik} < W_{t_2}^{s+1}$, also auch $V_{ik} \leqq W_t^s$.

Wir interessieren uns nunmehr für das geordnete direkte Produkt $V_1 \times \cdots \times V_n$. Für $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ gilt genau dann

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqq (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, wenn $\alpha_i \leqq \beta_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt. Den Homomorphismus $V_i \to V_{ik}$, der durch Hintereinanderausführen von Elementen aus Φ gewonnen wird, bezeichnen wir mit η_{ik}. Das Element $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ nennen wir bezüglich $\mathfrak{W}$ restgebunden, wenn für jedes Paar i, k jeweils $\eta_{ik}\alpha_i = \eta_{ki}\alpha_k$ ist. Es ist klar, daß die restgebundenen Elemente von $V_1 \times \cdots \times V_n$ eine Untergruppe V^* der Gruppe $V_1 \times \cdots \times V_n$ bilden. Wie kann man die Elemente von V^* konstruieren? Dazu formulieren wir

SATZ 6. A) *Das Element* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V^*$ *ordnet in eindeutiger Weise jeder Gruppe* $W_i^s \in \mathfrak{M}$ *ein* $\alpha_i^s \in W_i^s$ *derart zu, daß* a) $\alpha_i^s = \alpha_i$ *ist, falls* $W_i^s = V_i$, *also Basisgruppe ist,* b) $\alpha_i^s = \varphi_{ir}^{s+1}\alpha_r^{s+1}$ *ist, falls* W_i^s *Bildgruppe des Homomorphismus* φ_{ir}^{s+1} *ist.*

B) *Hat man umgekehrt aus jeder Gruppe* $W_i^s \in \mathfrak{M}$ *ein* $\alpha_i^s \in W_i^s$ *so ausgewählt, daß* b) $\alpha_i^s = \varphi_{ir}^{s+1}\alpha_r^{s+1}$ *ist, falls* W_i^s *Bild von* φ_{ir}^{s+1} *ist, und setzt man* a) $\alpha_i = \alpha_i^s$ *falls* $W_i^s = V_i$ *ist, dann ist* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V^*$.

BEWEIS. A) Falls W_i^s Basisgruppe ist, ist α_i^s durch a) eindeutig bestimmt. Falls $W_i^s = W_0^0$ ist, ist nur $\alpha_i^s = 1 \in W_0^0$ möglich. Falls $W_i^s \neq W_0^0$ und nicht Basisgruppe ist, gilt nach Satz 5 etwa $W_i^s = V_{ik}$ mit $i \neq k$. Wir setzen $\alpha_i^s = \eta_{ik}\alpha_i$. Das definiert α_i^s eindeutig. Wäre nämlich $V_{ik} = V_{jm}$, dann hätte man $V_{ik} \leqq V_j, V_m, V_i, V_k$, also auch $V_{ik} \leqq V_{ij}$ und $V_{ik} \leqq V_{im}$. Wegen Lemma 2 gilt $V_{ij} \leqq V_{im}$ oder $V_{im} \leqq V_{ij}$. In jedem Fall zeigt die Gleichung $V_{ik} = V_{jm}$, daß nicht gleichzeitig $V_{ik} < V_{ij}$ und $V_{ik} < V_{im}$ sein kann. Es gilt also etwa $V_{ik} = V_{ij}$. Dann gilt auch $\eta_{ik} = \eta_{ij}$ und $\eta_{ji} = \eta_{jm}$. Daraus folgt $\eta_{ik}\alpha_i = \eta_{ij}\alpha_i = \eta_{ji}\alpha_j = \eta_{jm}\alpha_j$. α_i^s ist also in eindeutiger Weise definiert.

Daraus, daß die η_{ik} durch Verwendung von Elementen aus Φ konstruiert wurden, folgt b).

B) Wegen b) und der Definition der η_{ik} gilt $\eta_{ik}\alpha_i = \eta_{ki}\alpha_k = \alpha_i^s$, falls $W_i^s = V_{ik}$ ist. Das bedeutet, daß $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ restgebunden ist.

Wir können nun ein Konstruktionsverfahren für die Elemente von V^* angeben:

Man gehe von W_0^0 aus und setze $\alpha_0^0 = 1$. Dann bestimme man $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{k_1}^1$ aus $W_1^1, \ldots, W_{k_1}^1$ beliebig. Trivialerweise gilt dann $\varphi_t^1 \alpha_t^1 = \alpha_0^0$ für $t = 1, \ldots, k_1$. Dann bestimme man α_t^2 für $t = 1, \ldots, k_2$ so, daß stets $\varphi_t^2 \alpha_t^2 = \alpha_r^1$, gilt, falls $\varphi_t^2 \in \Phi$ die Abbildung $W_t^2 \to W_r^1$, ist. Das ist immer möglich. Auf diese Weise wird schließlich jeder Gruppe W_i^s ein $\alpha_i^s \in W_i^s$ zugeordnet. Insbesondere sind den Basisgruppen $V_1, \ldots, V_n$ Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zugeordnet, von denen Satz 6 B) besagt, daß $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ restgebunden ist. Satz 6 A) sichert, daß man alle Elemente von V^* auf diese Weise erhält.

Wir untersuchen nun die Struktur von V^* und zeigen zunächst

SATZ 7. V^* *ist eine Verbandsgruppe.*

BEWEIS. Es seien $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V^*$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in V^*$. Es gilt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 \wedge \beta_1, \ldots, \alpha_n \wedge \beta_n)$, und wir haben zu zeigen, daß $(\alpha_1 \wedge \beta_1, \ldots, \alpha_n \wedge \beta_n) \in V^*$ ist.

Man ordne jeder Gruppe $W_i^s \in \mathfrak{M}$ ein Element α_i^s und ein Element β_i^s nach Satz 6 A) mit den Eigenschaften a) und b) zu. Das Elementsystem $\gamma_i^s = \alpha_i^s \wedge \beta_i^s$ erfüllt wieder die Eigenschaft b) von Satz 6, denn da die φ_i^s Ordnungshomomorphismen sind, gilt

$$\gamma_i^s = \alpha_i^s \wedge \beta_i^s = \varphi_{i'}^{s+1}(\alpha_{i'}^{s+1} \wedge \beta_{i'}^{s+1}) = \varphi_{i'}^{s+1}\gamma_{i'}^{s+1}.$$

Setzt man also $\gamma_i = \gamma_i^s$, falls $W_i^s = V_i$ ist, so erhält man das nach Satz 6 B) restgebundene Element $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = (\alpha_1 \wedge \beta_1, \ldots, \alpha_n \wedge \beta_n)$. Entsprechendes gilt für $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \vee (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Wir bezeichnen die Menge der Elemente $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V^*$ mit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geqq (1, \ldots, 1)$ mit R^*.

SATZ 8. $S_i = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^*, \alpha_i = 1\}$ *ist für jedes* $i = 1, \ldots, n$ *jeweils minimale prime vollständige Unterhalbgruppe von* R^*. *Die* S_i *sind die einzigen minimalen primen vollständigen Unterhalbgruppen von* R^*.

BEWEIS. Daß S_i eine Unterhalbgruppe von R^* ist, ist klar. Aus $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geqq (\beta_1, \ldots, \beta_n) \geqq (1, \ldots, 1)$ folgt mit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_i$ auch $(\beta_1', \ldots, \beta_n) \in S_i$. Aus $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \notin S_i$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \notin S_i$ folgt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 \wedge \beta_1, \ldots, \alpha_n \wedge \beta_n) \notin S_i$ wegen $\alpha_i \wedge \beta_i = \alpha_i \neq 1$ oder $\alpha_i \wedge \beta_i = \beta_i \neq 1$.

S_i ist auch minimal. Es sei S' eine echt in S_i enthaltene prime vollständige Unterhalbgruppe. Man wähle Elemente $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in R^*$ auf folgende Weise:

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_i$ aber $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \notin S'$, sonst beliebig.

$(\beta_1', \ldots, \beta_n') \in S'$ zunächst beliebig. Nach Satz 6 ist es ohne weiteres möglich, daraus ein ebenfalls restgebundenes Element $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ zu erhalten, indem man $\beta_k = \beta_k'$ für $k \neq i$ und $\beta_i > 1$ wählt, da — falls $V_i = W_{i'}^{s+1}$ ist — der Homomorphismus $\varphi_{i'}^{s+1}$ ein *echter* Ordnungshomomorphismus ist, also auch von 1 verschiedene Elemente auf die 1 von W_i^s abbildet. Man sieht dann, daß $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \notin S'$ ist. Doch es gilt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge (\beta_1, \ldots, \beta_n) \leqq (\beta_1', \ldots, \beta_n') \in S'$.

Gäbe es außer den Halbgruppen $S_1, \ldots, S_n$ noch eine weitere minimale prime vollständige Unterhalbgruppe $\tilde{S}$ von R^*, dann hätte man zu jedem $i = 1, \ldots, n$ ein $\alpha_i \in S_i$ mit $a_i \notin \tilde{S}$. Es würde $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n = (1, \ldots, 1)$ gelten, d.h. $\tilde{S}$ wäre gar nicht prim.

III. Verbandsgruppen mit endlich vielen minimalen primen vollständigen Unterhalbgruppen

V sei eine Verbandsgruppe, deren Unterhalbgruppe R der ganzen Elemente nur endlich viele minimale prime vollständige Unterhalbgruppen $S_1, \ldots, S_n$ besitzt. Unter V_i verstehen wir die (nach Satz 3 totalgeordnete) Gruppe V/E_i. Das von $a \in V$ repräsentierte Element von V_i nennen wir $\bar{a}_i$. Wir betrachten ferner das geordnete direkte Produkt $V_1 \times \cdots \times V_n$, dessen Ordnung dadurch definiert ist, daß $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqq (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ genau dann gilt, wenn $\alpha_i \leqq \beta_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ist. Für unsere weiteren Betrachtungen benötigen wir das folgende Resultat von LORENZEN [4], das wir ohne Beweis zitieren:

LEMMA 3. *Ist $\{S_\tau\}$ die Menge der minimalen primen vollständigen Unterhalbgruppen der ganzen Elemente einer (beliebigen) Verbandsgruppe V, dann ist $\bigcap_\tau S_\tau = 1$.*

KOROLLAR. $\bigcap_\tau E_\tau = 1$.

BEWEIS. Es sei $x \in \bigcap_\tau E_\tau$. Dann gilt für jedes τ eine Gleichung $x = a_\tau \cdot b_\tau^{-1}$ mit $a_\tau, b_\tau \in S_\tau$, und es ist $(1 \vee x)^{-1} = 1 \wedge a_\tau^{-1} b_\tau$. Da jeweils $a_\tau (1 \wedge a_\tau^{-1} b_\tau) = a_\tau \wedge b_\tau \in S_\tau$ ist, gilt $(1 \vee x)^{-1} \in E_\tau$ für alle τ. Nach Satz 2 folgt daraus $1 \vee x \in S_\tau$ für alle τ, nach Lemma 3 also $1 \vee x = 1$. Das bedeutet $x \leqq 1$, nach Satz 2 also $x^{-1} \in \bigcap_\tau S_\tau$ und nach erneuter Anwendung von Lemma 3 ergibt sich $x = 1$.

SATZ 9. *Die Abbildung $a \to (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$ vermittelt einen Ordnungsisomorphismus von V auf eine Untergruppe V^{**} des geordneten direkten Produkts $V_1 \times \cdots \times V_n$.*

BEWEIS. Die Menge der Bilder der Elemente $a \in V$ in $V_1 \times \cdots \times V_n$ nenne man V^{**}. Daß die Abbildung $V \to V^{**}$ einen Ordnungshomomorphismus darstellt, ist klar.

Aus dem Korollar zu Lemma 3 folgt zunächst die Umkehrbarkeit der Abbildung. Aus $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n)$ folgt $a = b$. Es liegt also ein Isomorphismus vor.

Gilt $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \geqq (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n)$, dann ist $\bar{a}_i \geqq \bar{b}_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Äquivalent damit ist die Aussage $\bar{a}_i \wedge \bar{b}_i = \overline{(a \wedge b)}_i = \bar{b}_i$, und erneute Anwendung des Korollars zu Lemma 3 ergibt $a \wedge b = b$, also ist $a \geqq b$, und Satz 9 ist bewiesen.

Wir konstruieren nun zu $V_1, \ldots, V_n$ in natürlicher Weise ein Schichtensystem $\mathfrak{W}$ derart, daß die V_i gerade zu den Basisgruppen von $\mathfrak{W}$ werden und wollen dann zeigen, daß die zu $\mathfrak{W}$ gehörige restgebundene Gruppe $V^* \subseteqq V_1 \times \cdots \times V_n$ identisch mit V^{**} ist.

LEMMA 4. *Zu zwei minimalen primen vollständigen Unterhalbgruppen S_i und S_k von V gibt es genau eine kleinste prime vollständige Unterhalbgruppe S_{ik} von R mit $S_{ik} \geqq S_i, S_k$.*

BEWEIS. Die Menge $N_i = \{S \mid S \geqq S_i$, S prime vollständige Unterhalbgruppe von $R\}$ ist nicht leer, da $R \in N_i$. Sie ist nach Satz 3 bezüglich $\subseteqq$ totalgeordnet. Entsprechend bilde man N_k und betrachte $N_{ik} = N_i \cap N_k$. Auch diese Menge ist bezüglich $\subseteqq$ totalgeordnet. Der mengentheoretische Durchschnitt der Elemente von N_{ik} ist die gesuchte prime vollständige Unterhalbgruppe S_{ik}.

Wir bezeichnen die Gruppe V/E_{ik} mit V_{ik} und bemerken, daß wir diese wegen $E_{ik} \geqq E_i, E_k$ sowohl als Quotientengruppe von V_i als auch als Quotientengruppe von V_k auffassen können und werden. Ebenso fassen wir V_{jm} genau dann als Quotientengruppe von V_{ik} auf, wenn $E_{jm} > E_{ik}$ ist. Wir bilden nun für jedes Paar i, k die Gruppe V_{ik}. (Wir setzen $V_{ii} = V_i$.) In die Menge dieser Gruppen nehmen wir eine Gruppe V_{ik} auch dann nur einmal auf, wenn etwa $V_{ik} = V_{jm}$ sein sollte. Die Gruppe V/V soll, falls sie nicht schon unter den Gruppen V_{ik} vorkommt, zur Menge der V_{ik} dazugenommen werden und wird in jedem Fall mit W_0^0 bezeichnet. V_{jm} wird unmittelbare Quotientengruppe von V_{ik} genannt, wenn $E_{jm} > E_{ik}$ ist und in der Menge der V_{rs} keine Quotientengruppe von V_{ik} mehr existiert, von der V_{jm} Quotientengruppe ist.

Das gewünschte Schichtensystem wird dann wie folgt gewonnen: Von W_0^0 ausgehend bezeichnen wir mit $W_1^1, \ldots, W_{k_1}^1$ die sämtlichen Gruppen der Menge $\mathfrak{M}$ der V_{ik}, von denen W_0^0 unmittelbare Quotientengruppe ist. φ_i^1 ist jeweils der natürliche Homomorphismus $W_i^1 \to W_0^0$. Für jede Gruppe W_i^1 bilden wir nun die Gesamtheit der Gruppen V_{ik}, von denen W_i^1 unmittelbare Quotientengruppe ist und gewinnen dadurch die Gruppen W_i^2. φ_i^2 ist wieder der natürliche Homomorphismus von W_i^2 auf ein W_i^1; usw.

Wir wollen zeigen, daß dieser Prozeß ein Schichtensystem $\mathfrak{W}$ definiert:

Da die Menge der Quotientengruppen von V_i totalgeordnet ist (gemäß: ... ist Quotientengruppe von ...), besitzt jede Gruppe V_{ik} höchstens eine und damit genau eine unmittelbare Quotientengruppe. Die φ_i^s sind also eindeutig bestimmt.

Weil jede Gruppe V_{ik} entweder eine Quotientengruppe V_{jm} besitzt oder W_0^0 zur unmittelbaren Quotientengruppe hat, weil, falls V_{jm} Quotientengruppe von V_{ik} ist, niemals V_{ik} Quotientengruppe von V_{jm} ist, und weil es nur endlich viele V_{ik} gibt, kommt jede der Gruppen V_{ik} in dem oben beschriebenen Prozeß genau einmal vor.

Die Bedingungen a), b), c) verstehen sich für $\mathfrak{M}$ von selbst. d) ergibt sich aus der Konstruktion der V_{ik} und der Definition von φ_i^s. Um auch e) zu zeigen, nehmen wir an, daß V_{ik} die Gruppe V_{jm} als unmittelbare Quotientengruppe besitzt. Dann kann nicht V_{ik} gleichzeitig Quotientengruppe von V_j und V_m sein, da das der Definition von V_{jm} widersprechen würde. V_{ik} sei nicht Quotientengruppe von V_j. Wir bilden die Kette der Gruppen W_i^s, bei der wir von V_j jeweils zu ihrer unmittelbaren Quotientengruppe übergehen usw. In dieser Kette muß auch die Gruppe V_{jm} vorkommen. V_{ik} kann dagegen nicht vorkommen, und damit ist auch e) gezeigt.

Wir haben also ein Schichtensystem $\mathfrak{W}$ definiert, bei dem genau die V_i die Basisgruppen sind.

SATZ 10. *Für die zu $\mathfrak{W}$ gehörige restgebundene Untergruppe V^* von $V_1 \times \cdots \times V_n$ gilt $V^* \supseteq V^{**}$.*

BEWEIS. Da alle Gruppen von $\mathfrak{W}$ Quotientengruppen von V sind, ist klar, daß $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \in V^{**}$ stets restgebunden bezüglich $\mathfrak{W}$ ist.

LEMMA 5. *Zu zwei primen vollständigen Unterhalbgruppen S' und S'' von R gibt es genau eine kleinste prime vollständige Unterhalbgruppe S von R mit $S \supseteq S', S''$. Für diese gilt $S \cdot E'/E' = S'' \cdot E'/E'$.*

BEWEIS. Die Existenz von S zeigt man entsprechend dem Beweis von Lemma 4. Es gilt natürlich $S \cdot E'/E' \supseteq S'' \cdot E'/E'$. Für den Rest genügt es — wegen der Gültigkeit von Satz 3 — zu zeigen, daß $S'' \cdot E'/E'$ eine prime vollständige Unterhalbgruppe von V/E' ist.

Es ist klar, daß $S'' \cdot E'/E'$ Halbgruppe ist. Hat man $\bar{1} \leqq \bar{a} \leqq \bar{b}$ und $\bar{b} \in S'' \cdot E'/E'$, so gibt es von $\bar{b}$ einen Repräsentanten $b \in S''$ und von $\bar{a}$ einen Repräsentanten $a \geqq 1$. Es gilt dann $1 \leqq a \wedge b \leqq b$, d.h. $a \wedge b \in S''$. Wegen der Totalordnung von V/E' ist $\bar{a} \wedge \bar{b} = \bar{a}$, d.h. $a \wedge b$ Repräsentant von $\bar{a}$, also

$\bar{a} \in S'' \cdot E'/E'$. Die Primeigenschaft von $S'' \cdot E'/E'$ ist wegen der Totalordnung von V/E' trivial.

LEMMA 6. *Bei gleicher Bezeichnung wie in Lemma 5 sei $\bar{a} \in E/E'$. Dann gibt es ein $x \in V$ so, daß $x \cdot E'/E' = \bar{a}$ und $x \cdot E''/E'' = \bar{1}$ ist.*

BEWEIS. Man kann ohne B. d. A. $\bar{a} \geqq \bar{1}$ annehmen. Dann ist klar, daß $\bar{a}$ nach Lemma 5 durch ein $x \in S''$ repräsentiert werden kann. Dieses erfüllt das Verlangte.

LEMMA 7. *Gegeben seien die primen vollständigen Unterhalbgruppen $S^1, \ldots, S^t$ von R und S^r, S^s sei jeweils die zu dem Paar S^r, S^s gehörige kleinste beide umfassende prime vollständige Unterhalbgruppe von R.*

$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_t$ seien Elemente aus den $V/E^1, \ldots, V/E^t$ derart, daß für jedes $k \neq i$ stets $\bar{a}_i \in E^{ik}/E^i$ ist. Dann gibt es ein $x \in V$, so daß $x \cdot E^i/E^i = \bar{a}_i$ für $i = 1, \ldots, t$ ist.

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, daß es zu jedem i ein $x_i \in V$ gibt, so daß $x_i \cdot E^i/E^i = \bar{a}_i$ und $x_i \cdot E^k/E^k = \bar{1}$ für alle $k \neq i$ wird. Dann erfüllt $x = x_1 \ldots x_t$ die gewünschten Bedingungen.

Die Existenz des Elementes x_i weisen wir für $i = 1$ nach und benutzen dabei vollständige Induktion nach t. Es kann auch hier $\bar{a}_1 \geqq \bar{1}$ angenommen werden.

Nach Lemma 6 existiert ein Element $y \in V$ mit $y \cdot E^1/E^1 = \bar{a}_1$ und $y \cdot E^2/E^2 = \bar{1}$. Nach Induktionsannahme gibt es ein $z_1 \in V$ mit

$$z_1 \cdot E^1/E^1 = \bar{a}_1 \quad \text{und} \quad z_1 \cdot E^i/E^i = \bar{1} \quad \text{für} \quad i = 2, \ldots, t-1,$$

und ein $z_2 \in V$ mit

$$z_2 \cdot E^1/E^1 = \bar{a}_1 \quad \text{und} \quad z_2 \cdot E^k/E^k = \bar{1} \quad \text{für} \quad k = 3, \ldots, t.$$

Es sind nun drei Fälle möglich:

a) $z_1 \cdot E^t/E^t \geqq \bar{1}$ und $z_2 \cdot E^2/E^2 \geqq \bar{1}$. Dann wähle man $x_1 = z_1 \wedge z_2$.

b) $z_2 \cdot E^2/E^2 < \bar{1}$. Dann wähle man $x_1 = 1 \vee z_2$.

c) $z_1 \cdot E^t/E^t < \bar{1}$. Dann wähle man $x_1 = 1 \vee z_1$.

Es folgt nun der Hauptsatz dieses Abschnitts.

SATZ 11. *Es ist $V^* = V^{**}$.*

BEWEIS. Es sei $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V^*$. Wir ordnen gemäß Satz 6 A) jeder Gruppe $W_i^s \in \mathfrak{M}$ ein Element α_i^s eindeutig so zu, daß α_i Repräsentant von α_i^s ist, falls W_i^s Quotientengruppe von V_i ist. Wir suchen nun ein Element $a \in V$ derart, daß $\bar{a}_i = \alpha_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ wird. Dabei gehen wir schichtweise vor und bezeichnen mit S_i^s stets die prime vollständige Unterhalbgruppe von R, für die $W_i^s = V/E_i^s$ ist.

Nach Lemma 7 gibt es ein $x_1 \in V$, so daß $x_1 \cdot E_i^1/E_i^1 = \alpha_i^1$ für $i = 1, \ldots, k_1$ wobei $V/E_i^1 = W_i^1$ ist.

Nach $m-1$ Schritten haben wir bereits ein $x_{m-1} \in V$ gewonnen mit $x_{m-1} \cdot E_i^s/E_i^s = \alpha_i^s$ für $s \leqq m-1$. Man bilde nun die Elemente $\tilde{\alpha}_t^m = \alpha_t^m \cdot (x_{m-1}^{-1} \cdot E_t^m/E_t^m)$ für $t = 1, \ldots, k_m$. Dazu nehme man für alle Basisgruppen W_i^s mit $s < m$ das

Element $\tilde{\alpha}_t^s = \bar{1}$ hinzu. Die Elemente $\tilde{\alpha}_t^m, \tilde{\alpha}_{t'}^s$ erfüllen dann zusammen die Voraussetzungen von Lemma 7, denn es gilt $\varphi_t^m \tilde{\alpha}_t^m = \bar{1}$. Es gibt also ein $x'_m \in V$ mit $x'_m \cdot E_t^m / E_t^m = \tilde{\alpha}_t^m$ und $x'_m \cdot E_{t'}^s / E_{t'}^s = \tilde{\alpha}_{t'}^s$.

Für das Element $x_m = x_{m-1} \cdot x'_m$ gilt dann $x_m \cdot E_{t''}^r / E_{t''}^r = \alpha_{t''}^r$ für alle $r \leqq m$.

Für maximales l ist in $a = x_l$ das gesuchte Element dann gefunden. Daraus folgt $V^{**} \subseteqq V^*$ und mit Satz 10 zusammen $V^{**} = V^*$.

IV. Zur Idealtheorie in Verbandsgruppen mit endlich vielen minimalen primen vollständigen Unterhalbgruppen

V sei Verbandsgruppe mit endlich vielen minimalen primen vollständigen Unterhalbgruppen $S_1, \ldots, S_n$ von R. Wir behalten die Bezeichnungen der vorigen Abschnitte bei, verstehen also unter $S_{\ldots}$ stets eine prime vollständige Unterhalbgruppe von R und unter $E_{\ldots}$ die von $S_{\ldots}$ erzeugte Untergruppe. V sei das Schichtensystem $\mathfrak{W}$ totalgeordneter Gruppen im Sinne des vorigen Abschnitts zugeordnet, dessen Basisgruppen $V_1, \ldots, V_n$ sind, wobei $V_i = V/E_i$ mit $i = 1, \ldots, n$ ist. Mit $F_{\ldots}$ bezeichnen wir stets die Menge $R \cdot E_{\ldots}$. F ist also genau die Menge der Repräsentanten der Elemente von $R \cdot E/E$, d.h. die Menge der Repräsentanten der nichtnegativen Elemente von V/E[9]). Daraus folgt sofort:

Satz 12. *F besitzt folgende Eigenschaften*

a) $1 \in F$

b) $a, b \in F \quad \Rightarrow a \cdot b \in F$

c) $a, b \in F \quad \Rightarrow a \wedge b \in F$

d) $a, b \in F \quad \Rightarrow a \vee b \in F$

e) $a, b \notin F \quad \Rightarrow a \cdot b \notin F$

f) $a, b \notin F \quad \Rightarrow a \wedge b \notin F$

g) $a, b \notin F \quad \Rightarrow a \vee b \notin F$

h) $a \leqq b,\ a \in F \Rightarrow b \in F$

i) $a \notin F \quad \Rightarrow a^{-1} \in F$.

Satz 13. $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = R$.

Beweis. Es sei $a \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i$. Das bedeutet $\bar{a}_i \geqq \bar{1}$ für $i = 1, \ldots, n$, also $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \in R^*$, wobei R^* die Menge der ganzen Elemente von V^* ist. Nach Satz 11 gilt dann $a \in R$.

Satz 14. *K sei eine Untermenge von V, für die die Eigenschaften* a) bis i) *von Satz* 12 *gelten. Dann ist $K \supseteqq F_i$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Beweis. Aus a) und g) folgt bereits $K \supseteqq R$. Falls $K \not\supseteqq F_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt, gibt es zu jedem $i = 1, \ldots, n$ ein $a_i \in F_i$ mit $a_i \notin K$. Das bedeutet nach d) bzw. f): $a = a_1 \vee \ldots \vee a_n \in F_1 \cap \ldots \cap F_n = R$ aber $a \notin K$ mit Widerspruch zu $K \supseteqq R$.

[9]) Jaffard [1] nennt mit gutem Recht einen Ordnungshomomorphismus einer geordneten Gruppe auf eine totalgeordnete Gruppe eine „Bewertung". F ist die Menge der in der Bewertung $V \to V/E$ ganzen Elemente von V, — der „Bewertungsring".

SATZ 15. *Falls K die Eigenschaften* a) bis i) *von Satz* 12 *erfüllt, gilt $K=F$ für passend gewähltes S. Es ist $E=\{a \mid a\in F,\ a^{-1}\in F\}$.*

BEWEIS. Wir betrachten die Menge $M=\{a \mid a\in K,\ a^{-1}\in K,\ a\in R\}$. M ist eine prime vollständige Unterhalbgruppe von V, denn es gilt:

$1\in M$

$1\leqq a\leqq b, \quad b\in M \Rightarrow b^{-1}\in K, \quad a^{-1}\geqq b^{-1}\Rightarrow a^{-1}\in K \Rightarrow a\in M.$

$a, b\in R, \quad a, b\notin M \Rightarrow a^{-1}, b^{-1}\notin K \Rightarrow (a^{-1}\vee b^{-1})=(a\wedge b)^{-1}\notin K \Rightarrow a\wedge b\notin M.$

Wir setzen $S=M$. Dann gilt $E\subseteqq K$ und damit auch $F\subseteqq K$. Falls $k\in K$ mit $k\notin F$ existierte, wäre $k^{-1}\in F$. Das würde $1\wedge k\in K$, $1\vee k^{-1}=(1\wedge k)^{-1}\in K$, also $1\vee k^{-1}\in S$, aber wegen $1\wedge k\leqq k\notin F$ jedoch $1\wedge k\notin F$ mit Widerspruch bedeuten.

Da F die Menge der Repräsentanten der Elemente von $R\cdot E/E$ ist, gilt $E=\{a \mid a\in F,\ a^{-1}\in F\}$.

Damit sind alle Untermengen von V mit den Eigenschaften des Satzes 12 bestimmt [10]). Wir definieren nun:

Eine Untermenge C von V heißt F-Ideal, wenn $C\cdot F\subseteqq C$ gilt. C heißt ganzes F-Ideal, wenn es F-Ideal ist und $C\subseteqq F$ gilt. Das F-Ideal C heißt prim, wenn es ganz ist und wenn aus $a, b\notin C$ und $a, b\in F$ stets $a\cdot b\notin C$ folgt.

Die Richtigkeit des folgenden Lemmas ist unmittelbar zu sehen:

LEMMA 8. *Falls M eine beliebige Untermenge von V ist, ist $M\cdot F$ das von M erzeugte F-Ideal.*

Eine Untermenge A von V heißt V-Ideal (oder einfach: Ideal von V), wenn $A\cdot R\subseteqq A$ gilt und aus $a, b\in A$ stets $a\wedge b\in A$ folgt [11]). Ein Ideal A von V heißt ganz, wenn $A\subseteqq R$ gilt. Ein Ideal A von V heißt prim, wenn es ganz ist und aus $a, b\in R$ und $a, b\notin A$ stets $a\cdot b\notin A$ folgt.

Unser Ziel ist es, eine Theorie der V-Ideale unter Heranziehung der F-Ideale zu gewinnen. Zunächst führen wir durch den folgenden Satz die Theorie der F-Ideale auf die Idealtheorie der totalgeordneten Gruppe V/E zurück.

SATZ 16. a) *Wenn C ein F-Ideal ist, ist $\overline{C}=C\cdot E/E$ Ideal von V/E.*

b) *Falls $\overline{C}$ ein Ideal von V/E ist, dann bildet die Menge der Repräsentanten der Elemente von $\overline{C}$ in V ein F-Ideal.*

c) *Bei der Zuordnung der F-Ideale von V und der Ideale von V/E nach a) und b) entsprechen sich insbesondere Primideale umkehrbar eindeutig.*

BEWEIS. a) Wegen $C\cdot F=C=R\cdot E\subseteqq C$ gilt auch $(C\cdot E/E)\cdot(R\cdot E/E)\subseteqq C\cdot E/E$.

b) Mit $\bar{c}\in\overline{C}$ und $\bar{r}\in R\cdot E/E$ gilt auch $\bar{c}\cdot\bar{r}\in\overline{C}$. Für Repräsentanten c bzw. $r\cdot e$, wobei $r\in R$ und $e\in E$ ist, ist $c\cdot r\cdot e$ Repräsentant eines Elementes von $\overline{C}$.

[10]) Der Beweis von Satz 15 zeigt, daß bereits ein Teil der Eigenschaften a) bis i) genügt, um F zu charakterisieren.

[11]) Die Menge der V-Ideale bildet ein totales Idealsystem im Sinne von JAFFARD [1].

c) $a, b \notin C \Rightarrow \bar{a}, \bar{b} \notin \overline{C} \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab} \notin \overline{C} \Rightarrow a \cdot b \in C$, falls $\overline{C}$ Primideal von V/E ist. $\bar{a}, \bar{b} \notin \overline{C} \Rightarrow a, b \notin C \Rightarrow a \cdot b \notin C \Rightarrow \overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b} \notin \overline{C}$, falls C primes F-Ideal ist.

Man hat dann unmittelbar die folgenden

KOROLLAR 1. *Falls C ein F-Ideal ist und $a, b \in C$ ist, dann ist auch $a \wedge b \in C$.*

KOROLLAR 2. *Die Menge der F-Ideale ist bezüglich $\subseteq$ totalgeordnet.*

Wegen der Totalordnung der F-Ideale existiert höchstens ein von F verschiedenes maximales ganzes F-Ideal.

LEMMA 9. *$P = F - E$ ist maximales ganzes F-Ideal. P ist prim.*

BEWEIS. Es sei $P = F - E$. Dann ist nach Satz 15 $P = \{x \mid x \in F, x^{-1} \notin F\}$. Für $x \in P$ und $y \in F$ ist $x \cdot y \in F$; $x^{-1} y^{-1} \notin F$, denn sonst wäre auch $x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot y = x^{-1} \in F$.

Die Maximalität von P ist klar.

Wegen $P = F - E$ ist P prim.

SATZ 17. a) *Falls P das in F maximale F-Primideal ist, dann ist $\tilde{P} = P \cap R$ ein Primideal von V. Es gilt $S = R - \tilde{P}$.*

b) *Falls $\tilde{P}$ Primideal von V ist, dann gibt es ein eindeutig bestimmtes F derart, daß $P = \tilde{P} \cdot F$ das maximale F-Primideal ist. Es gilt $P \cap R = \tilde{P}$.*

BEWEIS. a) Es ist $R \cdot \tilde{P} = R \cdot (R \cap P) \subseteq R$ und wegen $R \subseteq F$ auch $R \cdot \tilde{P} = R(R \cap P) \subseteq P$. Daher gilt $R \cdot \tilde{P} \subseteq \tilde{P}$.

Trivial ist wegen Korollar 1 zu Satz 16, daß aus $a, b \in \tilde{P}$ stest $a \wedge b \in \tilde{P}$ folgt. Die Primeigenschaft von $\tilde{P}$ folgt unmittelbar aus der Primeigenschaft von P.

Mit Hilfe von Lemma 9 folgt $R - \tilde{P} = (F - P) \cap R = S$.

b) Daß $\tilde{P}$ Primideal von V ist, bedeutet, daß $R - \tilde{P} = S$ prime vollständige Unterhalbgruppe von R ist. Nach Teil a) ist $P \cap R$ Primideal von V, wenn man mit P das maximale ganze F-Ideal bezeichnet. Aus $x \in \tilde{P}$ folgt $x \notin S$ also $x \in P$ und damit $\tilde{P} \subseteq P \cap R$. Aus $x \in P \cap R$ folgt $x^{-1} \notin F$ also $x \notin S$ und damit $x \in \tilde{P}$, also $P \cap R \subseteq \tilde{P}$. Es gilt also $\tilde{P} = P \cap R$. Trivialerweise ist dann $\tilde{P} \cdot F \subseteq P$. Ist $x \in P$, dann hat man wegen $x \in F$ eine Gleichung $x = r \cdot s_1 \cdot s^{-1}_2$ mit $r \in R$, $s_1, s_2 \in S$. Hier muß $r \cdot s_1 \notin E$ also $r \cdot s_1 \notin S$ und damit $r \cdot s_1 \in \tilde{P}$ gelten, so daß $P \subseteq \tilde{P} \cdot F$ ist.

Verträgliche Idealsysteme von F_i-Idealen und die Idealtheorie in V

Zunächst bemerken wir, daß zu F_i und F_k in eindeutiger Weise eine Menge F_{ik} durch die Gleichung $F_{ik} = R \cdot E_{ik}$ zugeordnet ist. F_{ik} ist die kleinste Menge F mit den Eigenschaften von Satz 12, für die $F \supseteq F_i$ und $F \supseteq F_k$ gilt.

Das F_i-Ideal A_i und das F_k-Ideal A_k heißen verträglich, wenn $A_i \cdot F_{ik} = A_k \cdot F_{ik}$ gilt. Ein System $\{A_1, \ldots, A_n\}$, wobei A_i jeweils A_i-Ideal ist, heißt verträglich, wenn für jedes Paar i, k die Ideale A_i und A_k verträglich sind.

LEMMA 10. *Repräsentieren $\alpha_i \in V_i$ und $\alpha_k \in V_k$ dasselbe Element von V_{ik}, dann lassen sich Elemente $\alpha_j \in V_j$ für $j \neq i, k$ so wählen, daß $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V^*$ ist.*

BEWEIS. Durch die gegebenen Elemente α_i und α_k sind für alle $W_i^s \geqq V_i$, V_k Elemente α_i^s im Sinne von Satz 6 sowohl zwangsläufig als auch eindeutig bestimmt. Durch geeignete Modifizierung des im Anschluß von Satz 6 beschriebenen Konstruktionsverfahrens für Elemente von V^* kommt man dann zu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V^*$.

LEMMA 11. *Jedes ganze V-Ideal A, das von R verschieden ist, ist in dem Ideal $R - S_i$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ enthalten.*

BEWEIS. Ist $A \subsetneqq R - S_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, so gibt es zu jedem i ein $a_i \in A$ mit $a_i \in S_i$, d.h. $a = a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A$ und aus Lemma 3 folgt $a = 1$ mit Widerspruch zu $A \neq R$.

Es gilt nun folgender fundamentale Satz:

SATZ 18. a) *Ist $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ein verträgliches System von $F_1, \ldots, F_n$-Idealen, so ist $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A$ ein V-Ideal und es gilt $A_i = A \cdot F_i$.*

b) *Ist A ein V-Ideal, so ist $\{A_1, \ldots, A_n\}$ mit $A_i = A \cdot F_i$ ein verträgliches System von $F_1, \ldots, F_n$-Idealen und es gilt $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.*

BEWEIS. a) A ist ein Ideal von V. Ist nämlich $a, b \in A_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, dann gilt nach dem Korollar 1 zu Satz 16: $a \wedge b \in A$.

Wegen $A \subseteqq A_i$ gilt auch $A \cdot R \subseteqq A_i \cdot R \subseteqq A_i$, also $A \cdot R \subseteqq A$. Für festes i wähle man nun ein beliebiges Element $a_i \in A_i$. Für jedes $k \neq i$ muß es nach Voraussetzung der Verträglichkeit von $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ein $a_k \in A_k$ derart geben, daß a_i und a_k dasselbe Element von V_{ik} repräsentieren. $\bar{a}_i, \bar{a}_k$, die von a_i bzw. a_k in V_i bzw. V_k repräsentierten Elemente, lassen sich nach Lemma 10 zu einem restgebundenen Element von $V_1 \times \cdots \times V_n$ erweitern. Dieses nennen wir $\bar{a}_i^k$.

Man bilde nun $\bar{a}_i^1 \vee \ldots \vee \bar{a}_i^{i-1} \vee \bar{a}_i^{i+1} \vee \ldots \vee \bar{a}_i^n$. Auch dieses ist wieder restgebunden und bestimmt daher ein Element $a \in V$, das nach Konstruktion in V_i das Element a_i repräsentiert. Es gilt also $a_i = a \cdot e$ mit $e \in E_i$. Im übrigen repräsentiert das Element a in V_k ein Element $\bar{a}_k' \geqq \bar{a}_k$. Das bedeutet $a \in A_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Damit ist $A_i \in A \cdot F_i$ gezeigt. Die Gleichung $A \cdot F_i \subseteqq A_i$ gilt wegen $A \subseteqq A_i$ auch. Damit ist $A_i = A \cdot F_i$ gezeigt.

b) Aus $A \cdot F_{ik} = A \cdot F_i \cdot F_{ik} = A \cdot F_k \cdot F_{ik}$ folgt die Verträglichkeit von $\{A \cdot F_1, \ldots, A \cdot F_n\}$.

Es sei $A' = \bigcap_{i=1}^{n} A \cdot F_i$. Nach Teil a) dieses Satzes ist A' ein Ideal von V, und nach Konstruktion gilt $A' \subseteqq A$. Für beliebiges $a' \in A'$ ist $a' = a_i \cdot f_i$ mit $a_i \in A$ und $f_i \in F_i$. Man kann sogar wegen $F_i = R \cdot E_i$ annehmen, daß $f_i \in E_i$ ist, ja sogar $f_i^{-1} \in S_i$. Das bedeutet: Zu $a' \in A'$ gibt es zu jedem i ein $a_i \in A_i$ mit $\frac{a_i}{a'} \in S_i$. Die Menge $\left\{ \frac{a_i}{a'} \,\middle|\, a_i \in A \right\}$ bildet, wie man ohne weiteres nachprüft, ein Ideal von V. $\left\{ \frac{a_i}{a'} \,\middle|\, a_i \in A \right\} \cap R$ ist also ein ganzes Ideal von V. Die obigen Betrachtungen zeigen zusammen mit Lemma 11: $\left\{ \frac{a_i}{a'} \,\middle|\, a_i \in A \right\} \cap R = R$. Es gibt also ein $a \in A$ mit $\frac{a}{a'} = 1$, d.h. $a' \in A$, also $\bigcap_{i=1}^{n} A \cdot F_i = A$.

Isolierte Komponentenideale der V-Ideale

Es sollen die isolierten Komponentenideale A_T der Ideale A von V bezüglich der multiplikativ abgeschlossenen Mengen T von R bestimmt werden. Unter A_T verstehen wir das aus den Elementen der Menge $\{c \mid \exists_{x \in T} \cdot xc \in A\}$ bestehende Ideal.

Wir definieren folgende Äquivalenzrelation

$$T_1 \equiv T_2 \Leftrightarrow \bigwedge_{A \subseteq V} \cdot A_{T_1} = A_{T_2}.$$

Eine besondere Rolle spielen unter den multiplikativ abgeschlossenen Untermengen von R Mengen der Gestalt $S^1 \cap \ldots \cap S^r$, wobei S^i eine prime vollständige Unterhalbgruppe von R ist, für die $S^i \supseteq S_i$ gilt. Falls wir auch $S^i = R$ zulassen, können wir für jede solche Menge $r = n$ annehmen.

Satz 19. *Zu jeder multiplikativ abgeschlossenen Untermenge T von R gibt es $S^1, \ldots, S^n$ mit $S^i \supseteq S_i$ so, daß $T \equiv S^1 \cap \ldots \cap S^n$ gilt.*

Beweis. Für jedes i bilde man folgende Menge von primen vollständigen Unterhalbgruppen von R: $\{S \mid S \supseteq T,\ S \supseteq S_i\}$. Da R zu dieser Menge gehört, ist sie nicht leer. Da sie totalgeordnet ist (s. Satz 3), enthält sie ein minimales Element S^i. Wir bilden nun $T' = S^1 \cap \ldots \cap S^n$. Es gilt $T' \supseteq T$ und deshalb für jedes Ideal A von V stets $A_{T'} \supseteq A_T$.

Wäre nicht $T \equiv T'$, so würde es ein Ideal A geben, für das $A_T \subset A_{T'}$ wäre, d.h. es existierte ein $c \in A_{T'}$ mit $c \notin A_T$. Das bedeutet: $c \cdot x \in A$ für ein $x \notin T'$, jedoch für jedes $y \in T$ stets $c \cdot y \notin A$. In diesem Fall hat man $x^{-1} \cdot y \notin R$, ja sogar wegen Satz 13 $x^{-1} \cdot y \in F_i$ für mindestens ein i. Es muß sogar ein i geben, das von der speziellen Wahl von y nicht abhängt, für das also $x^{-1} \cdot y \notin F_i$ für alle $y \in T$ gilt.

Wäre das nämlich nicht der Fall, dann hätte man für jedes i ein $y_i \in T$ mit $x^{-1} \cdot y_i \in F_i$. Wegen $y_i \in R$ für alle $i = 1, \ldots, n$ würde für das Element $y = y_1 \ldots y_n \in T$ sogar $x^{-1} \cdot y \in F_i$ für alle i gelten und damit $x^{-1} \cdot y \in R$, also $c \cdot y \in A$.

Für das von der speziellen Wahl von y nicht abhängige i bilde man $P_i = \{z \in R \mid z \cdot x^{-1} \in F_i\}$. Man bestätigt mit Hilfe von Satz 12 leicht, daß P_i ein ganzes Primideal von V ist, für das wegen $y \cdot x^{-1} \in P_i$ auch $P_i \neq R$ gilt. $\tilde{S} = R - P_i$ ist also eine prime vollständige Unterhalbgruppe von R, für die $\tilde{S} \supseteq T$ gilt, also $\tilde{S} \supseteq S^k$ für ein gewisses k. Andererseits gilt aber $x \notin \tilde{S}$, jedoch $x \in S^k$ wegen $x \in T'$ mit Widerspruch.

Wir brauchen uns daher nur noch mit multiplikativ abgeschlossenen Systemen der Form $T = S^1 \cap \ldots \cap S^n$ zu befassen; bzw. wenn wir jetzt wieder auf „überflüssige" S^j verzichten, mit Systemen der Form $T = S^1 \cap \ldots \cap S^k$. Wir beweisen:

Satz 20. $A_{S^1 \cap \ldots \cap S^k} = A_{S^1} \cap \ldots \cap A_{S^k}$.

Beweis. Es ist sicher $A_{S^1 \cap \ldots \cap S^k} \subseteq A_{S^1} \cap \ldots \cap A_{S^k}$.

Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion nach k und nehmen an, daß er schon für Systeme $S^1 \cap \ldots \cap S^{k-1}$ bewiesen sei. O. B. d. A. können

wir $S^k \supsetneqq S^i$ für $i=1, \ldots, k-1$ annehmen. Es sei $\tilde{a} \in \tilde{A}$. Man beachte, daß $\tilde{A} \subseteqq A_{S^1 \cap \ldots \cap S^{k-1}}$ gilt. Es gibt also ein $c_1 \in S^1 \cap \ldots \cap S^{k-1}$ mit $c_1 \cdot \tilde{a} \in A$. Ist $c_1 \in S^k$, dann ist auch $c_1 \in S^1 \cap \ldots \cap S^k$ und $\tilde{a} \in A_{S^1 \cap \ldots \cap S^k}$. Es sei $c_1 \notin S^k$. Da $\tilde{a} \in A_{S^k}$ ist, gibt es ein $c_2 \in S^k$ mit $\tilde{a} \cdot c_2 \in A$. Für $c = c_1 \wedge c_2$ hat man daher $c \in S^1 \cap \ldots \cap S^k$ und $\tilde{a} \cdot c \in A$ also $\tilde{a} \in A_{S^1 \cap \ldots \cap S^k}$, was $\tilde{A} \subseteqq A_{S^1 \cap \ldots \cap S^k}$ bedeutet.

V. Zusammenhang mit der Bewertungstheorie

Gegeben sei ein Körper $\mathfrak{K}$, dessen Elemente wir mit $0, 1, a, b, c, \ldots$ bezeichnen, und die endlich vielen allgemeinen Bewertungen[12]) $B_1, \ldots, B_n$ von $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ seien die zugehörigen Bewertungsringe.

Wir nehmen an, daß die Bewertungen paarweise unvergleichbar seien, also stets $\mathfrak{B}_i \supsetneqq \mathfrak{B}_k$ für $i \neq k$ gilt.

Der Gegenstand unserer Untersuchungen ist die Idealtheorie des Ringes $\mathfrak{D} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{B}_i$. Die Gruppe der Hauptideale von $\mathfrak{D}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$.

Die zu $B_1, \ldots, B_n$ gehörigen Wertgruppen mögen $V_1, \ldots, V_n$ heißen. Zu $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B}_k$ gehört stets ein eindeutig bestimmter Bewertungsring $\mathfrak{B}_{ik}$, der kleinste die Ringe $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B}_k$ gleichzeitig umfassende Bewertungsring. Die zugehörige Bewertung B_{ik} heißt feinste gemeinsame Vergröberung von B_i und B_k. $V_{ik} = V_{ki}$ sei die zu B_{ik} gehörende Wertgruppe und ist Bild eines — im Falle $i \neq k$ echten — Ordnungshomomorphismus sowohl von V_i als auch von V_k. Setzen wir zusätzlich $V_{ii} = V_i$ und nehmen die Gruppe $\{1\}$ zu der Menge $\{V_{ik}\}$ hinzu, falls sie nicht schon unter den V_{ik} vorkommt, dann erhalten wir ein Schichtensystem $\mathfrak{W}$ wie in Abschnitt II, das aus den Gruppen V_{ik} besteht und dessen Basisgruppen die $V_1, \ldots, V_n$ sind. Die bezüglich $\mathfrak{W}$ größte restgebundene Untergruppe von $V_1 \times \cdots \times V_n$ nennen wir V. Es gilt der fundamentale von RIBENBOIM [6] zuerst in voller Allgemeinheit bewiesene Unabhängigkeitssatz der Allgemeinen Bewertungstheorie:

SATZ 21. *Falls* $(a) \in \mathfrak{H}$ *ist, dann ist* $\langle B_1(a), \ldots, B_n(a) \rangle \in V$. *Ist* $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle \in V$, *dann gibt es ein* $a \in \mathfrak{K}$ *mit* $B_i(a) = \alpha_i$ *für* $i = 1, \ldots, n$.

Die Zuordnung $(a) \leftrightarrow \langle B_1(a), \ldots, B_n(a) \rangle$ *definiert einen Ordnungsisomorphismus zwischen* $\mathfrak{H}$ *und* V.

Ohne weiteres ergibt sich daraus das folgende

KOROLLAR. *Die Abbildung* $a \to (a) \leftrightarrow \langle B_1(a), \ldots, B_n(a) \rangle$ *ordnet den Elementen von* $\mathfrak{D}$ *genau die Elemente von* R, *die ganzen Elemente von* V, *zu.*

LEMMA 12. *Für jedes* $i = 1, \ldots, n$ *existiert in* V *ein Element* $(1, \ldots, 1, \alpha_i, 1, \ldots, 1)$ *mit* $\alpha_i > 1$.

BEWEIS. Wenn $\alpha_i > 1$ so gewählt wird, daß α_i aus dem Kern des zu V_i in $\mathfrak{W}$ gehörenden Homomorphismus stammt, so ist $(1, \ldots, 1, \alpha_i, 1, \ldots, 1)$ restgebunden. Da dieser Homomorphismus echt ist, besteht der Kern nicht nur aus der 1.

LEMMA 13. *Jedes endlich erzeugbare* $\mathfrak{D}$*-Ideal ist Hauptideal.*

[12]) Siehe KRULL [2].

BEWEIS. Es genügt, die Behauptung für zweifach erzeugte Ideale (a, b) zu beweisen. Wegen Lemma 12 und Satz 21 gibt es zu jedem $i=1, \ldots, n$ ein $d_i \in \mathfrak{D}$ mit $B_i(d_i) > 1$ und $B_k(d_i) = 1$ für $k \neq i$. Durch Multiplikation einer geeigneten Auswahl unter den Elementen $d_1, \ldots, d_n$ läßt sich ein $d \in \mathfrak{D}$ bilden, für das $B_i(d) > 1$ gilt, falls $B_i(a) = B_i(b)$ ist, und $B_i(d) = 1$, falls $B_i(a) \neq B_i(b)$ ist.

Man hat dann $B_i(a + d \cdot b) = \min\big(B_i(a), B_i(b)\big)$ für $i=1, \ldots, n$ und damit ist $(a + db) = (a, b)$.

Wir kommen nun zum Hauptsatz dieses Abschnitts:

SATZ 22. a) *Wenn A ein Ideal von V ist, dann bildet die Menge* $\mathfrak{a} = \{a \in \mathfrak{R} \mid \langle B_1(a), \ldots, B_n(a)\rangle \in A\}$ *ein $\mathfrak{D}$-Ideal in $\mathfrak{R}$.*

b) *Wenn $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{D}$-Ideal in $\mathfrak{R}$ ist, dann bildet die Menge* $A = \{\langle B_1(a), \ldots, B_n(a)\rangle \in V \mid a \in \mathfrak{a}\}$ *ein Ideal von V.*

c) *Die Zuordnung zwischen $\mathfrak{a}$ und A ist umkehrbar eindeutig.*

BEWEIS. a) Ist $a \in \mathfrak{a}$ und $d \in \mathfrak{D}$, dann ist $\langle B_1(d), \ldots, B_n(d)\rangle \in R$ und daraus folgt $a \cdot d \in \mathfrak{a}$.

Es sei $a, b \in \mathfrak{a}$. Dann ist mit $\langle B_1(a), \ldots, B_n(a)\rangle \in A$ und $\langle B_1(b), \ldots, B_n(b)\rangle \in A$ auch $\langle B_1(a) \wedge B_1(b), \ldots, B_n(a) \wedge B_n(b)\rangle \in A$. Es gibt nach Satz 21 ein $c \in \mathfrak{R}$ mit $B_i(c) = B_i(a) \wedge B_i(b)$ für $i=1, \ldots, n$. Für dieses gilt $c \in \mathfrak{a}$, und man hat $\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \in \mathfrak{D}$. Damit ist auch $\frac{a-b}{c} \in \mathfrak{D}$ und $a - b \in \mathfrak{a}$.

b) Wenn $\langle \delta_1, \ldots, \delta_n\rangle \in R$ ist, dann gibt es nach Satz 21 ein $d \in \mathfrak{D}$ mit $B_i(d) = \delta_i$ für $i=1, \ldots, n$. Es gilt dann

$$\langle B_1(d), \ldots, B_n(d)\rangle \cdot \langle B_1(a), \ldots, B_n(a)\rangle = \langle B_1(a \cdot d), \ldots, B_n(a \cdot d)\rangle \in A.$$

Damit ist $A \cdot R \subseteq A$ gezeigt.

Es sei $\langle B_1(a), \ldots, B_n(a)\rangle \in A$ und $\langle B_1(b), \ldots, B_n(b)\rangle \in A$. Dann gibt es nach Lemma 13 ein $c \in \mathfrak{R}$ so, daß $(a, b) = (c)$. Das bedeutet

$$\langle B_1(a) \wedge B_1(b), \ldots, B_n(a) \wedge B_n(b)\rangle = \langle B_1(c), \ldots, B_n(c)\rangle.$$

Wegen $c \in \mathfrak{a}$ folgt damit auch $\langle B_1(a), \ldots, B_n(a)\rangle \wedge \langle B_1(b), \ldots, B_n(b)\rangle \in A$.

c) Unmittelbar aus den Definitionen sieht man, daß die Zuordnung $A \to \mathfrak{a}$ nach Teil a) und $\mathfrak{a} \to A'$ nach Teil b) des Satzes $A = A'$ ergibt. Ebenso zeigt sich, daß bei $\mathfrak{a} \to A$ nach Teil b) und $A \to \mathfrak{a}'$ nach Teil a) stets $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ wird.

Unmittelbar klar ist das folgende

KOROLLAR. *Bei der durch Satz 22 vermittelten Zuordnung gehen ganze Ideale in ganze Ideale, Primideale in Primideale über.*

Der Wert von Satz 22 liegt darin, daß es nun möglich ist, alle Fragen der Idealtheorie von $\mathfrak{D}$ dadurch zu beantworten, daß man zunächst zu entsprechenden Fragen in V übergeht, diese — etwa mit Hilfe von Abschnitt IV — innerhalb von V behandelt und dann wieder in den ursprünglichen Bereich abbildet.

Literatur

[1] JAFFARD, P.: Les systèmes d'idéaux. Travaux et recherches mathématiques Dunod. Paris 1960.

[2] KRULL, W.: Allgemeine Bewertungstheorie. J. reine angew. Math. **167**, 160–196 (1931).

[3] – Zur Theorie der Bewertungen mit nichtarchimedisch geordneter Wertgruppe und der nichtarchimedisch geordneten Körper. CBRM, Colloque d'Algèbre Supérieure. Bruxelles 1956.

[4] LORENZEN, P.: Über halbgeordnete Gruppen. Math. Z. **52**, 483–526 (1949–50).

[5] MÜLLER, D.: Verbandsgruppen und Durchschnitte allgemeiner Bewertungsringe. Inaug.-Dissertation der Math.-Naturw. Fakultät der Universität Bonn 1960.

[6] RIBENBOIM, P.: Le théorème d'approximation pour les valuations de Krull. Math. Z. **68**, 1–18 (1957–58).

Bonn, Endenicher Allee 2

(Eingegangen am 2. Februar 1961)

BREUER, M.
Math. Zeitschr. 77, 63–67 (1961)

Zum Pfaffschen Problem

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

MANFRED BREUER

Einleitung

In [*1*] habe ich einen „Hauptsatz der Charakteristikentheorie von Differentialformen" bewiesen, mit dessen Hilfe das Problem der Konstruktion von Integralmannigfaltigkeiten einer *ausgearteten* Differentialform auf das entsprechende Problem einer *nichtausgearteten* Differentialform zurückgeführt werden konnte. In ähnlicher Weise kann das Pfaffsche Problem einer Pfaffschen Form mit *ausgearteter* Cartanscher Ableitung vermöge dieses Hauptsatzes auf das entsprechende Problem für Pfaffsche Formen mit *nichtausgearteter* Cartanscher Ableitung reduziert werden. Man erhält auf diese Weise eine von den zahlreichen aus der Literatur bekannten Lösungsmethoden abweichende Lösungsmethode des Pfaffschen Problems, die in dieser Arbeit dargestellt wird und etwa folgendermaßen aussieht:

Zunächst wird das Pfaffsche Problem für Pfaffsche Formen ω mit *nichtausgearteter* Cartanscher Ableitung $d\omega$ gelöst. Hierzu benötigt man nur die Theorie der bezüglich $d\omega$ *kanonischen Koordinatensysteme* und einfache Mittel der *linearen Algebra*.

Danach wird das Pfaffsche Problem für Pfaffsche Formen mit *ausgearteter* Cartanscher Ableitung reduziert. Hierzu sei ω die zu untersuchende Pfaffsche Form auf einer hinreichend kleinen Umgebung U einer N-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit; die Cartansche Ableitung $d\omega$ von ω habe den überall konstanten Rang $2m < N$. Mit Hilfe des in [*1*] bewiesenen Hauptsatzes kann eine $2m$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit $\bar{U}$, eine Projektion $\pi: U \to \bar{U}$ und eine Pfaffsche Form $\bar{\omega}$ auf $\bar{U}$ angegeben werden, so daß gilt:

1. $\bar{\omega}$ hat eine *nichtausgeartete* Cartansche Ableitung $d\bar{\omega}$.
2. $\omega - \pi^* \bar{\omega}$ ist *exakt*.

Dabei ist π^* die π in natürlicher Weise zugeordnete Abbildung, die jeder Differentialform auf $\bar{U}$ eine Differentialform auf U zuordnet. Wegen 1. kann das Pfaffsche Problem für $\bar{\omega}$ mit Hilfe der bezüglich $d\omega$ kanonischen Koordinatensysteme gelöst werden. Aus dem Verhalten der Lösungen für $\bar{\omega}$ bei der Abbildung π^* erhält man zunächst die Lösungen des Pfaffschen Problems für $\pi^* \bar{\omega}$ und dann, auf Grund von 2., die Lösungen des Pfaffschen Problems für ω.

Zusammenfassend kann man sagen, daß vermöge des Hauptsatzes von [*1*] die *lokale Theorie des Pfaffschen Problems* für Differentialformen 1. Grades mit Cartanscher Ableitung von überall konstantem Rang vollständig auf die Theorie der *kanonischen Koordinatensysteme* zurückgeführt werden kann.

§ 1. Der Hauptsatz der Charakteristikentheorie

Sei α eine Differentialform r-ten Grades auf der N-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{V}^N$. Der *charakteristische Vektorraum Zentr* α_p von α im Punkte $p \in \mathfrak{V}^N$ ist der Vektorraum aller Tangentiale X_p von $\mathfrak{V}^N$ in p, für die gilt: Sind $X_p^1, \ldots, X_p^{r-1}$ Tangentiale von $\mathfrak{V}^N$ in p, so ist

$$\alpha_p(X_p, X_p^1, \ldots, X_p^{r-1}) = 0. \tag{1.1}$$

Die Abbildung *Zentr* α, die jedem $p \in \mathfrak{V}^N$ den Vektorraum *Zentr* α_p zuordnet, heißt das *charakteristische Vektorraumfeld* von α. Wir sagen, α habe einen konstanten *Rang* (etwa M), wenn für alle $p \in \mathfrak{V}^N$ *Zentr* α_p die gleiche Dimension (nämlich $N-M$) hat. Insbesondere heißt α *nichtausgeartet*, wenn α den konstanten Rang N hat. Im folgenden habe α stets den konstanten Rang M. — Aus [*1*], § 2, Satz 1 folgt leicht:

SATZ 1. *Gilt für alle* $p \in \mathfrak{V}^N$

$$Zentr\,\alpha_p \subseteqq Zentr\,(d\alpha_p), \tag{1.2}$$

wobei $d\alpha$ *die Cartansche Ableitung von* α *ist, so ist Zentr* α *integrabel.*

Ist *Zentr* α integrabel, so heißt die zugehörige geblätterte Struktur die *charakteristische geblätterte Struktur* und ihre Blätter die *Charakteristiken* von α. Jetzt werde angenommen, daß *Zentr* α integrabel ist und daß die Menge $\overline{\mathfrak{V}}$ aller Charakteristiken von α so zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{V}}^M$ gemacht werden kann, daß gilt:

1. Die Topologie von $\overline{\mathfrak{V}}^M$ ist die Quotiententopologie von $\overline{\mathfrak{V}}$ bezüglich $\mathfrak{V}^N$.

2. Die kanonische Abbildung $\pi: \mathfrak{V}^N \to \overline{\mathfrak{V}}^M$ ist differenzierbar und von maximalem Rang.

$\overline{\mathfrak{V}}^M$ heißt die *charakteristische Quotientenmannigfaltigkeit* von $\mathfrak{V}^N$.

Der in [*1*] S. 144 ff. bewiesene Hauptsatz der Charakteristikentheorie lautet

SATZ 2. *Auf* $\overline{\mathfrak{V}}^M$ *existiert dann und nur dann eine Differentialform* $\bar{\alpha}$ *vom Range* M *mit*

$$\alpha = \pi^* \bar{\alpha}, \tag{1.3}$$

wenn (1.2) *gilt. Existiert ein solches* $\bar{\alpha}$, *so ist dieses eindeutig bestimmt.*

Für die Anwendung auf das Pfaffsche Problem benötigen wir noch die folgenden beiden Corollare:

COROLLAR 1. Ist $d\alpha \doteq 0$, so ist $d\bar{\alpha} = 0$.

Dieses Corollar ist eine einfache Folge aus der Tatsache, daß der Rang von $\bar{\alpha}$ maximal ist.

COROLLAR 2. *Gibt es ein* ω *und ein* $\overline{\omega}$ *mit* $\alpha = d\omega$ *und* $\bar{\alpha} = d\overline{\omega}$, *so ist* $d(\omega - \pi^* \overline{\omega}) = 0$.

BEWEIS. $d(\omega - \pi^* \overline{\omega}) = d\omega - d\pi^* \overline{\omega} = d\omega - \pi^* d\overline{\omega} = \alpha - \pi^* \bar{\alpha} = 0$.

§ 2. Lösung des Pfaffschen Problems für Pfaffsche Formen mit nichtausgearteter Cartanscher Ableitung

Das Pfaffsche Problem lautet (vgl. CARATHÉODORY [2], S. 121 ff.): Ist ω eine Differentialform auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $\mathfrak{B}^N$, und ist $p \in \mathfrak{B}^N$, so ist eine Umgebung U von p und eine Darstellung von ω in U von der Gestalt

$$\omega|_U = d\Omega + y_1 d x_1 + \cdots + y_m d x_m \tag{2.1}$$

gesucht, wobei Ω, $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$ differenzierbare reellwertige Funktionen und die Zahl m so klein wie möglich sein soll. Ist m minimal, so heißt m der *Index* von ω in einer Umgebung von p. Die Zahl $2m$ bzw. $2m+1$ heißt die *Klasse* von ω, je nachdem ob die Darstellung (2.1) so gewählt werden kann, daß $d\Omega = 0$ ist oder nicht.

Der folgende Satz gibt eine Lösung dieses Problems für Pfaffsche Formen mit nichtausgearteter Cartanscher Ableitung:

SATZ 3. *Ist der Rang der Cartanschen Ableitung $d\omega$ der Pfaffschen Form ω auf der differenzierbaren $2m$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{B}^{2m}$ überall gleich $2m$, so ist die Klasse von ω überall gleich $2m$.*

Zum Beweis benötigen wir zwei Sätze über kanonische Koordinatensysteme:

SATZ 4. *Ist α eine Differentialform 2. Grades vom Range $2m$ auf $\mathfrak{B}^{2m}$, und ist $d\alpha = 0$, so gibt es zu jedem $p \in \mathfrak{B}^{2m}$ eine Umgebung U und ein Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$ auf U mit*

$$\alpha|_U = d x_1 \wedge d y_1 + \cdots + d x_m \wedge d y_m. \tag{2.2}$$

Ein Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$, für das (2.2) gilt, heißt kanonisch bezüglich α. Satz 4 besagt also, daß für geschlossene nichtausgeartete Differentialformen 2. Grades stets kanonische Koordinatensysteme existieren. Der Beweis ist bei CARATHÉODORY [2], S. 143 ff. zu finden.

SATZ 5. *Ist $x_1', \ldots, x_m'$, $y_1', \ldots, y_m'$ ein kanonisches Koordinatensystem in einer Umgebung des Punktes $p \in \mathfrak{B}^{2m}$, und ist Ω eine differenzierbare Funktion in einer Umgebung von p, so existiert ein kanonisches Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$ in einer Umgebung von p mit*

$$y_1 d x_1 + \cdots + y_m d x_m = y_1' d x_1' + \cdots + y_m' d x_m' + d\Omega. \tag{2.3}$$

BEWEIS. Siehe CARATHÉODORY [2], S. 97!

Mit Hilfe der Sätze 4 bis 5 kann Satz 3 leicht bewiesen werden: Zunächst sei nach Satz 4 $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$ ein kanonisches Koordinatensystem in einer Umgebung von p bezüglich $d\omega$. Dann ist $\omega - y_1 d x_1 - \cdots - y_m d x_m$ in einer Umgebung von p exakt. Nach Satz 5 kann man sich das Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$ so gewählt denken, daß

$$\omega = y_1 d x_1 + \cdots + y_m d x_m \tag{2.4}$$

ist. Angenommen, die Klasse von ω sei $2m'$ oder $2m'+1$ mit $m'<m$. Dann gibt es eine Darstellung von ω von der Gestalt

$$\omega = d\psi + g_1 df_1 + \cdots + g_{m'} df_{m'}.$$

Da m' der Index von ω ist, sind die Funktionen $f_1, \ldots, f_{m'}$ funktional unabhängig. In jeder Umgebung von p existiert daher ein q mit der Eigenschaft, daß

$$\mathfrak{W}_q^{2m-m'} = \{q' \mid f_1 q' = f_1 q, \ldots, f_{m'} q' = f_{m'} q\}$$

in einer Umgebung von q zu einer differenzierbaren $(2m-m')$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\mathfrak{V}^{2m}$ gemacht werden kann. Ist $\iota: \mathfrak{W}_q^{2m-m'} \to \mathfrak{V}^{2m}$ die Injektion einer dieser Untermannigfaltigkeiten in $\mathfrak{V}^{2m}$, so ist $\iota^*\alpha = \iota^* d\omega = d(\iota^*\omega) = d0 = 0$. $\mathfrak{W}_q^{2m-m'}$ ist also eine Integralmannigfaltigkeit von α. Nun ist aber die Dimension einer Integralmannigfaltigkeit einer Differentialform 2. Grades von maximalem Rang auf einer $2m$-dimensionalen Mannigfaltigkeit höchstens gleich m [1]. Also ist $2m-m' \leqq m$ und folglich $m \leqq m'$, was der obigen Annahme $m'<m$ widerspricht.

§ 3. Lösung des Pfaffschen Problems für Pfaffsche Formen mit ausgearteter Cartanscher Ableitung

Um das Pfaffsche Problem allgemein zu lösen, benötigen wir noch zwei Sätze, die angeben, wie sich die Klassen Pfaffscher Formen bei differenzierbaren Abbildungen verhalten.

SATZ 6. *Ist $\varphi: \mathfrak{V}^N \to \mathfrak{W}^M$ eine differenzierbare Abbildung der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{V}^N$ in die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{W}^M$, und ist η eine Pfaffsche Form auf $\mathfrak{W}^M$, so ist die Klasse von $\varphi^*\eta$ im Punkte $p \in \mathfrak{V}^N$ höchstens gleich der Klasse von η im Punkte $\varphi p \in \mathfrak{W}^M$.*

Der Beweis ist trivial: Ist $\eta = d\Omega + g_1 df_1 + \cdots + g_m df_m$, so ist $\varphi^*\eta = d(\Omega \circ \varphi) + (g_1 \circ \varphi) d(f_1 \circ \varphi) + \cdots + (g_m \circ \varphi) d(f_m \circ \varphi)$, woraus die Behauptung folgt.

Zweimalige Anwendung von Satz 6 liefert den

SATZ 7. *Gibt es unter den Voraussetzungen von Satz 6 überdies noch einen differenzierbaren Schnitt von $\mathfrak{W}^M$ durch den Punkt $p \in \mathfrak{V}^N$, d.h. eine differenzierbare Abbildung $\psi: \mathfrak{W}^M \to \mathfrak{V}^N$, so daß $p \in \psi(\mathfrak{W}^M)$ und $\varphi \circ \psi$ die identische Abbildung von $\mathfrak{W}^M$ ist, so ist die Klasse von η im Punkte φp gleich der Klasse von $\varphi^*\eta$ im Punkte p.*

Sei jetzt ω eine Pfaffsche Form auf $\mathfrak{V}^N$, von der wir eine Kurzdarstellung und die Klasse in einer Umgebung des Punktes $p \in \mathfrak{V}^N$ bestimmen wollen! Hierzu werde noch vorausgesetzt, daß die Cartansche Ableitung $\alpha = d\omega$ von ω in einer Umgebung von p den konstanten Rang $2m = M < N$ hat [2].

Wegen $d\alpha = ddw = 0$ ist die Bedingung (1.2) von Satz 1 und von Satz 2 erfüllt. Daher existiert nach Satz 1 die charakteristische geblätterte Struktur

[1] Trivialer Spezialfall des in [2] S. 147 bewiesenen Hilfssatzes!

[2] Das Verhalten der Lösungen des Pfaffschen Problems für ω in der Umgebung singulärer Punkte von $d\omega$ wird hier also nicht studiert!

von α. Jetzt sei U so klein gewählt, daß die charakteristische Quotientenmannigfaltigkeit $\bar{U}$ der Einschränkung $\alpha|_U$ von α auf U existiert. $\pi: U \to \bar{U}$ sei die kanonische Abbildung. Nach Satz 2 existiert ein $\bar{\alpha}$ auf $\bar{U}$ mit $\alpha = \pi^* \bar{\alpha}$. Nach Corollar 1 von Satz 2 ist $d\bar{\alpha} = 0$. Da wir hier nur lokale Untersuchungen machen, können wir annehmen, es gebe ein $\bar{\omega}$ mit $\bar{\alpha} = d\bar{\omega}$. Die Klasse von $\bar{\omega}$ ist nach Satz 3 gleich $2m$. Sei

$$\bar{\omega} = \bar{y}_1 d\bar{x}_1 + \cdots + \bar{y}_m d\bar{x}_m. \tag{3.1}$$

Da es durch den Punkt $p \in U$ lokale differenzierbare Schnitte von $\bar{U}$ in U gibt, ist nach Satz 7 die Klasse von $\pi^* \bar{\omega}$ gleich $2m$. Nach Corollar 2 von Satz 2 ist $\omega - \pi^* \bar{\omega}$ geschlossen. Wegen des lokalen Charakters unserer Untersuchungen können wir wieder annehmen, daß eine Funktion Ω existiert mit

$$d\Omega = \omega - \pi^* \bar{\omega}, \tag{3.2}$$

Ist Ω längs den Charakteristiken von α konstant, d.h. gibt es ein $\bar{\Omega}$ auf $\bar{U}$ mit $\Omega = \bar{\Omega} \circ \pi$, so kann man nach Satz 5 ein kanonisches Koordinatensystem $\bar{x}'_1, \ldots, \bar{x}'_m, \bar{y}'_1, \ldots, \bar{y}'_m$ auf $\bar{U}$ finden mit

$$\bar{y}_1 d\bar{x}_1 + \cdots + \bar{y}_m d\bar{x}_m + d\bar{\Omega} = \bar{y}'_1 d\bar{x}'_1 + \cdots + \bar{y}'_m d\bar{x}'_m. \tag{3.3}$$

Dann ist die Klasse von ω gleich $2m$ und

$$\omega = y'_1 dx'_1 + \cdots + y'_m dx'_m \tag{3.4}$$

eine Normaldarstellung, wobei $y'_i = \bar{y}'_i \circ \pi$, $x'_i = \bar{x}'_i \circ \pi$, $i = 1, \ldots, m$ gesetzt ist.

Ist dagegen Ω nicht konstant längs den Charakteristiken von α, so ist die Klasse von ω gleich $2m+1$ und

$$\omega = y_1 dx_1 + \cdots + y_m dx_m + d\Omega \tag{3.5}$$

eine Normaldarstellung, wobei jetzt $y_i = \bar{y}_i \circ \pi$, $x_i = \bar{x}_i \circ \pi$, $i = 1, \ldots, m$ gesetzt ist. In diesem Falle kann es keine Darstellung der Gestalt (3.4) geben. Denn gäbe es eine solche, so wäre

$$\begin{aligned} d\Omega &= (y'_1 dx'_1 + \cdots + y'_m dx'_m) - (y_1 dx_1 + \cdots + y_m dx_m) \\ &= \pi^* \left((\bar{y}'_1 d\bar{x}'_1 + \cdots + \bar{y}'_m d\bar{x}'_m) - (\bar{y}_1 d\bar{x}_1 + \cdots + \bar{y}_m d\bar{x}_m) \right). \end{aligned}$$

$d\Omega$ wäre also Bild einer Differentialform von $\bar{U}$ vermöge π^*, und folglich wäre Ω konstant längs den Charakteristiken von α entgegen der obigen Annahme.

Literatur

[1] Breuer, M.: Verallgemeinerung der Cauchyschen Charakteristikentheorie. J. reine u. angewandte Mathematik **204**, 139–151 (1960).

[2] Carathéodory, C.: Variationsrechnung. Berlin u. Leipzig 1935.

Bonn a. Rh., Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 8. März 1961)

HOEHNKE, H.-J.
Math. Zeitschr. 77, 68–80 (1961)

Über die Erzeugung von monomialen Gruppendarstellungen durch Brandtsche Gruppoide

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidme

Von

HANS-JÜRGEN HOEHNKE

Einleitung

Jedem Gruppoid Γ kann eine durch Γ eindeutig bestimmte Gruppe $\mathfrak{T}(\Gamma)$ als (zweiseitiger) Γ-Operatorenbereich zugeordnet werden, deren Elemente rechts- bzw. linksseitig angewandt, eineindeutige Abbildungen von Γ auf sich, also Permutationen der Elemente von Γ hervorrufen. Eine invariante Definition der Elemente von $\mathfrak{T}(\Gamma)$ lautet: Jedes Element $t \in \mathfrak{T}(\Gamma)$ ist ein in Γ enthaltener Komplex einander nicht (d. h. weder rechts noch links) zugehöriger Elemente, deren Rechtseinheiten wie Linkseinheiten sämtliche Einheiten von Γ durchlaufen. Demnach ist jedes t ein maximaler Komplex einander nicht zugehöriger Elemente von Γ; ist Γ ein endliches Gruppoid, so gilt auch die Umkehrung. Die Multiplikation in der Gruppe $\mathfrak{T}(\Gamma)$ wie die rechts- und linksseitige äußere Verknüpfung zwischen Γ und $\mathfrak{T}(\Gamma)$ sind durch die gewöhnliche Komplexmultiplikation in Γ definiert. Die Gruppe $\mathfrak{T}(\Gamma)$ wurde als Permutationsgruppe schon von A. LOEWY [3] betrachtet und wird daher die Loewysche Gruppe des Gruppoids Γ genannt. Stellt man Γ in der Symbolik von Abschnitt 2 als Matrizengruppoid $G \times S_I$ dar, so läßt sich $\mathfrak{T}(G \times S_I)$ auch als Gruppe monomialer Matrizen auffassen. Dann sind alle inneren und äußeren Verknüpfungen mit der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation identisch.

Von zahlreichen weiteren Arbeiten, die sich mit den Gruppeneigenschaften von $\mathfrak{T}(\Gamma)$ als Permutationsgruppe bzw. monomiale Gruppe beschäftigen, seien hier nur die folgenden erwähnt: [4] (Erzeugendensysteme und definierende Relationen), [5] (Struktur) und [6], [9] (Darstellungstheorie). Für $\mathfrak{T}(G \times S_I)$ wird in [4] und [9] das Symbol $\mathfrak{S}_I(G)$ verwendet. O. ORE [5, p. 17] nennt diese Gruppe die volle monomiale Gruppe $\Sigma_I(G)$ vom Grad $|I|$ oder auch die Symmetrie vom Grad $|I|$ der Gruppe G. Bei G. PÓLYA [7, p. 178], der stattdessen das Symbol $\mathfrak{S}_I[G]$ benutzt, findet sich dafür der Name Gruppenkranz (vgl. auch [1]).

Nähere Einzelheiten über die Verwendung der Loewyschen Gruppe in der Theorie der Gruppoide werden später mitgeteilt. Die Aufgabe der vorliegenden Note besteht darin, die zweiseitige äußere Verknüpfung eines Gruppoides mit seiner Loewyschen Gruppe in die Theorie der (H, G)-Systeme $\mathfrak{A}$ einzuordnen, deren Definition in Abschnitt 1 gegeben wird. Während man in [10, p. 128], wo diese Systeme zur Gewinnung von monomialen Darstellungen, also

homomorphen Abbildungen einer Gruppe G in eine volle monomiale Gruppe, eingeführt wurden, voraussetzt, daß die Gruppe G rechtsseitig transitiv auf die Menge $\mathfrak{A}$ wirkt, haben wir den Fall eines in einem beliebigen (H, G)-System $\mathfrak{A}$ enthaltenen (H, H)-Teilsystems $\mathfrak{A}_H$ zu betrachten, dessen rechts- und linksseitige Intransitivität sich derart „ausgleicht", daß jedes rechtsseitige Transitivitätsgebiet mit jedem linksseitigen Transitivitätsgebiet einen nichtleeren Durchschnitt hat. Faßt man ein (H, H)-System $\mathfrak{A}_H$ in natürlicher Weise auf als eine Menge mit dem (äußeren) direkten Produkt $H \times H^0$ als Linksoperatorenbereich, wo H^0 die zu H antiisomorphe Gruppe bezeichnet, so ist die genannte Forderung gleichbedeutend damit, daß $\mathfrak{A}_H$ transitiv bezüglich $H \times H^0$ sein soll. Jedoch wird hier von dieser Deutung weiter kein Gebrauch gemacht. Jedes Gruppoid Γ ist bezüglich $H = G = \mathfrak{T}(\Gamma)$ ein solches System $\mathfrak{A}_H$. Umgekehrt erhält man nach Hinzunahme weiterer Bedingungen, denen auch dieses Beispiel genügt, eine Familie von intransitiven (H, H)-Systemen $\mathfrak{A}_H$, so daß jedes System $\mathfrak{A}_H$ mit einem gewissen Gruppoid Δ identifiziert werden darf. Die Gruppoide Δ sind dabei als $(\mathscr{H}^*, \mathscr{H})$-Systeme aufzufassen, wo $\mathscr{H}^*$, $\mathscr{H}$ zwei geeignete zu H isomorphe Untergruppen der Loewyschen Gruppe $\mathfrak{T}(\Delta)$ sind. So wird z.B. vorausgesetzt, daß rechtsseitige und linksseitige Transitivitätsgebiete von $\mathfrak{A}_H$ in gleicher Anzahl (Kardinalzahl) auftreten. $H \subseteqq G$ wird zugelassen, weil der Hauptsatz (Satz 13) in dieser (verglichen mit dem Fall $H = G$) allgemeineren Fassung eine direkte Anwendung auf die Darstellung der Teilgruppoide eines Gruppoids Γ als Faktorgruppoide gewisser Untergruppen von $\mathfrak{T}(\Gamma)$ gestattet, wie später gezeigt werden kann. Spezielle Anwendung auf obiges Beispiel $\mathfrak{A}_H = \Gamma$ ergibt natürlich $\Gamma \cong \Delta$, $\mathfrak{T}(\Gamma) \cong \mathscr{H} = \mathscr{H}^* = \mathfrak{T}(\Delta)$.

Die Rückführung von $\mathfrak{A}_H$ auf Δ beruht darauf, daß für Δ das mit der rechtsseitigen G-Fixgruppe U eines Elementes $A \in \mathfrak{A}_H$ gebildete Faktorgruppoid H/U gewählt werden kann. Während die rechtsseitige Wirkung von $\mathscr{H}$ auf H/U stets durch diejenige von H auf H/U ersetzt werden darf, ist die analoge Ersetzung der linksseitigen Wirkung von $\mathscr{H}^*$ auf H/U nicht immer möglich, da $H \to \mathscr{H}^* \subseteqq \mathfrak{T}(H/U)$ eine komplizierte monomiale Darstellung ist, die sich nur dann vereinfacht, wenn eine weitere zusätzliche Bedingung erfüllt ist. Die Darstellung $H \to \mathscr{H}^*$ ist transitiv im Sinne von O. Ore [*5*, p. 57]. Daß ihrer Erzeugung im Unterschied zu [*5*] und [*10*, p. 128] auch ein intransitives System $\mathfrak{A}_H$ zugrunde gelegt werden kann, mag zunächst vielleicht etwas überraschend erscheinen. Eine Erklärung hierfür findet sich im letzten Abschnitt.

1. Intransitive Systeme

Es bezeichne $\mathfrak{A}$ eine Menge von Elementen $A, B, \ldots$ und G eine Gruppe von Elementen $x, y, \ldots$ und mit dem Einselement e. Nach einer gegebenen Verknüpfungsvorschrift sei für jedes Paar $A \in \mathfrak{A}$, $x \in G$ eindeutig das Produkt Ax erklärt. Ebenso sei eine zweite Verknüpfung gegeben, nach der für jedes Paar $A \in \mathfrak{A}$, $y \in H$, wobei H eine feste Untergruppe von G bezeichnet, eindeutig das Produkt yA erklärt ist. Die Menge aller Produkte Ax bzw. yA werde mit $\mathfrak{A}G$ bzw. $H\mathfrak{A}$ bezeichnet. Wir machen vier Voraussetzungen:

I. $\mathfrak{A}$ ist ein (H, G)-*System*[1]), d.h. es bestehen die folgenden Regeln.

Ia. $\mathfrak{A}G \subseteqq \mathfrak{A}$, $H\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{A}$.

Ib. *Assoziativität* von

$$\mathfrak{A}GG, \qquad HH\mathfrak{A}, \qquad H\mathfrak{A}G$$

(gemeint sind hierbei die Regeln $A(x_1 x_2) = (A x_1) x_2$ $(A \in \mathfrak{A},\ x_i \in G)$, ..., usw.).

Ic. *Identität.* Für alle A ist $Ae = eA = A$. (Die allgemeine Definition eines (H, G)-Systems, die sich nicht darauf beschränkt, daß H eine Untergruppe von G ist, erhält man, wenn hierin eA durch $e'A$ ersetzt wird, wo e' die Eins der Gruppe H ist.)

II. Zu H gehöre eine Teilmenge $\mathfrak{A}_H$ von $\mathfrak{A}$ und eine Einteilung der Elemente von $\mathfrak{A}_H$ in fremde, nichtleere Komplexe $\mathfrak{A}_{ik}$ $(i, k \in I)$

$$\begin{array}{c} \mathfrak{A}_{11}, \ldots, \mathfrak{A}_{1\tau}, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{A}_{\tau 1}, \ldots, \mathfrak{A}_{\tau\tau}, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots, \end{array}$$

so daß die Vereinigungsmenge jeder Zeile (Spalte) ein rechtsseitiges (bzw. linksseitiges) Transitivitätsgebiet von H darstellt. I ist eine Indexmenge beliebiger Mächtigkeit $|I|$; wir dürfen annehmen, daß I die Zahlen $1, 2, \ldots, \tau$ enthält, falls $|I| \geqq \tau$ [2]).

Eine solche Einteilung kann man auch als Durchschnitt rechts- und linksseitiger Transitivitätsgebiete von H auf der Menge $\mathfrak{A}_H$ auffassen. Die Komplexe $\mathfrak{A}_{ik}$ sollen daher *Transitivitätsdurchschnitte* genannt werden.

Aus diesen Annahmen ergeben sich bereits einige einfache Folgerungen. Da nach II. insbesondere

$$\mathfrak{A}_H H \subseteqq \mathfrak{A}_H, \qquad H\mathfrak{A}_H \subseteqq \mathfrak{A}_H$$

sein soll, so ist $\mathfrak{A}_H$ ein (H, H)-System. Aus jedem Komplex $\mathfrak{A}_{i_1}$ wähle man ein Element A_i $(i \in I)$ und bilde die *rechtsseitige Fixgruppe* U_i von A_i in G, das ist diejenige Untergruppe von G, die bezüglich der Eigenschaft $A_i U_i = A_i$ maximal ist. Wegen $(x A_i) U_i = x A_i$ läßt U_i auch alle Elemente der Komplexe mit dem Spaltenindex i fest. Nach II. gibt es Elemente $a_i, b_i \in H$, so daß $A_i = a_i A_1 b_i$ wird. Es folgt

$$A_i b_i^{-1} U_1 b_i = a_i A_1 U_1 b_i = a_i A_1 b_i = A_i,$$

also $b_i^{-1} U_1 b_i \subseteqq U_i$; entsprechend ist $b_i U_i b_i^{-1} \subseteqq U_1$ und daher

$$U_i = b_i^{-1} U_1 b_i \qquad (i \in I). \tag{1}$$

Die Reihe[3]) $A_1, \ldots, A_\tau, \ldots$ soll eine *Diagonale von* $\mathfrak{A}_H$ heißen. Es sei x irgendein Element von H. Dann existiert nach II. ein Element $y \in H$ und ein

[1]) Vgl. [*10*, p. 128].

[2]) Diese Vereinbarung ermöglicht auch bei unendlichem I eine anschauliche und bequeme Ausdrucksweise; sie bedeutet nicht etwa, daß dann obiges Schema nur abzählbar viele Zeilen und Spalten haben soll. Man kann die Menge I auch als wohlgeordnet voraussetzen.

[3]) Man beachte Fußnote 2.

Index j, so daß $A_1 x = y A_j$ oder $A_j = y^{-1} A_1 x$. Genauso wie bei (1) folgt $x^{-1} U_1 x = U_j$, d.h. die Gruppen U_i $(i \in I)$ bilden ein vollständiges System zu $U = U_1$ bezüglich H konjugierter Untergruppen von G.

Die Annahmen I. und II. werden durch zwei vereinfachende Zusatzbedingungen verschärft:

III. Durch die Abbildung $A \to A x$ und ebenso durch die Abbildung $A \to x A$ $(A \in \mathfrak{A}_H, x \in H)$ soll x eindeutig bestimmt sein; d.h. $A x = A$ sowie auch $x A = A$ für alle $A \in \mathfrak{A}_H$ und beliebiges, aber festes $x \in H$ soll (unter Hinzunahme von Ic.) $x = e$ nach sich ziehen. Die erste Hälfte dieser Forderung ist gleichbedeutend mit

$$\bigcap_{i \in I} U_i \cap H = \{e\}.$$

IV. Die Untergruppen U_i $(i \in I)$ sollen paarweise verschieden sein.

Für $|I| = 1$ ist IV. trivialerweise erfüllt, und für $|I| = 2$ ist IV. wegen III. erfüllt, falls $U_1 \cap H \neq \{e\}$ ist.

Ein System $\mathfrak{A}$, das die Forderungen I. bis IV. erfüllt, soll kurz als (H, G)-*System mit intransitivem Teilsystem* $\mathfrak{A}_H$ bezeichnet werden.

Da $\mathfrak{A}_H$ ein (H, H)-System ist, so sind die zu einem Element $y \in H$ gehörigen Abbildungen $X \to X y$ und $X \to y^{-1} X$ $(X \in \mathfrak{A}_H)$ von $\mathfrak{A}_H$ Permutationen der Elemente von $\mathfrak{A}_H$. Da man alle Elemente von $\mathfrak{A}_H$ erhält, wenn in $A_i x$ i bzw. x die Elemente von I bzw. H durchläuft (wobei im allgemeinen jedes Element von $\mathfrak{A}_H$ mehrmals auftritt), so kann man diese Permutationen auch in der Form

$$\mathfrak{p}\, y = \begin{pmatrix} A_i x \\ A_i x\, y \end{pmatrix}, \quad y \mathfrak{p} = \begin{pmatrix} A_i x \\ y^{-1} A_i x \end{pmatrix}$$

schreiben. Aus III. ergibt sich, daß die Abbildungen $y \to \mathfrak{p}\, y$ und $y \to y \mathfrak{p}$ treue Darstellungen von H sind. Damit hat man den

Satz 1. *Ist $\mathfrak{A}_H$ ein zu H gehöriges intransitives Teilsystem eines (H, G)-Systems $\mathfrak{A}$, so gestattet H zwei treue intransitive Darstellungen $\mathfrak{p} H$ und $H \mathfrak{p}$ durch Permutationen der Elemente von $\mathfrak{A}_H$:*

$$H \ni y \to \mathfrak{p}\, y = \begin{pmatrix} A_i x \\ A_i x\, y \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} H, \qquad H \ni y \to y \mathfrak{p} = \begin{pmatrix} A_i x \\ y^{-1} A_i x \end{pmatrix} \in H \mathfrak{p}.$$

Dabei sind die Zeilen des Schemas der $\mathfrak{A}_{i_k}$ die Transitivitätsgebiete von $\mathfrak{p} H$ und die Spalten die Transitivitätsgebiete von $H \mathfrak{p}$.

Sind H, U Untergruppen einer Gruppe G, so kann man das in [2, Teil II] eingeführte Faktorgruppoid H/U bilden. Seine Elemente sind die Komplexe $y U x$ von G $(y, x \in H)$, oder mit anderen Worten die Nebenklassen $U_i x$ $(i \in I, x \in H)$, wobei U_i die voneinander verschiedenen zu $U = U_1$ unter H konjugierten Untergruppen $y^{-1} U y$ von G durchläuft.

Nimmt man

$$(U_i x) \circ y = U_i x y, \qquad y \circ (U_i x) = y U_i x$$

als äußere Verknüpfung zwischen H/U und H ($(\circ)$ wird also auf die gewöhnliche Multiplikation der Elemente eines Komplexes $U_i x$ von rechts bzw. links mit einem Element y zurückgeführt), so wird H/U zu einem (H, H)-System. Für den in Satz 1 betrachteten Fall ergibt sich mit Rücksicht auf III.:

SATZ 2. *Die Untergruppe H gestattet zwei treue Darstellungen $\mathfrak{p}H$ und $H\mathfrak{p}$ durch Permutationen der Elemente des Faktorgruppoids H/U:*

$$H \ni y \to \mathfrak{p}y = \begin{pmatrix} U_i x \\ U_i x y \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}H, \qquad H \ni y \to y\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} U_i x \\ y^{-1} U_i x \end{pmatrix} \in H\mathfrak{p}.$$

In der Folge wird sich der Zusammenhang von $\mathfrak{p}H$ mit $\mathfrak{p}H$ und von $H\mathfrak{p}$ mit $H\mathfrak{p}$ aufklären.

In einem (H, G)-System $\mathfrak{A}$ mit intransitivem $\mathfrak{A}_H$ soll das Teilsystem $\mathfrak{A}_H$ *diagonalisiert* heißen, wenn die oben betrachtete Diagonale $A_1, \ldots, A_\tau, \ldots$ von $\mathfrak{A}_H$ bei allen Transformationen mit Elementen aus H in sich übergeht, d.h. wenn für jedes $x \in H$ die Reihe $x^{-1}A_1 x, \ldots, x^{-1}A_\tau x, \ldots$ bis auf ihre Anordnung mit $A_1, \ldots, A_\tau, \ldots$ übereinstimmt[4]).

2. Die Loewysche Gruppe

In [2, Teil I, Abschnitt 3] wird gezeigt, daß jedes Gruppoid zu einem Matrizengruppoid isomorph ist. Daher dürfen wir im folgenden von einem Gruppoid ausgehen, das als Matrizengruppoid, also nach [2, Teil II] als direktes Produkt $\Gamma = G \times S_I$ gegeben ist, wo G eine Gruppe und $S_I = \{e_{ik} \mid i, k \in I\}$ ein schlichtes Gruppoid ist. Die Elemente (g, e_{ik}) von Γ schreiben wir mit Auslassung der Klammern in der Form $g\,e_{ik}$ und setzen $g\,e_{ik} = e_{ik}\,g$ $(i, k \in I)$. Das Produkt $f\,e_{ik} \cdot g\,e_{jk}$ existiert genau dann, wenn $h = j$; sein Wert ist $fg\,e_{ik}$. Es sei t ein in Γ enthaltener Komplex, bestehend aus einander nicht zugehörigen Elementen, deren Rechtseinheiten sämtliche Einheiten $e\,e_{ii}$ $(i \in I)$ von Γ durchlaufen; das gleiche gelte auch bezüglich der Linkseinheiten der zu t gehörigen Elemente. Solche Komplexe wurden bereits von F. K. SCHMIDT [8, p. 95] eingeführt; sie können in der Form

$$\mathfrak{t} = \{t_i e_{i j_i} \mid t_i \in G,\ i \in I\}$$

geschrieben werden, wo

$$\begin{pmatrix} 1, \ldots, \tau, \ldots \\ j_1, \ldots, j_\tau, \ldots \end{pmatrix} = \tau$$

eine Permutation aus der (uneingeschränkten) symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_I$ ist. Wir benutzen dafür auch die abgekürzte Schreibweise

$$\mathfrak{t} = \langle t_i e_{i, i\tau} \rangle \qquad (i\tau = j_i;\ i \in I).$$

Die Gesamtheit dieser Komplexe sei $\mathfrak{T}(\Gamma)$. Dann gilt der

[4]) Durch Transformation mit $\begin{pmatrix} U_i x \\ x^{-1} U_i \end{pmatrix}$ erkennt man sofort, daß $\mathfrak{p}H$ und $H\mathfrak{p}$ sich nur in der Benennung der Glieder unterscheiden. Ist $\mathfrak{A}_H$ diagonalisiert, so geht auch $\mathfrak{p}H$ durch Transformation mit $\begin{pmatrix} A_i x \\ x^{-1} A_i \end{pmatrix}$ in $H\mathfrak{p}$ über.

SATZ 3. *Die Menge $\mathfrak{T}(\Gamma)$ ist mit der Komplexmultiplikation als Kompositionsgesetz eine Gruppe. Ist Γ ein endliches Gruppoid der Ordnung $|G|$ (= Ordnung von G) und vom Rang $|I|$, so hat $\mathfrak{T}(\Gamma)$ die Ordnung $|G|^{|I|}\,|I|!$.*

BEWEIS. Ist $\mathfrak{s}=\langle s_i\, e_{i,i\sigma}\rangle$ ein zweiter Komplex, so wird (mit $i(\sigma\tau)=(i\sigma)\tau$)

$$\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}=\langle s_i\, e_{i,i\sigma}\rangle\langle t_{i\sigma}\, e_{i\sigma,(i\sigma)\tau}\rangle=\langle s_i\, t_{i\sigma}\, e_{i,i(\sigma\tau)}\rangle. \tag{2}$$

$\mathfrak{T}(\Gamma)$ hat $\mathfrak{e}=\langle e e_{ii}\rangle$ als Eins, und $\mathfrak{t}$ hat $\mathfrak{t}^{-1}=\langle t_i^{-1} e_{i\tau,i}\rangle$ als Inverses. Die Ordnung von $\mathfrak{T}(\Gamma)$ bestimmt man durch einfache Abzählung.

Die Gruppe $\mathfrak{T}(\Gamma)$ soll *Loewysche Gruppe* des Gruppoids Γ heißen. Sie tritt (im endlichen Fall) bei LOEWY [3] als eine gewisse Permutationsgruppe $\mathfrak{P}^*$ auf, wobei auch ihre Ordnung angegeben wurde [3, p. 253, Z. 2]. Man vergleiche dazu ferner den nachstehenden Satz 5.

Mit $X\mathfrak{t}$ bzw. $\mathfrak{t}X$ werde das Komplexprodukt $\{X\}\mathfrak{t}$ bzw. $\mathfrak{t}\{X\}$ bezeichnet. Dadurch ist eine (äußere) Verknüpfung des Gruppoids Γ von rechts und links mit der Gruppe $\mathfrak{T}(\Gamma)$ definiert, für die offenbar $\Gamma\,\mathfrak{T}(\Gamma)$, $\mathfrak{T}(\Gamma)\,\Gamma\subseteqq\Gamma$ gilt. Werden die Elemente von Γ als Matrizen aufgefaßt, so lassen sich diese äußeren Verknüpfungen wie die Multiplikation in $\mathfrak{T}(\Gamma)$ isomorph wiedergeben, wenn man die Komplexe $\mathfrak{t}$ als monomiale Matrizen deutet. Hieraus erkennt man die Richtigkeit von

SATZ 4. *Jedes Gruppoid $\Gamma=G\times S_I$ ist bezüglich der zweiseitigen Verknüpfung mit seiner Loewyschen Gruppe $\mathfrak{T}(\Gamma)$ ein diagonalisiertes intransitives $(\mathfrak{T}(\Gamma), \mathfrak{T}(\Gamma))$-System mit den Transitivitätsdurchschnitten $\mathfrak{A}_{ik}=Ge_{ik}$ und der Diagonalen $A_i=ee_{ii}$ $(i\in I)$.*

Aus den Sätzen 1 und 4 ergibt sich der

SATZ 5. *Die Loewysche Gruppe $\mathfrak{T}(\Gamma)$ eines Gruppoids Γ besitzt zwei treue intransitive Darstellungen $\mathfrak{p}\mathfrak{T}(\Gamma)$ und $\mathfrak{T}(\Gamma)\mathfrak{p}$ durch Permutationen der Elemente X von Γ:*

$$\mathfrak{T}(\Gamma)\ni\mathfrak{t}\to\mathfrak{p}\mathfrak{t}=\begin{pmatrix}X\\ X\mathfrak{t}\end{pmatrix}\in\mathfrak{p}\mathfrak{T}(\Gamma),\qquad \mathfrak{T}(\Gamma)\ni\mathfrak{t}\to\mathfrak{t}\mathfrak{p}=\begin{pmatrix}X\\ \mathfrak{t}^{-1}X\end{pmatrix}\in\mathfrak{T}(\Gamma)\mathfrak{p}.$$

Die Transitivitätsgebiete von $\mathfrak{p}\mathfrak{T}(\Gamma)$ bzw. $\mathfrak{T}(\Gamma)\mathfrak{p}$ sind $\bigcup_{k\in I} Ge_{ik}$ $(i\in I)$ bzw. $\bigcup_{i\in I} Ge_{ik}$ $(k\in I)$.

3. Rechtsseitige Wirkung von H auf $\mathfrak{A}_H$

Es soll die Wirkung der Elemente von H als rechtsseitige Operatoren des intransitiven Teilsystems $\mathfrak{A}_H$ eines (H, G)-Systems $\mathfrak{A}$ untersucht werden. Zu der Diagonalen $A_1, \ldots, A_\nu, \ldots$ von $\mathfrak{A}_H$ mögen die Fixgruppen $U_1=U, \ldots, U_\nu, \ldots$ gehören. Dann gilt zunächst der

SATZ 6. *Die Zuordnung $A_i x\to U_i x$ $(i\in I,\ x\in H)$ vermittelt eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathfrak{A}_H$ auf das Faktorgruppoid H/U.*

BEWEIS. Genau die Elemente von $\mathfrak{A}_H$ bzw. H/U sind von der Form $A_i x$ bzw. $U_i x$ $(i\in I,\ x\in H)$. Aus $x, y\in H$ und

$$\begin{array}{ccc} A_i x & = & A_k y \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_i x & & U_k y \end{array}$$

folgt $i=k$, da für $i \neq k$ nach II. stets auch $A_i x \neq A_k y$ ist. Daher wird $A_i = A_i y x^{-1}$, $y x^{-1} = u \in U_i$ und $U_k y = U_i y = U_i u x = U_i x$. — Aus

$$\begin{array}{cc} A_i x & A_k y \\ \downarrow & \downarrow \\ U_i x & = U_k y \end{array}$$

folgt $U_i = U_k y x^{-1}$, $y x^{-1} = u \in U_i$, $U_i = U_k$ und damit nach IV. auch $i=k$ und weiter $A_k y = A_i y = A_i u x = A_i x$.

SATZ 7. *Die Abbildung $A_i x \to U_i x$ $(i \in I,\ x \in H)$ ist operatortreu bezüglich der Untergruppe H als rechtsseitigem Operatorenbereich von $\mathfrak{A}_H$ und von H/U, d.h. für $y \in H$ ist $(A_i x) y \to (U_i x) y$.*

BEWEIS. Es ist

$$(A_i x)\, y = A_i (x y) \to U_i (x y) = (U_i x)\, y .$$

Aus Satz 7 ist zu ersehen, daß die in Satz 1 und Satz 2 vorkommenden Permutationsgruppen $\mathfrak{p}H$ und pH sich nur durch die Benennung ihrer Glieder unterscheiden, m.a.W. entspricht der rechtsseitigen Wirkung von H auf $\mathfrak{A}_H$ eineindeutig die rechtsseitige Wirkung von H auf H/U. Statt sich auf die äußere Verknüpfung von H/U mit H zu stützen, kann man auch die in Abschnitt 2 erklärte äußere Verknüpfung von H/U mit seiner Loewyschen Gruppe heranziehen. Es gilt nämlich der

SATZ 8. *Die Zuordnung*

$$H \ni x \to \mathfrak{x} = \{U_i x \mid i \in I\}$$

stellt eine isomorphe Abbildung von H auf die Gruppe $\mathfrak{H}$ der Systeme $\mathfrak{x}$ dar. $\mathfrak{H}$ ist eine Untergruppe der Loewyschen Gruppe $\mathfrak{T}(H/U)$ des Faktorgruppoids H/U.

BEWEIS. Aus $x, y \in H$ und

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathfrak{x} & = \mathfrak{y} \end{array}$$

ergibt sich $U_i x = U_{j_i} y$, also $U_i = U_{j_i} y x^{-1}$ $(i \in I)$ und

$$y x^{-1} = d \in \bigcap_{i \in I} U_i \cap H .$$

Wegen III. muß $d = e$, $y = x$ sein. — Die Gruppen $x^{-1} U_i x$ $(i \in I)$ sind für $x \in H$ bis auf die Indizierung identisch mit den Gruppen U_i $(i \in I)$. Daher kann $\mathfrak{x}$ auch in der Form

$$\mathfrak{x} = \{x U_i \mid i \in I\}$$

geschrieben werden, so daß hinsichtlich der Komposition in $\mathfrak{T}(H/U)$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \{x U_i y \mid i \in I\} = \{U_i x y \mid i \in I\}$$

und $x y \to \mathfrak{x}\mathfrak{y}$ wird.

SATZ 9. *Die Abbildungen*

$$A_i x \to U_i x \quad (i \in I,\ x \in H) \quad \textit{und} \quad y \to \mathfrak{y} = \{U_i y \mid i \in I\}$$

von $\mathfrak{A}_H$ auf H/U und von H auf $\mathscr{H}$ haben die Eigenschaft, daß $(A_i x)\,\mathfrak{y} \to (U_i x)\,\mathfrak{y}$ gilt, d.h. der rechtsseitigen Wirkung von H auf $\mathfrak{A}_H$ entspricht eineindeutig die rechtsseitige Wirkung von $\mathscr{H} \subseteq \mathfrak{T}(H/U)$ auf H/U.

BEWEIS. Für $U_i x \in H/U$ ist

$$U_i x\,\mathfrak{y} = U_i x\, x^{-1} U_i x\, y = U_i x\, y.$$

Denn das einzige Element des Systems $\mathfrak{y}$, mit welchem $U_i x$ komponierbar bezüglich der in H/U erklärten Verknüpfung ist, ist das Element $x^{-1} U_i x y$, dessen Linkseinheit $x^{-1} U_i x$ gerade die Rechtseinheit von $U_i x$ ist.

4. Linksseitige Wirkung von H auf $\mathfrak{A}_H$

Ähnlich der rechtsseitigen Wirkung kann auf H/U auch die linksseitige Wirkung von H auf $\mathfrak{A}_H$ übertragen werden. Gemäß II. sind nämlich für jedes Element $x \in H$ die Gleichungen

$$x A_i = A_{k_i} x_i^* \qquad (i \in I)$$

mit $x_i^* \in H$ und mit eindeutig durch x bestimmten Indizes k_i lösbar. Daraus erhält man zunächst den

SATZ 10. *Die Zuordnung*

$$H \ni x \to \mathfrak{x}^* = \{x_i^* U_i \mid i \in I\}$$

ist eine isomorphe Abbildung von H auf die Gruppe $\mathscr{H}^*$ der Systeme $\mathfrak{x}^*$. Die Gruppe $\mathscr{H}^*$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{T}(H/U)$.

BEWEIS. Aus $x, y \in H$ und

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathfrak{x}^* & \mathfrak{y}^* \end{array}$$

ergeben sich mit $y A_i = A_{l_i} y_i^*$ der Reihe nach die Beziehungen

$$A_{k_i} x_i^* = A_{l_i} y_i^*, \qquad k_i = l_i, \qquad A_i (x_i^*)^{-1} y_i^* = A_i,$$
$$(x_i^*)^{-1} y_i^* = u_i \in U_i, \qquad y_i^* U_i = x_i^* u_i U_i = x_i^* U_i$$

und somit $\mathfrak{y}^* = \mathfrak{x}^*$. Umgekehrt folgt aus

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathfrak{x}^* & = \mathfrak{y}^* \end{array}$$

die Beziehung $x_i^* U_i = y_{j_i}^* U_{j_i}$, wonach $U_i = (x_i^*)^{-1} y_{j_i}^* U_{j_i}$, $(x_i^*)^{-1} y_{j_i}^* = u_i \in U_i$ und $U_{j_i} = u_i^{-1} U_i = U_i$, also auch $j_i = i$ $(i \in I)$ ist, da stets $U_i \neq U_k$ für $i \neq k$ sein muß. Demnach wird $y_i^* = x_i^* u_i$. Weiter ist

$$A_{k_i} x_i^* U_i (x_i^*)^{-1} = x A_i U_i (x_i^*)^{-1} = x A_i (x_i^*)^{-1} = A_{k_i}.$$

Daher gilt $U_{k_i} = x_i^* U_i (x_i^*)^{-1}$, und ebenso ist $U_{l_i} = y_i^* U_i (y_i^*)^{-1}$. Folglich wird

$$U_{l_i} = x_i^* u_i U_i u_i^{-1} (x_i^*)^{-1} = x_i^* U_i (x_i^*)^{-1} = U_{k_i}$$

und somit $l_i = k_i$. Hiernach ist $y A_i = A_{l_i} y_i^* = A_{k_i} x_i^* u_i$, d.h. $y A_i = y A_i u_i^{-1} = x A_i$, bzw. $x^{-1} y A_i = A_i$ $(i \in I)$, so daß im Hinblick auf III. $x^{-1} y = e$ bzw. $y = x$ wird. Ferner ist

$$x y A_i = x A_{l_i} y_i^* = A_{k_{l_i}} x_{l_i}^* y_i^*,$$

also

$$x y \to \{x_{l_i}^* y_i^* U_i \mid i \in I\}.$$

Andererseits ist bezüglich der Komposition in $\mathfrak{T}(H/U)$

$$\mathfrak{x}^* \mathfrak{y}^* = \{x_{l_i}^* y_i^* U_i \mid i \in I\},$$

da bezüglich der in H/U erklärten Verknüpfung

$$(x_{l_i}^* U_{l_i})(y_i^* U_i) = x_{l_i}^* y_i^* U_i (y_i^*)^{-1} y_i^* U_i = x_{l_i}^* y_i^* U_i$$

gilt. Damit erhält man $x y \to \mathfrak{x}^* \mathfrak{y}^*$.

SATZ 11. *Für die zwei Abbildungen*

$$A_i x \to U_i x \quad (i \in I,\ x \in H) \quad \textit{und} \quad y \to \mathfrak{y}^* = \{y_i^* U_i \mid i \in I\}$$

von $\mathfrak{A}_H$ auf H/U und von H auf $\mathscr{H}^*$ gilt die Regel $y(A_i x) \to \mathfrak{y}^*(U_i x)$, d.h. der linksseitigen Wirkung von H auf $\mathfrak{A}_H$ entspricht eineindeutig die linksseitige Wirkung von $\mathscr{H}^* \subseteq \mathfrak{T}(H/U)$ auf H/U.

BEWEIS. Wegen $y A_i x = A_{l_i} y_i^* x \to U_{l_i} y_i^* x$ und

$$\mathfrak{y}^* U_i x = y_i^* U_i x = y_i^* U_i (y_i^*)^{-1} y_i^* x = U_{l_i} y_i^* x$$

ist $y A_i x \to \mathfrak{y}^* U_i x$.

SATZ 12. *Die Gruppe $\mathscr{H}^*$ besitzt eine treue Darstellung $\mathscr{H}^* \mathfrak{p}$ durch Permutationen der Elemente des Faktorgruppoids H/U,*

$$\mathscr{H}^* \ni \mathfrak{y}^* \to \mathfrak{y}^* \mathfrak{p} = \begin{pmatrix} U_i x \\ (\mathfrak{y}^*)^{-1} U_i x \end{pmatrix} \in \mathscr{H}^* \mathfrak{p}.$$

Genau dann ist $\mathscr{H}^* \mathfrak{p} = H \mathfrak{p}$, wenn es zu jedem Element $y \in H$ ein von i nicht abhängiges Element $y^* \in H$ gibt, welches den Bedingungen

$$y A_i = A_{l_i} y^* \qquad (i \in I)$$

mit von y abhängigen Indizes l_i genügt. Genau dann ist

$$\mathfrak{y}^* \mathfrak{p} = y \mathfrak{p} \qquad (\mathfrak{y}^* \leftarrow y \in H),$$

wenn das Teilsystem $\mathfrak{A}_H$ diagonalisiert bezüglich $A_1, \ldots, A_r, \ldots$ ist; und dann ist sogar $\mathfrak{y}^* = \mathfrak{y}$.

BEWEIS. Den ersten Teil dieses Satzes entnimmt man mit Rücksicht auf die (H, H)-Systemeigenschaft von $\mathfrak{A}_H$ aus obigem Satz 11. Der restliche Teil der Behauptungen kann durch einfache Überlegungen unmittelbar bestätigt werden.

Die Sätze 6 bis 12 ergeben den zusammenfassenden

SATZ 13 (HAUPTSATZ). *Die zweiseitige Wirkung der Untergruppe $H \subseteq G$ auf ein intransitives (H, H)-Teilsystem $\mathfrak{A}_H \subseteq \mathfrak{A}$ läßt sich isomorph beschreiben durch*

das Faktorgruppoid H/U (von H nach einer Fixgruppe $U \subseteqq G$), aufgefaßt als ein $(\mathfrak{H}^*, \mathfrak{H})$-System, wobei $\mathfrak{H}^*$ und $\mathfrak{H}$ zwei zu H isomorphe Untergruppen der Loewyschen Gruppe $\mathfrak{T}(H/U)$ sind. Hierbei kann die rechtsseitig auf H/U wirkende Gruppe $\mathfrak{H}$ auch durch H ersetzt werden. Der durch $\mathfrak{y}^* \leftarrow y \rightarrow \mathfrak{y}$ $(\mathfrak{H}^* \cong H \cong \mathfrak{H})$ gegebene Isomorphismus $\mathfrak{H}^* \cong \mathfrak{H}$ ist genau dann der identische Automorphismus, wenn $\mathfrak{A}_H$ diagonalisiert ist. In diesem Fall kann auch die linksseitig auf H/U wirkende Gruppe $\mathfrak{H}^*$ durch H ersetzt werden. Ist das System $\mathfrak{A}$ ein Gruppoid, dessen Einheitenmenge die Diagonale $A_1, \ldots, A_\nu, \ldots$ enthält und dessen Teilsystem $\mathfrak{A}_H$ diagonalisiert ist, und genügen die Komplexe $\mathfrak{A}_H \mathfrak{A}_H H$ und $H \mathfrak{A}_H \mathfrak{A}_H$ den Assoziativbedingungen (in ähnlichem Sinne wie bei Ib.), *so ist obige Zuordnung zwischen $\mathfrak{A}_H$ und H/U sogar ein Isomorphismus (und folglich $\mathfrak{A}_H$ ein Teilgruppoid von $\mathfrak{A}$). Insbesondere ist dann auch $\mathfrak{A}_H H \mathfrak{A}_H$ assoziativ.*

Bei diesem Satz bleibt nur der letzte Teil der Behauptungen noch zu beweisen. Es seien $A_i x$, $A_k y$ $(x, y \in H)$ irgend zwei komponierbare Elemente von $\mathfrak{A}_H$. Mit $x^{-1} A_i x = A_j$ wird dann

$$(A_i x)(A_k y) = [x(x^{-1} A_i x)](A_k y)$$
$$= [(x A_j) A_k] y = [x(A_j A_k)] y.$$

Danach muß $j = k$ sein. Man erhält $(A_i x)(A_k y) = x A_k y$. Bei der Zuordnung $A_i x \rightarrow U_i x$, die einen Operatorisomorphismus von $\mathfrak{A}_H$ auf H/U bezüglich des zweiseitigen Operatorenbereichs H darstellt, geht A_i in U_i über; somit wird $x A_k y$ auf $x U_k y$ und $x^{-1} A_i x = A_k$ auf $x^{-1} U_i x = U_k$ abgebildet. Folglich existiert auch das Produkt $(U_i x)(U_k y) = x U_k y$. Daher gilt $(A_i x)(A_k y) \rightarrow (U_i x)(U_k y)$. Die umgekehrte Beziehung läßt sich ganz entsprechend beweisen.

5. Erzeugung monomialer Darstellungen

Das der Erzeugung der transitiven monomialen Darstellung $H \rightarrow \mathfrak{H}^* \subseteqq \mathfrak{T}(H/U)$ dienende Verfahren aus Abschnitt 4 unterscheidet sich wesentlich von der bisher bekannten Erzeugungsart ([5] oder [10, p. 128]). Beide Verfahren sind jedoch enthalten in einer allgemeinen Methode der Erzeugung monomialer Darstellungen einer Gruppe H, die wir jetzt erläutern, und zwar der Kürze halber ohne Zwischenschaltung der (H, G)-Systeme $\mathfrak{A}$.

Es sei $\{W_i\}_{i \in I}$ ein System von Komplexen einer Gruppe G. (Die W_i entsprechen der Wahl von Diagonalelementen A_i eines (H, G)-Systems $\mathfrak{A}$.) In G mögen drei Untergruppen H, K, H^* fest ausgewählt werden, wobei H^* im Normalisator von K enthalten sei. Zu jedem Paar $x \in H$, $i \in I$ sei die Gleichung

$$x W_i = W_{xi} x_i^* \tag{3}$$

nach $xi \in I$ und $x_i^* \in H^*$ auflösbar. Der Index xi sei durch x und i eindeutig bestimmt. Aus $W_i = W_j$ folgen nacheinander die Gleichungen

$$x W_i = W_{xi} x_i^* \quad = x W_j \quad = W_{xj} x_j^*, \qquad xi = xj,$$
$$x^{-1} W_{xi} = W_i (x_i^*)^{-1} = x^{-1} W_{xj} = W_j (x_j^*)^{-1}, \qquad i = j.$$

Daher sind die Komplexe W_i $(i \in I)$ paarweise verschieden. Ebenso ergibt sich aus $xi = xj$, daß auch $i = j$ ist. Demnach ist $i \to xi$ eine eineindeutige Abbildung, und zwar auf I, wie man mittels der weiter unten bewiesenen Relation $(xy)j = x(yj)$ zeigen kann. (Setzt man $j = x^{-1}i$, so wird $xj = ei = i$.) Mit U_i bzw. V_i bezeichnen wir die rechtsseitige Fixgruppe von W_i in K. bzw. n H^* und nehmen an, daß

$$V_i \leqq U_i \qquad (i \in I). \tag{4}$$

Wegen

$$W_{xi}\, x_i^*\, U_i (x_i^*)^{-1} = x W_i\, U_i (x_i^*)^{-1} = x W_i (x_i^*)^{-1} = W_{xi}$$

und

$$W_i (x_i^*)^{-1}\, U_{xi}\, x_i^* = x^{-1} W_{xi}\, U_{xi}\, x_i^* = x^{-1} W_{xi}\, x_i^* = W_i$$

ist

$$x_i^*\, U_i (x_i^*)^{-1} \leqq U_{xi}, \qquad (x_i^*)^{-1}\, U_{xi}\, x_i^* \leqq U_i.$$

Zwischen U_i und U_{xi} besteht somit die wichtige Beziehung

$$U_{xi} = x_i^*\, U_i (x_i^*)^{-1}. \tag{5}$$

Hiernach ist

$$x \to m_x = (x_j^*\, U_j\, \delta_{i,xj}) \tag{6}$$

(wo das angeschriebene Element der Matrix m_x an der Stelle (i, j) steht und δ_{ik} das Kronecker-Symbol ist) eine homomorphe Abbildung, die wir in Erweiterung der bisher üblichen Erklärung gleichfalls eine *monomiale Darstellung von H* nennen. Ihre *Multiplikatoren* $x_i^*\, U_i$ sind im allgemeinen nicht mehr Elemente einer Gruppe, sondern als Elemente der Faktorgruppoide H^*/U_i $(i \in I)$ zu betrachten. Zwei solche Faktorgruppoide sind entweder fremd oder identisch.

Die behauptete Abbildungseigenschaft der Zuordnung (6) ergibt sich wie folgt. Wenn mit einem weiteren Element $y \in H$

$$y \to m_y = (y_j^*\, U_j\, \delta_{i,yj})$$

und $x = y$ ist, so erhält man nach einfacher Zwischenrechnung mit $xj = yj$ und unter Beachtung von (4): $x_j^*\, U_j = y_j^*\, U_j$ und damit auch $m_x = m_y$. Wegen

$$(xy)\, W_j = x(y\, W_j) = x W_{yj}\, y_j^* = W_{x(yj)}\, x_{yj}^*\, y_j^* = W_{(xy)j}\, (xy)_j^*$$

gilt $(xy)j = x(yj)$ und

$$\begin{aligned} xy \to m_{xy} &= \left((xy)_j^*\, U_j\, \delta_{i,(xy)j}\right) \\ &= \left(x_{yj}^*\, y_j^*\, U_j\, \delta_{i,x(yj)}\right) = m_x\, m_y. \end{aligned}$$

Je zwei Multiplikatoren aus m_x und m_y, die bei der Bildung von $m_x m_y$ multipliziert werden, gehören offenbar zum gleichen Faktorgruppoid.

Analog der klassischen Theorie lassen sich die intransitiven monomialen Darstellungen, also diejenigen mit einer intransitiven Permutationsdarstellung

$$H \ni x \to \begin{pmatrix} xi \\ i \end{pmatrix} \tag{7}$$

aus transitiven monomialen Darstellungen zusammensetzen. Wir betrachten nun vier Beispiele, in denen durchweg angenommen wird, daß (7) eine transitive Permutationsdarstellung von H ist. In den zwei ersten Spezialisierungen sei außerdem $\{W_i\}_{i\in I}$ ein System von rechts- oder linksseitigen Restklassen von G nach (eventuell verschiedenen) Untergruppen U_i' von G, die wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit in der Form $W_i = g_i U_i'$ $(g_i \in G)$ schreiben dürfen. Dann gilt offenbar $U_i = K \cap U_i'$ und $V_i = H^* \cap U_i'$.

1) Es sei $G = H$ und $K = H^*$. Ferner sei $U_1' = N$ Normalteiler von K, so daß (wegen (3)) $N = U_i' = U_i = V_i$, $W_i = g_i N$ wird. Aus (3) ist weiter zu ersehen, daß die Zerlegung

$$H = \bigcup_{i\in I} g_i K \tag{8}$$

besteht und $g_i K \neq g_j K$ für $i \neq j$ ist. Es handelt sich hierbei also um die bisher übliche Erzeugung ([5] und [10, p. 128]) der transitiven monomialen Darstellung $x \to m_x$ von H in $\mathfrak{S}_I(K/N)$.

2) Es sei $G = K$ und $H = H^*$. Dann wird $U_i = U_i'$ und $W_i = g_i U_i$. Nach weiterer Spezialisierung reduziert sich dieser Fall auf unsere Vorschrift zur Erzeugung von $H \to \mathscr{H}^*$, wobei $x \to m_x$ mit $x \to \mathfrak{x}^* = \{x_i^* U_i \mid i \in I\}$ zu identifizieren ist. Dieses Resultat wird in den folgenden Beispielen auf beliebige (gemäß (3) miteinander verbundene) Komplexe W_i erweitert.

3) Wir setzen voraus, daß die Fixgruppen U_i paarweise verschieden sind. Wegen (5) ist $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Einheitenteilmenge des Faktorgruppoids H^*/U $(U = U_1)$ und bestimmt als solche ein maximales Teilgruppoid $\Delta \subseteq H^*/U$, in welchem sie die genaue Einheitenmenge ist. Offenbar hat $x_i^* U_i \in H^*/U$ die Rechtseinheit U_i und die Linkseinheit U_{x_i}. Folglich ist das System $\mathfrak{x}^* = \{x_i^* U_i \mid i \in I\}$ ein Element der Loewyschen Gruppe $\mathfrak{T}(\Delta)$. Weiter ist $m_x \to \mathfrak{x}^*$ eine isomorphe Abbildung auf eine Untergruppe $\mathscr{H}^* \subseteq \mathfrak{T}(\Delta)$ und die durch $x \to m_x \to \mathfrak{x}^*$ gegebene Abbildung $H \to \mathscr{H}^*$ eine transitive monomiale Darstellung von H in $\mathfrak{T}(\Delta)$. Die linksseitige Wirkung von H auf $\{W_i\}_{i\in I}$ kann durch diejenige von $\mathscr{H}^*$ auf $\{U_i\}_{i\in I}$ ersetzt werden. Die so erzeugte Darstellung $H \to \mathscr{H}^*$ ist nach der allgemeinen Theorie zu einer nach Beispiel 1) erzeugten Darstellung äquivalent (vgl. das nächste Beispiel).

4) Nun sei zugelassen, daß einige der Fixgruppen U_i identisch sein dürfen. Da (7) transitiv sein soll, so gehören die Multiplikatoren von (6) zum gleichen Faktorgruppoid H^*/U $(U = U_1)$. Es zeigt sich, daß (6) auch jetzt noch zu einer nach 1) erzeugten (im üblichen Sinn transitiven) monomialen Darstellung von H äquivalent ist. Für K bzw. N kann man in 1) z. B.

$$K^1 = \{x \mid x \in H,\ x1 = 1\} \quad \text{bzw.} \quad N^1 = \{x \mid x \in K^1,\ x_1^* = e\} \tag{9}$$

wählen. Man bestimmt dann Elemente $g_i \in H$ so, daß

$$g_i 1 = i \qquad (i \in I)$$

wird und erhält die (disjunkte) Restklassenzerlegung

$$H = \bigcup_{i\in I} g_i K^1.$$

Aus den Gleichungen

$$x(g_i N^1) = (g_{xi} N^1)\, g_{xi}^{-1}\, x\, g_i N^1 \qquad (x \in H,\ i \in I)$$

gewinnt man für H die monomiale Darstellung

$$x \to m_x^1 = (g_{xj}^{-1}\, x\, g_j N^1\, \delta_{i,xj}), \tag{10}$$

deren Multiplikatoren offenbar zur Faktorgruppe K^1/N^1 gehören. Den Zusammenhang zwischen (6) und (10) stellt die isomorphe Abbildung

$$m_x \to m_x^1$$

her. Daneben folgt hieraus: *Wenn die Fixgruppen U_i $(i \in I)$, wie in Beispiel 3, verschieden sind, so sind die monomialen Darstellungen $x \to \mathfrak{x}^*$ und $x \to m_x^1$ äquivalent* (was natürlich jetzt auch aus einem bekannten Satz der Theorie der monomialen Darstellungen [*10*, p. 128] gefolgert werden kann), *und der explizite Zusammenhang beider Darstellungen wird durch den Isomorphismus $m_x^1 \to m_x \to \mathfrak{x}^*$ gegeben.*

Literatur

[*1*] FRUCHT, R.: Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes. Rev. Unión Matem. Argentina **8**, 42–69 (1942).

[*2*] HOEHNKE, H.-J.: Zur Theorie der Gruppoide I, II. Math. Nachr. 1961/2 (im Druck).

[*3*] LOEWY, A.: Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen. J. reine angew. Math. **157**, 239–254 (1927).

[*4*] NEUMANN, B.: Die Automorphismengruppe der freien Gruppen. Math. Ann. **107**, 367–386 (1932).

[*5*] ORE, O.: Theory of monomial groups. Trans. Amer. Math. Soc. **51**, 15–64 (1942).

[*6*] OSIMA, M.: On the representations of the generalized symmetric group, I; II. Math. J. Okayama Univ. **4**, 39–56 (1954); **6**, 81–97 (1956).

[*7*] PÓLYA, G.: Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta math. Uppsala **68**, 145–254 (1937).

[*8*] SCHMIDT, F. K.: Bemerkungen zum Brandtschen Gruppoid. Sitzungsber. Heidelberg **1927**, 8. Abh., 91–103.

[*9*] SPECHT, W.: Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe. Schriften Mathem. Sem. u. Inst. Angew. Math. Univ. Berlin **1**, H. 1, 1–32 (1932).

[*10*] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. Leipzig 1937.

Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin,
Institut für Reine Mathematik

(Eingegangen am 16. März 1961)

HAUPT, O.
Math. Zeitschr. 77, 81–93 (1961)

Ordnungsgeometrische Limessätze in kompakten Räumen

I. Mitteilung: Komponentenordnungswerte

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22.9.1961 gewidmet

Von

OTTO HAUPT

Einleitung

Bekannt ist (vgl. [1][1])): Im euklidischen E_n, $n \geqq 2$, besitzt der Limes C einer Folge von (gleichmäßig beschränkten) Kontinuen C_n, deren schwache (Komponenten- bzw. Punkt-) Ordnungswerte den endlichen unteren Limes m besitzen, selbst einen schwachen (Komponenten- bzw. Punkt-) Ordnungswert $\leqq m$; Ordnungscharakteristiken sind dabei die Hyperebenen des E_n. Diese Limessätze gelten allgemeiner in metrischen kompakten Räumen R (denen sich der E_n als Spezialfall einordnet) und zwar bezüglich gewisser Systeme von abgeschlossenen Mengen K als Ordnungscharakteristiken, die ziemlich willkürlich wählbar sind, insofern nämlich an die K verhältnismäßig geringe Anforderungen gestellt werden; diese laufen im wesentlichen darauf hinaus, daß R durch eine solche Ordnungscharakteristik K in zwei fremde offene Teile gespalten wird und daß gewisse Paare von Punkten aus R durch geeignet gewählte K sich trennen lassen.

Nachstehend soll diese Verallgemeinerung für den Fall zunächst des *Komponenten*ordnungswertes bewiesen werden; und zwar nicht nur für Verallgemeinerungen R des E_n, sondern, etwas weitergehend, für kompakte metrische Räume P, denen sich der projektive Raum P_n einordnet. Dabei wird jeder Raum P durch Wegnahme einer Ordnungscharakteristik zu einem Raum R. Die von den Ordnungscharakteristiken zu fordernden „Trennungseigenschaften" können noch in verschiedener Weise formuliert werden; dies führt zu zwei Limessätzen. Diese beiden Limessätze ergänzen sich gegenseitig; der erste (§3) entspricht nämlich — grob gesprochen — etwa dem Fall, daß im P_n das System $\mathfrak{k}$ der Ordnungscharakteristiken keine Büschel von Hyperebenen enthält (oder doch nicht zu enthalten braucht), während sich der zweite (§4) für den Spezialfall des P_n gerade auf den Fall bezieht, daß in $\mathfrak{k}$ (mindestens) ein Büschel vorhanden ist.

In den Limessätzen kann im allgemeinen die Voraussetzung nicht entbehrt werden, sowohl daß es sich um *schwache* Ordnungswerte handelt als auch daß der untere Limes der Ordnungswerte der C_n endlich ist (vgl. [2], Nr. 1.4., Anmerkung (1) und (2)).

[1]) Ziffern in eckiger Klammer im Text verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Note.

Der Fall des schwachen *Punkt*ordnungswertes ist einer weiteren Mitteilung vorbehalten. Der erste Limessatz für Räume R wurde in [2] angezeigt. Dort ist auch der Zusammenhang mit dem Blaschkeschen Satz über (konvergente) Folgen konvexer Körper besprochen und die Fragestellung durch verschiedene Beispiele erläutert.

§ 1. Grundraum P und Ordnungscharakteristiken K

1.1. Der *Grundraum* P, in welchem sich sämtliche Betrachtungen abspielen, sei ein metrischer (in sich) kompakter Raum. Mit $U_\mathfrak{p}(M;\varepsilon)$ sei die ε-Umgebung einer Menge $M \subset P$ bezeichnet. Der Raum $\mathfrak{a}$ der Kompakta in P ist selbst metrisch und kompakt, wenn als Entfernung von $A', A'' \in \mathfrak{a}$ erklärt wird $\inf\left(\varepsilon;\, A'' \subset U_\mathfrak{p}(A';\varepsilon),\, A' \subset U_\mathfrak{p}(A'';\varepsilon)\right)$ (vgl. z.B. [4], Nr. 6.3.4.4., Satz 2); die ε-Umgebung von A in $\mathfrak{a}$ bezeichnen wir mit $U_\mathfrak{a}(A;\varepsilon)$. Zur Unterscheidung nennen wir ein $U_\mathfrak{p}(A;\varepsilon)$ bzw. $U_\mathfrak{a}(A;\varepsilon)$ auch eine $\mathfrak{p}$- bzw. $\mathfrak{a}$-*Umgebung* von A. Zu jeder $\mathfrak{p}$-Umgebung V von $A \in \mathfrak{a}$ gehören $\mathfrak{a}$-Umgebungen U von A derart, daß aus $A' \in U$ folgt $A' \subset V$. Im Sinne der Metrik in P bzw. in $\mathfrak{a}$ oder also der $\mathfrak{p}$- bzw. $\mathfrak{a}$-Umgebungen ist der Ausdruck „*benachbart* in P bzw. in $\mathfrak{a}$" oder „$\mathfrak{p}$- bzw. $\mathfrak{a}$-benachbart" zu verstehen.

1.2. *Axiome betr. Grundraum und Ordnungscharakteristiken.*

Als System $\mathfrak{k}$ von *Ordnungscharakteristiken*, abgekürzt: OCh, bezeichnen wir jedes Teilsystem von $\mathfrak{a}$, das folgende Bedingungen erfüllt:

($\mathfrak{k}$) Kein $K \in \mathfrak{k}$ ist Teilmenge eines von K verschiedenen $K' \in \mathfrak{k}$, insbesondere ist $K \neq \emptyset$ für jedes $K \in \mathfrak{k}$. Zu jedem Punkt $x \in P$ existiert (mindestens) eine OCh K mit $x \in \mathsf{C}(K) = P - K$.

Für den durch eine beliebige OCh K_0 bestimmten (offenen) Unterraum $R_0 = \mathsf{C}(K_0)$ von P soll gelten:

(Sp) *Spaltbarkeit von R_0 durch die OCh:* Bei beliebigem $K \in \mathfrak{k}$ ist $R_0 - K = R_0(K;+) \cup R_0(K;-)$ eine Spaltung in die beiden nicht leeren, offenen, fremden Mengen $R_0(K;+)$ und $R_0(K;-)$, die beiden sog. *Seiten von K in R_0* $(K \neq K_0)$.

(St) *Stetigkeit der Seiten von K in R_0*: Für jede (hinreichend, aber) beliebig kleine $\mathfrak{p}$-Umgebung V von K in P gilt bei passender Wahl von $\pm$ in $R_0(K';\pm)$ für beliebiges $K' \in \mathfrak{k}$ mit $K' \subset V$:

$$R_0(K';+) \cap \mathsf{C}(V) = R_0(K;+) \cap \mathsf{C}(V) \neq \emptyset$$

und

$$R_0(K';-) \cap \mathsf{C}(V) = R_0(K;-) \cap \mathsf{C}(V).$$

Mit $R_0(K;+)$ bzw. $R_0(K;-)$ ist vermöge dieser Stetigkeit also auch $R_0(K';+)$ bzw. $R_0(K';-)$ festgelegt.

(Tr) *Trennungseigenschaften der Ordnungscharakteristiken:* Es sei $K \in \mathfrak{k} - \{K_0\}$ und $x', x'' \in \mathsf{C}(K_0) \cap K$ mit $x' \neq x''$ sowie $y', y'' \in \mathsf{C}(K_0) \cap \mathsf{C}(K)$, wobei auch $y' = y''$ zugelassen ist. In beliebig kleiner $\mathfrak{p}$-Umgebung V von K gibt es $K' \in \mathfrak{k}$ derart, daß auf verschiedenen Seiten von K' in $\mathsf{C}(K_0)$ gelegen sind: Entweder (I) x' und x'' oder (II) x' und y' oder (III) x' und y' sowie gleichzeitig x'' und y''.

BEISPIEL. (1) Es ist P der projektive n-dimensionale P_n, ferner $\mathfrak{k}$ das System der Hyperebenen in P_n, also $\mathsf{C}(K_0)$ affiner Unterraum von P_n. — (2) Die n-dimensionale Sphäre mit den $(n-1)$-dimensionalen, in ihr enthaltenen Sphären als OCh ist ein den Axiomen $(\mathfrak{k})$, (Sp), (St) und (Tr) genügender Raum R_0.

1.2.1. FOLGERUNGEN.

(0) Es ist P mehrpunktig.

(1) Zu beliebigen $x', x'' \in \mathsf{C}(K_0) \cap K$ und $y' \in R_0(K;+)$, $x' \neq x''$, existieren $K' \in \mathfrak{k}$, welche zu K beliebig $\mathfrak{a}$-benachbart sind und für welche gilt: $x' \in R_0(K;-)$ und $x'', y' \in R_0(K';+)$, wobei $R_0 = \mathsf{C}(K_0)$.

(2) Ist $x \in P - K$ (gemäß Axiom $(\mathfrak{k})$), so ist auch $x \in P - \dot{K}''$ für jedes zu K hinreichend $\mathfrak{a}$-benachbarte $K'' \in \mathfrak{k}$. Besitzt $K' \in \mathfrak{k}$ eine der in Axiom (Tr) genannten Eigenschaften (I) — (III), so gilt dies auch für jedes zu K' hinreichend $\mathfrak{a}$-benachbarte $K'' \in \mathfrak{k}$. Entsprechend für (1).

(3) Gelten die Axiome $(\mathfrak{k})$, (Sp), (St), (Tr) (in Nr. 1.2.) für $\mathfrak{k}$, so auch für $\mathfrak{k} - \mathfrak{n}$, wenn $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{k}$ nirgends dicht in $\mathfrak{k}$ ist. Ferner folgt aus der Giltigkeit der (keine Existenzforderungen enthaltenden) Axiome (Sp) und (St) für $\mathfrak{k}$, ihre Giltigkeit für jede Teilmenge von $\mathfrak{k}$.

1.3. Es heiße $M \subset P$ nicht beschränkt, wenn $\overline{M} \cap K \neq \emptyset$ für jedes $K \in \mathfrak{k}$. Existiert ein $K_0 \in \mathfrak{k}$ mit $\overline{M} \cap K_0 = \emptyset$, so heiße M *beschränkt bezüglich* K_0 oder auch lediglich beschränkt.

Jedes (bezüglich K_0) beschränkte M besitzt (bezüglich K_0) beschränkte p-Umgebungen. Ist M beschränkt bezüglich K_0, so auch bezüglich eines jeden, zu K_0 hinreichend $\mathfrak{a}$-benachbarten $K \in \mathfrak{k}$.

Ist M beschränkt bezüglich K_0, so bezeichnen wir $M \cap R_0(K;\pm)$ als *Seiten von K in M* (bezüglich $R_0 = \mathsf{C}(K_0) = P - K_0$). Die Seiten von K in M ändern sich stetig mit K (im Sinne von Nr. 1.2., (St)); auch gilt in M das Axiom Nr. 1.2., (Tr).

Jede endliche Menge ist beschränkt (besitzt also auch beschränkte Umgebungen). (Bew. durch Induktion.)

§ 2. Ein Hilfssatz

2.1. Unter einem *Kontinuum C in P* wird verstanden jede nicht leere, zusammenhängende, abgeschlossene Teilmenge von P und unter einem Kontinuum *in* $R_0 = P - K_0$ ein bezüglich K_0 beschränktes Kontinuum. Zu den Kontinuen zählen wir also auch die einpunktigen Mengen.

2.2. Unter einem *Stück* T einer Menge $M \subset P$ wird verstanden eine nicht leere, in M abgeschlossene Teilmenge von M, deren Komplement bezüglich M ebenfalls abgeschlossen in M ist; der Fall $T = M$ wird zugelassen. Jedes Stück T von M besitzt p-Umgebungen (in M) mit zu $M - T$ fremder abgeschlossener Hülle; solche Umgebungen von T werden als *Normalumgebungen* N von T bezeichnet. (Solche N existieren, weil P normal ist.) In jeder beliebig kleinen p-Umgebung eines Stückes T von M sind Normalumgebungen bzw. die abgeschlossenen Hüllen von Normalumgebungen enthalten.

Es sei N Normalumgebung eines Stückes T von M und $N_\varepsilon = \overline{N} - N$ die Begrenzung von N, ferner sei V eine p-Umgebung von K. Ist T beschränkt bezüglich $K_0 \in \mathfrak{k}$ und ist $R_0 = P - K_0$, *ist ferner* $T \subset K \in \mathfrak{k}$, so sollen $N_\varepsilon \cap \mathfrak{C}(V) \cap R_0(K; \pm)$ die beiden *Deckel* von N *bezüglich* V heißen; für hinreichend kleines V bei gegebenem N ist keiner der beiden Deckel von N leer.

Eine *Spaltung* von M in n Stücke T_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, $n \geqq 1$, liegt (definitionsgemäß) dann vor, wenn die T_ν sämtlich nicht leer, abgeschlossen in M, paarweise fremd und wenn ihre Vereinigung gleich M ist $M = \bigcup_\nu T_\nu$. (Daß jedes T_ν in der Tat ein Stück von M ist, folgt aus $T_\nu \cap (\bigcup_{\varrho \neq \nu} T_\varrho) = \emptyset$.)

2.3. Es sei C ein Kontinuum in P, ferner $K \in \mathfrak{k}$ und $C \cap K = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ eine Spaltung von $C \cap K$. Es existieren Normalumgebungen N_ν von T_ν mit $\overline{N}_\nu \cap \overline{N}_\varrho = \emptyset$ für $\nu \neq \varrho$, so daß $T_\nu = C \cap N_\nu \cap K$, $\nu = 1, \ldots, n$; $n \geqq 1$. Es gilt:

(1) Für jede zur OCh K hinreichend benachbarte OCh K' wird — falls $C \cap K' \neq \emptyset$ ist — durch die nicht leeren unter den $T'_\nu = C \cap N_\nu \cap K'$ eine Spaltung von $C \cap K'$ geliefert. Ferner ist $C \cap (N_\nu)_\varepsilon \cap V = \emptyset$ für jede hinreichend kleine p-Umgebung V von K.

(2) Es sei N Normalumgebung des Stückes T von $C \cap K$ und es sei $C \cap N \neq T$. Für jede hinreichend kleine Normalumgebung N' von T und jede hinreichend kleine p-Umgebung V von K gilt dann: Jede Komponente Q von $C \cap N'$ mündet in $\mathfrak{C}(V) \cap N'_\varepsilon$; insbesondere ist also $C \cap N'_\varepsilon \neq \emptyset$.

(3) Ist N *beschränkte* Normalumgebung des (beschränkten) Stückes T von $C \cap K$ mit $C \cap N \neq T$, ferner N' bzw. V hinreichend kleine Normal- bzw. p-Umgebung von T bzw. von K, so mündet (gemäß (2)) jede zu T nicht fremde Komponente Q' von $C \cap N$ in mindestens einem der Deckel von N' bezüglich V. Mündet Q' etwa in $N_\varepsilon \cap R_0(K; +) \cap \mathfrak{C}(V) = D$, wobei $T \subset R_0 = P - K_0$, so gibt es Komponenten Q'' von $C \cap N \cap R_0(K; +)$, welche sowohl in T als in D münden.

ZUSATZ. Ist das Stück T von $C \cap N$ *Komponente* von $C \cap N$, so ist Q' in (3) eindeutig bestimmt.

Es folgen (1) aus der Kompaktheit von C und (2)—(3) aus dem Rand- bzw. dem speziellen Brückensatz (vgl. [3], Nr. 5.1.).

2.4. Für den Beweis des Hilfsatzes (Nr. 2.5.) werden zwei Konstruktionen benötigt, die wir jetzt angeben.

Zur Abkürzung bezeichnen wir ein Stück T sowie jede *Normalumgebung* N *von* T in einer Spaltung von $C \cap K$ als *schnittartig (bezüglich* C*) auf der offenen Menge* $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{k}$ mit $K \in \mathfrak{o}$, wenn eine *beschränkte* zusammenhängende Teilmenge Q von $C \cap N$ (also ein $K_0 \in \mathfrak{k}$ mit $\overline{Q} \subset R_0 = P - K_0$) existiert, für welche gilt: Es ist $\overline{Q} \cap K' \neq \emptyset$ für jedes $K' \in \mathfrak{o}$; und es existieren überdies $x, y \in \overline{Q}$, welche auf verschiedenen Seiten von K' in R_0 liegen für jedes $K' \in \mathfrak{o}$. — Ist N schnittartig auf $\mathfrak{o}$, so auch auf jeder Teilmenge von $\mathfrak{o}$ (Erblichkeit von „schnittartig").

Die in Aussicht genommenen Konstruktionen sind die beiden folgenden:

(K 1) Es sei N Normalumgebung eines Stückes T von $C \cap K$; dabei sei $C \cap N \neq T$. Dann läßt sich eine zu K beliebig benachbarte offene Menge

$\mathfrak{o} \subset \mathfrak{k}$ angeben, auf welcher N schnittartig ist. Genauer: Es gibt zu jedem $x \in T$ und zu jeder beschränkten p-Umgebung V von x mit $\overline{V} \subset N$ eine in x und in einem $y \in V_g$ mündende Komponente Q von $C \cap (V - \{x\})$ sowie ein zu K beliebig $\mathfrak{a}$-benachbartes offenes $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}(x; V; y) \subset \mathfrak{k}$ derart, daß x und y auf verschiedenen Seiten (in $\overline{V}$) eines jeden $K' \in \mathfrak{o}$ liegen.

Zusatz. Die Beh. in (K 1) gilt auch dann, wenn zwar $T = C \cap N (= C)$, aber T mehrpunktig ist.

Bew. Es sei $x \in T$ beliebig und V eine beschränkte p-Umgebung von x mit $\overline{V} \subset N$ (gemäß Nr. 1.3. existieren solche beschränkte V). Wegen $T \neq C \cap N$ kann (gemäß Nr. 2.3., (2)) und soll (o.B.d.A.) N als so klein angenommen werden, daß $C \cap N_g \neq \emptyset$ ist. Dann gibt es, weil auch $\overline{V} \subset N$ und $x \in C \cap V$ ist, eine Komponente Q von $C \cap (V - \{x\}) = C - C \cap \mathbf{C}(V) - \{x\}$, welche die abgeschlossenen, fremden Teilmengen $\{x\}$ und $C \cap \mathbf{C}(V)$ des Kontinuums C verbindet, also in x und in V_g mündet. (Folgt aus dem speziellen Brückensatz; vgl. [3], Nr. 5.1. (S. 118).) Man setze $D = \overline{Q} \cap V_g \cap \mathbf{C}(K)$ und unterscheide die Fälle $D \neq \emptyset$ und $D = \emptyset$. Ist $D \neq \emptyset$, so existiert ein $y \in D$ etwa mit $y \in R_0(K; +) \cap V_g$, wobei $\overline{V} \subset R_0$; wegen $x \neq y$ gibt es dann gemäß Nr. 1.2., (Tr) (II), ein zu K beliebig $\mathfrak{a}$-benachbartes $K' \in \mathfrak{k}$ mit $x \in R_0(K'; -)$ und $y \in R_0(K'; +)$. Ist hingegen $D = \emptyset$, so existiert ein $y \in \overline{Q} \cap V_g \cap K$, wobei $x \neq y$. Gemäß Nr. 1.2., (Tr) (I), gibt es $K' \in \mathfrak{k}$, die zu K beliebig $\mathfrak{a}$-benachbart sind und für die $x \in R_0(K'; -)$ sowie $y \in R_0(K'; +)$. — Weil $\overline{Q}$ zusammenhängend und Teilmenge von C ist, gilt $\overline{Q} \cap K' \neq \emptyset$ und sodann (vgl. Nr. 1.2.1., (2)) $\overline{Q} \cap K'' \neq \emptyset$ für alle $K'' \in \mathfrak{o}$, wenn $\mathfrak{o}$ eine hinreichend kleine $\mathfrak{a}$-Umgebung von K' ist. — *Betr. Zusatz.* Ist allgemein T' eine mehrpunktige Komponente des Stückes T, ferner $x \in T'$, so ist $T' \cap V \neq T'$ für jede hinreichend kleine p-Umgebung V von x. Es existiert (zufolge des speziellen Brückensatzes) eine in einem $y \in T' \cap V_g \subset K$ und in x mündende Komponente Q von $C \cap (V - \{x\})$ (vgl. die Schlüsse im Fall $D = \emptyset$), woraus wegen $x \neq y$ und $x, y \in K$ wieder die Beh. (des Zusatzes) folgt.

(K 2) Es sei T_i ein Stück von $C \cap K$ und N_i Normalumgebung von T_i, wobei $i = 1, 2$, und $\overline{N_1} \cap \overline{N_2} = \emptyset$ (weil C zusammenhängend und $T_i \neq \emptyset$ ist, gilt $C \cap (N_i)_g \neq \emptyset$, also $C \cap N_i \neq T_i$, $i = 1, 2$). Dann gibt es eine zu K beliebig $\mathfrak{a}$-benachbarte offene Menge $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{k}$ derart, daß entweder (Fall (A)) die N_1 und N_2 beide schnittartig auf $\mathfrak{o}$ sind; oder (Fall (B)) nur N_1 schnittartig auf $\mathfrak{o}$ ist, während $C \cap N_2 \cap K' = \emptyset$ ist für jedes $K' \in \mathfrak{o}$. — Der Fall (B) kann nur eintreten, wenn jedes der N_i beschränkt, hingegen $S = N_1 \cup N_2$ nicht beschränkt ist.

Bew. (1) Ist S, also auch N_i beschränkt, $i = 1, 2$, so liegt der Fall (A) vor. In der Tat: Wegen der Beschränktheit von S gibt es ein $K_0 \in \mathfrak{k}$, so daß bezüglich $R_0 = P - K_0$ in S, also in N_1 und N_2, für jedes $K' \in \mathfrak{k}$ mit $N_i \cap K' \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, die beiden Seiten $R_0(K'; \pm)$ bestimmt sind (vgl. Nr. 1.3.). Gemäß Nr. 2.3., (3), gibt es daher zu T_i ein $\alpha_i = \pm$ bzw. ein $R_i = R_0(K; \alpha_i)$, $i = 1, 2$, derart, daß eine Komponente Q_i von $C \cap N_i \cap R_i$ in $D_i = (N_i)_g \cap R_i$ und in T_i mündet. Zu beliebigem $x_i \in \overline{Q}_i \cap T_i$ und $y_i \in \overline{Q}_i \cap D_i$ gibt es nun gemäß Nr. 1.2., (Tr) (III), ein $K' \in \mathfrak{k}$, beliebig $\mathfrak{a}$-benachbart zu K, mit etwa $x_1, y_2 \in R_0(K'; -)$

und $x_2, y_1 \in R_0(K';+)$ bzw. mit $x_1, x_2 \in R_0(K';-)$ und $y_1, y_2 \in R_0(K';+)$, je nachdem $\alpha_1 \neq \alpha_2$ mit etwa $\alpha_1 = +$, bzw. $\alpha_1 = \alpha_2$ mit etwa $\alpha_1 = +$, ist. Weil $\overline{Q}_i$ zusammenhängend ist, gilt $\overline{Q}_i \cap N_i \cap K'' \neq \emptyset$ für $K'' = K'$ und für jedes K'' aus einer geeignet gewählten $\mathfrak{a}$-Umgebung $\mathfrak{o}'$ von K'. Somit sind die N_i beide schnittartig auf $\mathfrak{o}'$.

(2) Ist N_1 beschränkt oder nicht beschränkt, hingegen N_2 nicht beschränkt, so konstruiert man zunächst (gemäß (K1)) ein in $\mathfrak{k}$ offenes $\mathfrak{o}_1$, auf dem N_1 schnittartig ist. Da nun N_2 nicht beschränkt ist, gilt jedenfalls $C \cap N_2 \cap K \neq \emptyset$ für jedes $K \in \mathfrak{o}_1$ (weil für jedes $K \in \mathfrak{k}$). Somit kann in $\mathfrak{o}_1$ auf N_2 die Konstruktion (K1) angewandt und ein $\mathfrak{o}_2 \subset \mathfrak{o}_1$ gefunden werden, auf welchem N_2 und auch N_1 schnittartig ist. Mithin liegt wieder der Fall (A) vor.

(3) Sind die N_i beide beschränkt, während $S = N_1 \cup N_2$ nicht beschränkt ist, so kann entweder der Fall (A) oder (B) eintreten. Man konstruiere nämlich zunächst gemäß (K1) ein (in $\mathfrak{k}$ offenes) $\mathfrak{o}_1$, auf welchem N_1 schnittartig wird. Existiert ein $K \in \mathfrak{o}_1$ mit $C \cap N_2 \cap K \neq \emptyset$, so kann man durch Anwendung von (K1) auf N_2 wieder ein $\mathfrak{o}_2 \subset \mathfrak{o}_1$ finden, auf welchem N_2 (und N_1) schnittartig ist. Ist hingegen $C \cap N_2 \cap K = \emptyset$ für jedes $K \in \mathfrak{o}_1$, so liegt definitionsgemäß der Fall (B) vor.

2.5. Mit Hilfe der in Nr. 2.4. angegebenen Konstruktionen läßt sich beweisen der

HILFSSATZ. Vor. *Für P und $\mathfrak{k}$ seien die Axiome in* Nr. (1.1. *und*) 1.2. *erfüllt. Ferner sei C ein mehrpunktiges Kontinuum in P. Schließlich sei m eine ganze Zahl mit $m \geqq 1$.*

Beh. *Folgende drei Aussagen sind gleichwertig:*

(α) *Die Menge $\mathfrak{d}$ derjenigen $K \in \mathfrak{k}$, für welche $C \cap K$ in (mindestens) m Stücke spaltbar ist, liegt dicht in einer nicht leeren Menge $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{k}$, die offen in $\mathfrak{k}$ ist (es ist also $\mathfrak{d} < \mathfrak{o}$).*

(β) *Es existiert eine (nicht leere) in $\mathfrak{k}$ offene Menge $\mathfrak{o}' \subset \mathfrak{k}$ derart, daß $C \cap K'$ in (mindestens) m Stücke spaltbar ist für jedes $K' \in \mathfrak{o}'$.*

(γ) *Es existiert eine (nicht leere) in $\mathfrak{k}$ offene Menge $\mathfrak{o}'' \subset \mathfrak{k}$ derart, daß $C \cap K$ für jedes $K \in \mathfrak{o}''$ in (mindestens) m Stücke $C \cap N_\mu \cap K$, $\mu = 1, \ldots, m$, spaltbar ist mit für alle K festen Normalumgebungen N_μ und daß jedes dieser N_μ schnittartig ist auf $\mathfrak{o}''$*

ZUSATZ. Ist C einpunktig, so ist schwKOW $(C;\mathfrak{k}) = 0$. Umgekehrt folgt aus schwKOW $(C;\mathfrak{k}) = 0$, daß C einpunktig ist, es sei denn KOW $(C;\mathfrak{k}) = 0$. Demgemäß ist im Hilfssatz $m \geqq 1$ angenommen und (o.B.d.A.) C als mehrpunktig vorausgesetzt (vgl. Nr. 3.1).

BEW. Daß (β) aus (γ) und daß (α) aus (β) folgt, ist klar. Es genügt demnach, zu zeigen: *Aus* (α) *folgt* (γ).

(1) *Vorbemerkung.* Es sei $K \in \mathfrak{d}$ gewählt, so daß (gemäß (α)) eine *m-Spaltung* $C \cap K = \bigcup_{\mu=1}^{m} C \cap N_\mu \cap K$ existiert, wobei also N_μ Normalumgebung des Stückes $T_\mu = C \cap N_\mu \cap K$ und $\overline{N}_\mu \cap \overline{N}_\nu = \emptyset$ für $\mu \neq \nu$ ist sowie $T_\mu \neq \emptyset$, $\mu = 1, \ldots, m$.

Durch eine m-Spaltung von $C \cap K$ werden zugleich für jedes m' mit $1 \leqq m' \leqq m$ auch m'-Spaltungen bestimmt. (Man erhält eine solche m'-Spaltung etwa durch Vereinigung von $m - m' + 1$ der T_μ bzw. N_μ zu einem (einzigen) Stück bzw. zu einer Normalumgebung dieses neuen Stückes und Beibehaltung der übrigen T_μ bzw. N_μ der ursprünglichen m-Spaltung.) Insbesondere kann also jede m-Spaltung als aus einer $(m-1)$-Spaltung hervorgegangen angenommen werden (falls $m \geqq 2$).

(2) Wir konstruieren nun, wenn (α) gilt, vermöge vollständiger Induktion nach m' und ausgehend von $m' = 1$ eine m-Spaltung bzw. ein $\mathfrak{o}''$ von der in (γ) behaupteten Art. — Ausgangspunkt ist also die 1-Spaltung $C \cap K = C \cap N \cap K \neq \emptyset$, wobei $K \in \mathfrak{o}$ und N Normalumgebung von C. Es gibt $K \in \mathfrak{o}$ mit $C \cap K \neq \emptyset$; z. B. ist dies für jedes $K \in \mathfrak{d}$ der Fall. Auf N wird zunächst (K 1) angewandt, wobei zu beachten ist: Im Falle $C \cap N = C$ für beliebig kleines N ist $G = C \cap N \cap K$ eine Komponente T von der im Zusatz zu (K 1) angegebenen Art, weil C als mehrpunktig vorausgesetzt wurde. Die Konstruktion (K 1) liefert also (in jedem Fall) eine offene Teilmenge $\mathfrak{o}_1$ von $\mathfrak{o}$, für welche (γ) mit $m' = 1$ (statt mit m) gilt. Wir machen (falls $m > 1$) die Induktionsannahme, es sei schon für ein $q - 1$ mit $1 \leqq q - 1 < m$ eine in $\mathfrak{k}$ offene (nicht leere) Menge $\mathfrak{o}_{q-1} \subset \mathfrak{o}_1$ konstruiert derart, daß jedes $K' \in \mathfrak{o}_{q-1}$ eine $(q-1)$-Spaltung (im Sinne von (γ))

$$(S') \qquad C \cap K' = \bigcup_{\nu=1}^{q-1} C \cap N'_\nu \cap K'$$

liefert, wobei also jedes N'_ν von K' unabhängig und schnittartig ist. Wegen $\mathfrak{o}_{q-1} \subset \mathfrak{o}_1 \subset \mathfrak{o}$ ist $\mathfrak{d}$ dicht in $\mathfrak{o}_{q-1}$; es existieren daher $K' \in \mathfrak{o}_{q-1} \cap \mathfrak{d}$. Gemäß ($\alpha$) liefert aber jedes solche K' eine m-, also (vgl. Ziff. (1)) eine q-Spaltung

$$(S) \qquad C \cap K' = \bigcup_{\mu=1}^{q} C \cap N_\mu \cap K'.$$

Entsprechend der Definition der Spaltung ist keines der Stücke $T'_\nu = C \cap N'_\nu \cap K'$ und $T_\mu = C \cap N_\mu \cap K$ leer. Da ferner $q - 1 < q \leqq m$ ist und da die N'_ν für jedes $K' \in \mathfrak{o}_{q-1}$ die gleichen sind, ist jedes T_μ, $1 \leqq \mu \leqq q$ in genau einem T'_ν, $1 \leqq \nu \leqq q - 1$ enthalten. Und umgekehrt ist in jedem T'_ν (mindestens) ein T_μ enthalten. Also in genau einem T'_ν, etwa in T'_1 sind genau zwei der T_μ, etwa T_1 und T_2, enthalten, hingegen in jedem der übrigen T'_ν, also in T'_ν mit $2 \leqq \nu \leqq q - 1$, genau ein T_μ, etwa $T_{\nu+1}$ (sofern $q \geqq 3$); insbesondere ist somit $T_{\nu+1} = T'_\nu$, $2 \leqq \nu \leqq q - 1$. Daher sind $N_1 \cap N'_1 \subset N'_1$ und $N_2 \cap N'_1 \subset N'_1$ sowie $N_{\nu+1} \cap N'_\nu$ ebenfalls Normalumgebungen der $T_1, T_2, T_{\nu+1}$, so daß o.B.d.A. $N_1 \cup N_2 \subset N'_1$ und $N_{\nu+1} = N'_\nu$ angenommen werden kann.

(3) Bezüglich (S') und (S) sind nun die beiden Fälle zu unterscheiden:

(3.I.) *Fall* (A). Es liegt für N_1 und N_2 der Fall (A) für (K 2) vor. Wendet man auf N_1, N_2 diese Konstruktion (K 2) an, so erhält man eine offene Teilmenge $\mathfrak{o}''$ von $\mathfrak{o}_{q-1}$, auf welcher N_1 und N_2 schnittartig sind. Ist $q = 2$, so haben wir in (S) auf $\mathfrak{o}''$ eine q-Spaltung von der in (γ) behaupteten Art. Dies gilt aber auch für $q \geqq 3$. Da nämlich die N'_ν schnittartig auf $\mathfrak{o}_{q-1}$, also auch auf $\mathfrak{o}''$, sind und da $N_{\nu+1} = N'_\nu$ für $2 \leqq \nu \leqq q - 1$ ist, sind die $N_3, \ldots, N_q$ schnittartig auf $\mathfrak{o}''$. Im Fall (A) ist damit die für (γ) gewünschte q-Spaltung konstruiert.

(3.II.) *Fall* (B). Es liegt für N_1, N_2 der Fall (B) in (K 2) vor; es sind also N_1, N_2 beschränkt, hingegen ist N_1' nicht beschränkt. Hier gibt die Konstruktion (K 2), welche wir auf N_1, N_2 anwenden, nur wieder eine $(q-1)$-Spaltung

$$(S'') \qquad C \cap K'' = \bigcup_{\nu=1}^{q-1} C \cap N_\nu'' \cap K''$$

mit lauter, auf einer offenen Menge $\mathfrak{o}_{q-1}' \subset \mathfrak{o}_{q-1}$ schnittartigen N_ν'', wobei $N_1'' = N_1$ und $N_\varrho'' = N_\varrho'$, $\varrho = 2, \ldots, q-1$, gesetzt werden kann. Es ist aber die Anzahl der beschränkten N_ν'' um 1 größer als die der beschränkten N_ν'; denn das beschränkte N_1'' ist an Stelle des nicht beschränkten N_1' getreten, während N_ν'' zugleich mit N_ν', $\nu = 2, \ldots, q-1$, beschränkt oder nicht beschränkt ist. Wendet man nun auf (S'') die gleichen Schlüsse an wie auf (S') und tritt dabei der Fall (A) auf, so wird eine q-Spaltung gemäß (γ) erhalten. Tritt aber der Fall (B) auf, so erhält man aus (S''), welches etwa i'' beschränkte Normalumgebungen aufweist, eine $(q-1)$-Spaltung (S''') mit $i''+1$ beschränkten Normalumgebungen. Man gelangt somit nach höchstens $q-1$ Schritten, wenn nicht zu einer q-Spaltung gemäß (γ), dann zu einem $K''' \in \mathfrak{d}$ der folgenden Art: Durch K''' wird geliefert 1. eine $(q-1)$-Spaltung (S''') mit lauter beschränkten, schnittartigen zugehörigen Normalumgebungen N_ν''' sowie 2. eine q-Spaltung (S). Die in Ziff. (2) angegebenen Schlüsse, angewandt auf (S''') und (S) zeigen, daß jetzt der Fall (A) in Ziff. (3.I.) vorliegt. Damit ist die Beh. auch für den Fall (3.II.) bewiesen.

§ 3. Erster Limessatz

3.1. Zwecks einfacher Formulierung des jetzt zu beweisenden Limessatzes führen wir folgende Bezeichnungen ein. Es sei M eine Menge in P und $\mathfrak{a}'$ eine Teilmenge von $\mathfrak{a}$ (vgl. Nr. 1.1.). Mit $\mathrm{KOW}(M \cap A')$ für $A' \in \mathfrak{a}'$ und als *Komponentenordnungswert* von $M \cap A'$ werde die (ev. auch unendliche) Anzahl (Kardinalzahl) der Komponenten von $M \cap A'$ bezeichnet. Existiert eine natürliche Zahl m mit $\mathrm{KOW}(M \cap A') \leqq m$ für jedes $A' \in \mathfrak{a}'$ und tritt das Gleichheitszeichen für mindestens ein $A' \in \mathfrak{a}'$ ein, so heiße M vom *(beschränkten)* Komponentenordnungswert $m = \mathrm{KOW}(M; \mathfrak{a}')$ (bezüglich $\mathfrak{a}'$). Existiert weiter eine kleinste natürliche Zahl m' derart, daß die Menge $\mathfrak{n}(m')$ derjenigen $A' \in \mathfrak{a}'$, für welche $\mathrm{KOW}(M \cap A') \geqq m'+1$ nirgends dicht in $\mathfrak{a}'$ ist, so heiße M vom (beschränkten) *schwachen* Komponentenordnungswert $m' = \mathrm{schwKOW}(M; \mathfrak{a}')$.

FOLGERUNGEN. (1) Ist $\mathrm{schwKOW}(M; \mathfrak{a}') = m'$ und $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}(m')$ die in $\mathfrak{a}'$ nirgends dichte Menge derjenigen $A' \in \mathfrak{a}'$, für die $\mathrm{KOW}(M \cap A') \geqq m'+1$ ist, so gilt $\mathrm{KOW}(M; \mathfrak{a}' - \mathfrak{n}') = m'$; und es existiert eine in $\mathfrak{a}'$ offene Menge $\mathfrak{o}$, in welcher die Menge $\mathfrak{d}$ derjenigen $A' \in \mathfrak{a}'$ dicht liegt, für welche $\mathrm{KOW}(M \cap A') = m'$. – (2) Ist $\mathfrak{a}' = \mathfrak{k}$ und gelten für P bzw. $\mathfrak{k}$ die Axiome in Nr. 1.2., so besitzt die in (1) erwähnte Menge $\mathfrak{d}$ einen nicht leeren offenen Kern. (Folgt aus Nr. 2.5., Hilfssatz.)

ANMERKUNG. Der Komponentenordnungswert ist nicht monoton, d.h der $\mathrm{KOW}(M; \mathfrak{a}')$ ist ev. größer als der $\mathrm{KOW}(M'; \mathfrak{a}')$ für eine Obermenge M

von M. Beispiel: Es sei $\mathfrak{a}'$ das System der Ebenen im E_3, ferner M ein Rotationsring und M' dessen konvexe Hülle.

3.2. Es gilt nun der folgende

LIMESSATZ. Vor. (1) *Für P und $\mathfrak{k}$ sollen die Axiome in* Nr. 1.2. *erfüllt sein.* — (2) *Es seien C_n, $n=1, 2, \ldots$, Kontinua in P.* — (3) *Es sei $1 \leqq m < \infty$ für $m = \lim\inf \operatorname{schwKOW}(C_n; \mathfrak{k})$.*

Beh. *Ist $C = \lim C_n$, so gilt* $\operatorname{schwKOW}(C; \mathfrak{k}) \leqq m$.

ANMERKUNG. (1) Der Limes von Kontinuen, also insbesondere C, ist wieder ein Kontinuum. — (2) In jeder Folge abgeschlossener Teilmengen von P ist eine konvergente Teilfolge enthalten (metrische und topologische Konvergenz stimmen in metrischen kompakten Räumen überein; vgl. z. B. [4], Nr. 6.3.4.4.). (3) Es kann $\operatorname{schwKOW}(C_n; \mathfrak{k}) = m$ für jedes n und zugleich $\operatorname{schwKOW}(C; \mathfrak{k}) < m$ sein. Beispiel: In der projektiven Ebene $E_2 = P$ seien die C_n mehrpunktige streckenfreie Konvexbogen, die gegen eine einpunktige Menge C konvergieren; es ist dann $\operatorname{schwKOW}(C_n; \mathfrak{k}) = 2$ und $\operatorname{schwKOW}(C; \mathfrak{k}) = 0$, wenn $\mathfrak{k}$ das System der Geraden in E_2 ist.

ZUSATZ. Der Limessatz gilt, wie eine nähere Untersuchung zeigt, auch für $m = 0$.

BEW. (1) *Vorbemerkung.* Wegen $m = \lim\inf \operatorname{schwKOW}(C_n; \mathfrak{k})$ existiert eine unendliche Teilfolge $((C'_r))$ der Folge $((C_n))$ derart, daß $\operatorname{schwKOW}(C'_r; \mathfrak{k}) = m$ für jedes r. Da gleichzeitig $C = \lim C'_r$ bleibt, genügt es, die Behauptung des Limessatzes unter Benutzung von $((C'_r))$ (statt von $((C_n))$) zu beweisen; der Einfachheit wegen schreiben wir C_n statt C'_r. Ist ferner C einpunktig, so ist, wie man zeigen kann, $\operatorname{schwKOW}(C; \mathfrak{k}) = 0 < m$ und daher die Beh. des Limessatzes richtig. Es werde demgemäß C als *mehrpunktig* angenommen.

Es sei nun $T' = C \cap N' \cap K' \neq \emptyset$ ein Stück von $C \cap K'$ mit der Normalumgebung N', wobei $K' \in \mathfrak{k}$. Wir unterscheiden: *Fall* (I). Es ist auch $C \cap \mathbf{C}(N') \neq \emptyset$ für hinreichend kleines N'. — *Fall* (II). Es ist $C \cap \mathbf{C}(N') = \emptyset$ für beliebig kleines N', also $C \cap N' = C \cap N' \cap K' = T' = C'$.

Fall (I). Es sei $x' \in T' \subset N'$. Wegen $C = \lim C_n$ gibt es $x_n \in C_n$ mit $x' = \lim x_n$. Weiter sei V eine beschränkte p-Umgebung von x' mit $\overline{V} \subset N'$. Es ist dann $C_n \cap \mathbf{C}(\overline{V}) \neq \emptyset$ sowie $C_n \cap V \neq \emptyset$ für schließlich alle n, abgekürzt: schl.a. n; denn $C \cap \mathbf{C}(N') \neq \emptyset$ und $x' \in C \cap V$ sowie $C = \lim C_n$. Weil C_n zusammenhängend ist, folgt $C_n \cap V_\varepsilon \neq \emptyset$ für schl.a. n und die Existenz einer in V_ε mündenden, x_n enthaltenden Komponente Q_n von $C_n \cap V$ (gemäß dem Randsatz, vgl. [3], Nr. 5.1.). Es existiert also $y_n \in \overline{Q}_n \cap V_\varepsilon$; dabei kann, ev. nach Ersetzung von $((C_n))$ durch eine Teilfolge, angenommen werden, daß $y' = \lim y_n \in C \cap V_\varepsilon$ existiert. Es gibt weiter eine Teilfolge $((C'_r))$ von $((C_n))$, wobei etwa $C'_r = C_{n_r}$ ist, derart, daß $\overline{Q}' = \lim \overline{Q}'_r \subset C$ existiert, wobei $Q'_r = Q_{n_r}$ ist (vgl. Anmerkung (2) und (1)). Es ist $\overline{Q}'$ Teilkontinuum von $C \cap \overline{V}$ mit $x' \in \overline{Q}' \cap T' \subset \overline{Q}' \cap V$ und $y' \in \overline{Q}' \cap V_\varepsilon$. Es ist $x' \neq y'$ und entweder $y' \in V_\varepsilon \cap K'$ oder $y' \in V_\varepsilon \cap \mathbf{C}(K')$; je nachdem gibt es gemäß Nr. 1.2., (Tr) (I) bzw. (II), ein zu K' beliebig $\mathfrak{a}$-benachbartes $K'' \in \mathfrak{k}$, so daß x' und y' auf verschiedenen Seiten von K'' (in einer

beschränkten, $\overline{V}$ enthaltenden Menge) liegen. Gleiches gilt dann für schl.a. $x'_r = x_{n_r}$ und $y'_r = y_{n_r}$. Da $\overline{Q}'$ und $\overline{Q}'_r$ zusammenhängend sind, wird also $\overline{Q}' \cap K'' \neq \emptyset$ und $\overline{Q}'_r \cap K'' \neq \emptyset$ für $r > n'$; und dies gilt (vgl. Nr. 1.2.1.) noch für jedes $K''' \in \mathfrak{k}$ aus einer hinreichend kleinen a-Umgebung $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}'(K''; n')$ von K''. Somit ist N' schnittartig auf $\mathfrak{o}'$ für C und gleichzeitig für alle C'_r mit $r > n'$.

Fall (II). Es ist $C \cap N' = C \cap N' \cap K' = C'$. Man wähle ein $x' \in \mathfrak{T}' = C$ und eine beschränkte p-Umgebung V von x' derart, daß $C \cap \mathfrak{C}(\overline{V}) \neq \emptyset$; solche V existieren, weil C als mehrpunktig angenommen wurde (vgl. oben Ziff. (1)) und es kann $\overline{V} \subset N'$ angenommen werden. Nun ist $C \cap V_g \neq \emptyset$ und $C_n \cap V_g \neq \emptyset$ für schl.a. n. Entsprechend wie im Fall (I) schließt man auf die Existenz von $x_n \in C_n \cap V$ mit $x' = \lim x_n$, ferner auf die von $y' = \lim y_n$ mit $y' \in C \cap V_g \subset K'$ und $y_n \in C_n \cap V_g$ sowie auf die Existenz einer Teilfolge $((C'_r))$ von $((C_n))$ und einer offenen Menge $\mathfrak{o}' \subset \mathfrak{k}$ derart, daß N' schnittartig auf $\mathfrak{o}'$ ist für C und zugleich für alle C'_r mit $r > n'$.

(2) Unter Heranziehung der Vorbemerkung (Ziff. (1)) kann der Limessatz indirekt so bewiesen werden: Es sei $\mathrm{schwKOW}(C; \mathfrak{k}) \geqq m+1 \,(\geqq 2)$; es sei mithin die Menge derjenigen $K \in \mathfrak{k}$, für welche $C \cap K$ in $m+1$ Stücke spaltbar ist, nicht nirgends dicht in $\mathfrak{k}$, also dicht in einer offenen Teilmenge von $\mathfrak{k}$. Gemäß Nr. 2.5., Hilfssatz, existiert ein $K' \in \mathfrak{k}$ sowie eine (nicht leere) offene Menge $\mathfrak{o}^1 \subset \mathfrak{k}$ mit $K' \in \mathfrak{o}^1$ derart, daß $C \cap K'$ eine $(m+1)$-Spaltung $C \cap K' = \bigcup_{\mu=1}^{m+1} C \cap N'_\mu \cap K'$ gestattet und daß jedes N'_μ (bezüglich C) schnittartig ist auf $\mathfrak{o}^1$, also mit den Stücken $T'_\mu = C \cap N'_\mu \cap K \neq \emptyset$ für jedes μ und jedes $K \in \mathfrak{o}^1$. Gemäß Ziff. (1) gibt es aber in beliebiger a-Umgebung von K', also in $\mathfrak{o}^1$, eine offene Menge $\mathfrak{o}^2$ und dazu eine Teilfolge $((C^1_r))$ von $((C_n))$ so, daß N'_1 schnittartig ist auf $\mathfrak{o}^2$ nicht nur bezüglich C, sondern auch bezüglich schl.a. C^1_r, während im übrigen die $N'_2, \ldots, N'_{m+1}$ schnittartig sind bezüglich C und zusammen mit N'_1 eine $(m+1)$-Spaltung von $C \cap K$ liefern für jedes $K \in \mathfrak{o}^2$. Wendet man auf N'_2, $\mathfrak{o}^2$ und $((C^1_r))$ die gleichen Schlüsse an wie soeben auf N'_1, $\mathfrak{o}^1$ und $((C_n))$ und setzt dieses Verfahren für $N'_3, \ldots, N'_{m+1}$ fort, so erhält man eine offene (nicht leere) Teilmenge $\mathfrak{o}^{m+1}$ von $\mathfrak{o}^1$ sowie eine Teilfolge $((C^{m+1}_r))$ von $((C_n))$ derart, daß die $N'_1, \ldots, N'_{m+1}$ auf $\mathfrak{o}^{m+1}$ eine $(m+1)$-Spaltung liefern nicht nur bezüglich C sondern auch bezüglich schl.a. C^{m+1}_r. Ein solches C^{m+1}_r ist demnach für alle $K \in \mathfrak{o}^{m+1}$ in $m+1$ Stücke spaltbar, so daß $C \cap K$ mindestens $m+1$ Komponenten besitzt; daher ist $\mathrm{schwKOW}(C^{m+1}_r; \mathfrak{k}) \geqq m+1$. Dies widerspricht der Annahme (vgl. Ziff. (1)), daß $m = \mathrm{schwKOW}(C_n; \mathfrak{k})$ für jedes n.

§ 4. Zweiter Limessatz

Der in Nr. 3.2. bewiesene Limessatz umfaßt zwar, als Spezialfall, den Fall des projektiven Raumes P_n mit dem System aller Hyperebenen als System $\mathfrak{k}$ der Ordnungscharakteristiken. Indes gilt der Limessatz im P_n auch dann, wenn $\mathfrak{k}$ etwa nur ein Büschel von Hyperebenen ist und wenn C beschränkt ist. Um auch diesen Fall zu erledigen, genügt es, das Axiom (Tr) in Nr. 1.2. durch ein anderes zu ersetzen unter gleichzeitiger Abschwächung des Axioms ($\mathfrak{k}$). Diese Abänderung des Axiomensystems wird in Nr. 4.1. vorgenommen und in Nr. 4.2. sodann der zugehörige (zweite) Limessatz bewiesen.

4.1. Wir lassen im Axiom (ℓ) (Nr. 1.2.) die Forderung fallen, daß jede einpunktige Menge beschränkt ist, schwächen also (ℓ) ab zum

Axiom (ℓs). Kein $K \in \mathfrak{k}$ ist Teilmenge eines von K verschiedenen $K' \in \mathfrak{k}$; insbesondere ist $K \neq \emptyset$ für jedes $K \in \mathfrak{k}$.

Ferner ersetzen wir das Axiom (Tr) (Nr. 1.2.) durch das

Axiom (B). Für jede beschränkte offene Menge $M \subset P$ gilt: Es sei etwa $\overline{M} \subset R_0$. Ist dann $M \cap K \neq \emptyset$ für ein $K \in \mathfrak{k}$, so gibt es zu jedem $y \in R_0(K; \alpha)$, wobei $\alpha = \pm$, in beliebig kleiner $\mathfrak{a}$-Umgebung $\mathfrak{f}$ von K ein $K' \in \mathfrak{k}$ mit $y \in R_0(K'; \alpha)$ und mit $\overline{M} \cap K \subset R_0(K'; -\alpha)$ sowie mit $\overline{M} \cap K' \subset R_0(K; \alpha)$.

Folgerung. Haben M, K, y und $\mathfrak{f}$ die gleiche Bedeutung wie in Axiom (B), so existiert eine offene Teilmenge $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{f}$ und dazu eine $\mathfrak{p}$-Umgebung V von K derart, daß $y \in R_0(K'; \alpha)$ sowie $\overline{M} \cap K'' \subset R_0(K'; -\alpha)$ und $\overline{M} \cap K' \subset R_0(K''; \alpha)$ für jedes $K' \in \mathfrak{o}$ und jedes $K'' \subset V$.

Anmerkung. Axiom (B) ließe sich noch etwas abschwächen, worauf aber hier nicht eingegangen wird.

4.2. Nunmehr läßt sich beweisen der

Limessatz. Vor. (1) *Es seien die Axiome* (Sp), (St) *in* Nr. 1.2. *sowie* (ℓs), (B) *in* Nr. 4.1. *erfüllt.* — (2) *Es sei* C_n, $n = 1, 2, \ldots$, *ein Kontinuum in* P. — (3) *Es sei* $1 \leqq m < \infty$ *für* $m = \liminf \operatorname{schwKOW}(C_n; \mathfrak{k})$.

Beh. *Ist* $C = \lim C_n$ *und ist* C *beschränkt, so gilt* $\operatorname{schwKOW}(C; \mathfrak{k}) \leqq m$.

Zusatz. (1) Für $m = 0$ gilt der Limessatz ebenfalls (wie eine nähere Untersuchung zeigt). — (2) Ist C nicht beschränkt, so gilt der Limessatz im allgemeinen nicht.

4.3. Beweis des Limessatzes in Nr. 4.2.

(I) Aus der Beschränktheit von C folgt die Beschränktheit schließlich aller (schl.a.) C_n. Ist nämlich M eine beschränkte offene Obermenge von C, so ist auch $C_n \subset M$ für schl.a. n. Es sei $\overline{M} \subset R_0$; dieses M und R_0 werden im folgenden stets beibehalten. Insbesondere liegen Normalumgebungen eines Stückes eines $C \cap K$ in M.

(II) Nachstehende Bemerkung wird später benützt.

Vor. (a) Es sei $C' \subset R_0$ ein (beschränktes) Kontinuum und $T = C' \cap N \cap K$ ein Stück von $C' \cap K$ mit der (beschränkten) Normalumgebung N. Ist $C' \cap N_g \neq \emptyset$, so existiert eine $\mathfrak{p}$-Umgebung V von K mit $C' \cap N_g \cap \overline{V} = \emptyset$. — (b) Es sei T seinerseits in Stücke $T_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, q$; $q \geqq 2$ spaltbar mit den Normalumgebungen $N_\varkappa$; o.B.d.A. wird dabei $\overline{N}_\varkappa \subset V$ angenommen.

Beh. Mündet eine Komponente Q von $C' \cap N$ sowohl in $N_g^+ = N_g \cap R_0(K; +)$ als in $N_g^- = N_g \cap R_0(K; -)$, so gibt es unter den $N_\varkappa$ mindestens eines, etwa N_1, derart, daß eine Komponente Q_1 von $Q \cap N_1 \subset C' \cap N_1$ sowohl in $(N_1)_g^+$ als in $(N_1)_g^-$ mündet. (Es ist also $Q_1 \cap T_1 \neq \emptyset$.)

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe des Brückensatzes (vgl. [3], Nr. 5.1.).

4.3.1. Der Beweis des Limessatzes (Nr. 4.2.) werde indirekt geführt; dabei kann o.B.d.A. $m = \text{schw}(C_n; \mathfrak{k})$ für alle n vorausgesetzt werden (vgl. Nr. 3.2., Bew. (1)).

(I) Es existiere also eine in $\mathfrak{k}$ offene Menge $\mathfrak{o}_0$ und eine in $\mathfrak{o}_0$ dichte Menge $\mathfrak{d}$ derart, daß $C \cap K$ eine $(m+1)$-Spaltung gestattet[2]) für jedes $K \in \mathfrak{d}$; es sei etwa $K' \in \mathfrak{d}$ und

$$(S) \qquad C \cap K' = \bigcup_{\mu=1}^{m+1} T_\mu \subset M \text{ (vgl. Nr. 4.3., (I)) mit } T_\mu = C \cap N_\mu \cap K' \neq \emptyset,$$

wobei N_μ Normalumgebung für T_μ ist. Für hinreichend kleine N_μ gilt dabei $C \cap \mathsf{C}(\overline{N}_\mu) \neq \emptyset$ und $C \cap (N_\mu)_g \neq \emptyset$ für jedes μ (weil $m+1 \geqq 2$ und C zusammenhängend ist); es ist dann ebenso $C_n \cap (N_\mu)_g \neq \emptyset$ für schließlich alle n, weil $C = \lim C_n$. Nach dem Randsatz existiert mithin für schl.a. n eine in $(N_1)_g$ mündende Komponente Q_{n1} von $C_n \cap N_1$, welche einen, zu T_1 beliebig $\mathfrak{p}$-benachbarten Punkt enthält. Daher gibt es unendlich viele $C_{n_\nu} = C_\nu^1$ unter den C_n derart, daß die zugehörigen Komponenten $Q_\nu^1 = Q_{n_\nu 1}$ bzw. ihre abgeschlossenen Hüllen $\overline{Q_\nu^1}$ gegen ein zu $(N_1)_g$ und T_1 nicht fremdes Kontinuum $\overline{Q}_1 \subset C \cap \overline{N}_1$ konvergieren; dabei können die C_ν^1 noch so gewählt werden, daß die Q_ν^1 alle im gleichen Deckel von N_1 münden, etwa in $(N_1)_g^+ = (N_1)_g \cap R_0(K'; +)$, und daß folglich auch $\overline{Q}_1$ nicht fremd ist zu $(N_1)_g^+$. Es gibt eine $\mathfrak{p}$-Umgebung V von K', für welche $\overline{Q_\nu^1} \cap (N_1)_g^+ \subset \mathsf{C}(\overline{V})$ und ebenso $\overline{Q}_1 \cap (N_1)_g^+ \subset \mathsf{C}(\overline{V})$ ist, und derart, daß (S) gilt für jedes $K \in \mathfrak{k}$ mit $K \subset V$ statt für K' (wobei aber $C \cap N_\mu \cap K = \emptyset$ werden kann). Gemäß Axiom (B) (Nr. 4.1.) existiert ein $K'' \subset V$ mit $\overline{M} \cap K'' \subset R_0(K'; +)$, also mit $\overline{M} \cap K' \cap K'' = \emptyset$. Wird $N_1'' = N_1 \cap R_0(K''; +)$ gesetzt, so ist $\overline{Q}_1 \cap \mathsf{C}\big(R_0(K''; +)\big) \neq \emptyset$ und $\emptyset \neq \overline{Q}_1 \cap (N_1'')_g^+ \subset \mathsf{C}(\overline{V})$, wobei $(N_1'')_g^+ = (N_1'')_g \cap R_0(K''; +)$; und gleiches gilt für schl.a. $\overline{Q_\nu^1}$. Nach dem Brückensatz existieren Komponenten von $\overline{Q}_1 \cap N_1''$ und von $\overline{Q_\nu^1} \cap N_1''$, welche sowohl in $\mathsf{C}\big(R_0(K''; +)\big)$ als in $(N_1'')_g^+ \cap \mathsf{C}(V)$ münden. Wir lassen diese Komponenten an Stelle der Q_1, Q_ν^1 treten und bezeichnen sie ebenfalls mit Q_1, Q_ν^1. Gemäß Axiom (B) (Nr. 4.1.); vgl. auch Nr. 1.2.1., (2); existiert weiter eine, zu K'' beliebig $\mathfrak{a}$-benachbarte, offene Menge $\mathfrak{o}_1 \subset \mathfrak{o}_0$ derart, daß für jedes $K \in \mathfrak{o}_1$ gilt: $\overline{M} \cap K'' \cap K = \emptyset$ und $\overline{M} \cap K \subset V \cap R_0(K''; +)$. Zufolge der Wahl von V ist überdies

$$(S') \qquad C \cap K = \bigcup_{\mu=1}^{m+1} C \cap N_\mu' \cap K,$$

wobei $N_1' = N_1''$, $N_\mu' = N_\mu$ für $2 \leqq \mu \leqq m+1$ und wobei N_1' schnittartig auf $\mathfrak{o}_1$ ist bezüglich C bzw. $\overline{Q}_1$ und schl.a. C_ν^1 bzw. $\overline{Q_\nu^1}$.

(II) Nun kann man induktiv weiter schließen. Annahme: Für alle s mit $1 \leqq s < s' \leqq m+1$ sei schon ein offenes $\mathfrak{o}_s \subset \mathfrak{o}_{s-1}$ gefunden derart, daß gilt:

$$(S^s) \qquad C \cap K = \bigcup_{\mu=1}^{m+1} C \cap N_\mu^s \cap K \quad \text{für jedes } K \in \mathfrak{o}_s,$$

wobei die $N_1^s, \ldots, N_s^s$ schnittartig sind auf $\mathfrak{o}_s$ bezüglich C und unendlich vieler unter den C_n, die wir mit C_ν^s bezeichnen; dabei kann $C \cap N_\mu^s \cap K = \emptyset$ sein für gewisse μ mit $s < \mu$. Es sei insbesondere $s = s' - 1$. Weil $\mathfrak{d}$ dicht in $\mathfrak{o}_s$ ist, kann K in $\mathfrak{d} \cap \mathfrak{o}_s$ gewählt und neben (S^s) die $(m+1)$-Spaltung

$$(S_s) \qquad C \cap K = \bigcup_{\mu=1}^{m+1} T_{s\mu} \quad \text{mit} \quad T_{s\mu} = C \cap N_{s\mu} \cap K \neq \emptyset$$

[2]) Insbesondere ist also C mehrpunktig.

betrachtet werden. Wählt man (o.B.d.A.) die $N_{s\mu}$ hinreichend klein, so ist in jedem der N_μ^s, $\mu = 1, \ldots, s$, mindestens ein $N_{s\mu}$ enthalten; denn jedes dieser N_μ^s ist schnittartig auf $\mathfrak{o}_s$, so daß $C \cap N_\mu^s \cap K \neq \emptyset$. Ist in N_μ^s, $1 \leqq \mu \leqq s$, nur ein einziges $N_{s\mu}$ enthalten, so werde N_μ^s durch dieses $N_{s\mu}$ ersetzt; sind aber in N_μ^s mehrere der $N_{s\mu}$ enthalten, so wende man auf dieses N_μ^s und diese $N_{s\mu}$ die Nr. 4.3. (II), an, indem man N_μ^s bzw. $N_{s\mu}$ an die Stelle der dortigen N bzw. $N_\varkappa$ treten läßt. In jedem Falle erhält man also für jedes μ mit $1 \leqq \mu \leqq s$ ein in N_μ^s enthaltenes $N_{s\mu}$ derart, daß $N_{s\mu}$ schnittartig ist auf einer offenen K enthaltenden Teilmenge $\mathfrak{o}_{s\mu}$ von $\mathfrak{o}_s$ bezüglich C und unendlich vieler der C_ν^s; auf dem (nicht leeren) Durchschnitt $\mathfrak{o}_s'$ dieser $\mathfrak{o}_{s\mu}$ sind dann s der $N_{s\mu}$, etwa $N_{s1}, \ldots, N_{ss}$ schnittartig bezüglich C und unendlich vieler der C_ν^s. Wendet man die Überlegungen in Ziff. (I) auf etwa $N_{s,s+1}$ an, so ergibt sich: die $N_{s1}, \ldots, N_{s,s+1}$ sind schnittartig auf einer offenen Teilmenge $\mathfrak{o}_{s+1}$ von $\mathfrak{o}_s'$ bezüglich C und unendlich vieler der C_ν^s, etwa bezüglich C_ν^{s+1}. Die Induktionsannahme ist also auch bezüglich $s+1 = s'$ richtig.

(III) Nach beschränkt vielen Schritten führt der Induktionsschluß (vgl. Ziff. (II)) zu einem offenen $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}_0$ sowie zu einer $(m+1)$-Spaltung von $C \cap K$ (für $K \in \mathfrak{o}$), deren zugehörige Normalumgebungen sämtlich schnittartig sind auf $\mathfrak{o}$ bezüglich (C und) unendlich vieler C_ν^{m+1} unter den C_n. Für jedes solche C_ν^{m+1} ist folglich schwKOW$(C_\nu^{m+1}; \mathfrak{k}) \geqq m+1$ im Widerspruch zu $m = \text{schwKOW}(C_n; \mathfrak{k})$ für jedes n.

Betr. Zusatz (2). Es seien x, y rechtwinklige, kartesische Koordinaten in der euklidischen Ebene E_2 mit dem Nullpunkt $o = (x=0, y=0)$. Alsdann sei P die abgeschlossene Kreisscheibe F mit o als Zentrum vom Radius 3 und $\mathfrak{k}$ das Büschel der abgeschlossenen Radien von F. Für P und $\mathfrak{k}$ sind die Axiome (Sp), (St) in Nr. 1.2. und ($\mathfrak{k}s$), (B) in Nr. 4.1. erfüllt. Jede den Punkt o enthaltende Menge ist nicht beschränkt. Wir wählen nun als C_n den durch $(x - n^{-1})^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$ mit $x \geqq n^{-1}$ erklärten (Halb-) Kreisbogen. Dann ist $C = \lim C_n$ erklärt durch $x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$ mit $x \geqq 0$. Wegen $o \in C$ ist C nicht beschränkt, während jedes C_n beschränkt ist. Weiter ist schwKOW $(C; \mathfrak{k}) = 2$, hingegen schwKOW$(C_n; \mathfrak{k}) = 1$ für jedes n. Der (zweite) Limessatz (Nr. 4.2.) gilt hier also nicht.

Literatur

[1] Haupt, O.: Limessätze bei geometrischen Ordnungen. Ann. Mat. pura appl., Ser. IV **23**, 123–148 (1944).

[2] — Über einige Probleme bei schwachen Komponenten- und Punktordnungswerten. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. 1961, 1—12.

[3] — G. Nöbeling u. Chr. V. Pauc: Sekanten und Paratingenten in topologischen Abhängigkeitsräumen. J. reine angew. Math. **182**, 105–121 (1940).

[4] — G. Aumann u. Chr. V. Pauc: Differential- und Integralrechnung, Bd. 1 (2. Aufl. Berlin 1948).

Erlangen, Spardorferstr. 45

(Eingegangen am 23. März 1961)

WAGNER, R.
Math. Zeitschr. 77, 94–100 (1961)

Interne Kennzeichnung projektiver Abbildungen auf Quadriken

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

RICHARD WAGNER

1. Bei der Beschäftigung mit der inneren Geometrie auf Quadriken stößt man auf die Frage, was unter projektiven Selbstabbildungen von Quadriken verstanden werden soll. Natürlicherweise wird man an Kollineationen des einbettenden projektiven Raumes denken, die die Quadrik fest lassen, genauer gesagt: an die von solchen Kollineationen auf der Quadrik induzierten Abbildungen. Das Problem ist dann, diese Abbildungen auf der Quadrik selbst zu kennzeichnen.

Für Kegelschnitte ist bekanntlich Doppelverhältnisinvarianz die charakteristische Eigenschaft. In höheren Dimensionen wird man sich leiten lassen von der Analogie unserer Fragestellung mit der zum Fundamentalsatz der projektiven Geometrie führenden und invariante Klassen von Punktmengen auf der Quadrik herausstellen. Die Forderung der Geradentreue ist, wenn man sie wörtlich nimmt, sicher unbrauchbar; auf einer zweidimensionalen reellen Regelquadrik etwa könnte man unter dieser Forderung noch die beiden Erzeugendenscharen je in sich beliebig permutieren. Nimmt man jedoch für „Geraden" die ebenen Schnitte der Quadrik, dann ist Geradentreue in der Tat kennzeichnend für die von Kollineationen induzierten Selbstabbildungen. Der Beweis dieses Sachverhaltes ist das Ziel der folgenden Betrachtung.

Gewisse Schwierigkeiten, die man auf den ersten Blick vielleicht nicht erwarten mag, erwachsen einmal daraus, daß wir die Geradentreue nur für die Abbildungen selbst, nicht aber für ihre Umkehrungen fordern werden, zum anderen aus der Zulassung beliebiger kommutativer Koordinatenkörper mit Charakteristik $\neq 2$. Dagegen gibt es keine neuen Komplikationen, wenn man zuläßt, daß die abzubildenden Quadriken nicht zusammenfallen, oder sogar in verschiedenen Räumen liegen.

2. Wir gehen aus von einem $(n+1)$-dimensionalen projektiven Raum P über einem kommutativen Koordinatenkörper, dessen Charakteristik nicht 2 ist; jede Gerade in P enthält dann mindestens vier Punkte. Weiter sei eine symmetrische Bilinearform in projektiven Punktkoordinaten vorgelegt. Je zwei Punkte von P, deren Koordinaten die Bilinearform annullieren, heißen *konjugiert*. Die aus der Bilinearform hervorgehende *Polarität* $\mathfrak{q}$ ordnet jedem Unterraum L von P als *Polare* den Unterraum $\mathfrak{q}(L)$ aller derjenigen Punkte

zu, die zu allen Punkten von L konjugiert sind. Falls es Punkte gibt, die zu sich selbst konjugiert sind, so bilden diese Punkte eine ***n-dimensionale Quadrik*** $\mathfrak{f}$ in P; wir benutzen also den klassischen Begriff einer Quadrik als Nullstellengebilde einer quadratischen Form.

Hat die zur Definition von $\mathfrak{q}$ dienende Bilinearform den höchstmöglichen Rang $n+2$, so mögen Polarität und eventuell zugehörige Quadrik *regulär* heißen. Eine reguläre Polarität ist nicht nur monoton und symmetrisch — aus $L \subset M$ folgt $\mathfrak{q}(L) \supset \mathfrak{q}(M)$, und aus $L \subset \mathfrak{q}(M)$ folgt $M \subset \mathfrak{q}(L)$ — sondern auch eineindeutig und involutorisch. Ein Unterraum und seine Polare haben komplementäre Dimensionen m und $n-m$. Diese Eigenschaften wollen wir ohne weiteres als bekannt ansehen.

Zwei weitere Feststellungen über eine reguläre n-dimensionale Quadrik $\mathfrak{f}$ mit der Polarität $\mathfrak{q}$ in P mögen noch ausdrücklich formuliert werden, weil wir darauf öfters zurückgreifen müssen; Punkte von $\mathfrak{f}$ bezeichnen wir dabei kurz als „Flächenpunkte".

(1) *G sei eine Gerade durch einen Punkt Z von* $\mathfrak{f}$.

a) Liegt G nicht in der Polaren $\mathfrak{q}(Z)$, *so findet sich auf G genau ein weiterer Flächenpunkt*;

b) enthält G zwei weitere Flächenpunkte, so liegt die ganze Gerade in $\mathfrak{f}$ *und in* $\mathfrak{q}(Z)$.

Beide Behauptungen ergeben sich unmittelbar, wenn man G durch Z und einen passenden zweiten Punkt aufspannt und die dann faktisch lineare Bedingung für Flächenpunkte auf G anschreibt.

(2) *Ist* $n \geqq 2$, *so gibt es in P nicht zwei Hyperebenen, die zusammen alle Punkte der Quadrik* $\mathfrak{f}$ *enthalten.*

INDIREKTER BEWEIS. Jeder Flächenpunkt liege in einer der beiden Hyperebenen H_1 oder H_2. Wegen (1a) kann H_2 allein nicht die ganze Quadrik aufnehmen. Es gibt also einen Flächenpunkt Z, der zu H_1, nicht aber zu H_2 gehört. Seine Polare $\mathfrak{q}(Z)$ schneidet — wie auch H_1 — aus H_2 einen $(n-1)$-dimensionalen Unterraum aus, so daß sich Punkte $Z_0, \ldots, Z_n$ finden lassen, die H_2 aufspannen, aber weder zu $\mathfrak{q}(Z)$ noch zu H_1 gehören. Verbindet man diese Punkte mit Z, so zeigt (1a), daß sie alle zu $\mathfrak{f}$ gehören. Mit jedem Z_i verfahren wir nun wie eben mit dem Punkt Z, wobei H_1 und H_2 ihre Rollen vertauschen. Da die Polaren $\mathfrak{q}(Z_i)$ nur den Punkt $\mathfrak{q}(H_2)$ gemeinsam haben, müssen alle von $\mathfrak{q}(H_2)$ verschiedenen Punkte aus H_1, die nicht zu H_2 gehören, auf der Quadrik liegen. In der Hyperebene H_1, die ja mindestens zweidimensional ist, gibt es eine Gerade, die den Punkt $\mathfrak{q}(H_2)$ meidet und H_2 nur in einem Punkte Y trifft. Dieser Punkt gehört dann nach (1b) zur Quadrik. Da schließlich sicher eine zweite Gerade durch Y existiert, die mit den drei Hyperebenen H_1, H_2 und $\mathfrak{q}(Y)$ je nur den Punkt Y gemeinsam hat, geraten wir endgültig in Widerspruch zu (1a).

Zur Ergänzung betrachten wir noch den Fall $n=1$. Der Hilfssatz (2) gilt in einer projektiven Ebene genau dann, wenn die Geraden der Ebene je mehr als vier Punkte enthalten. Die Quadrik $\mathfrak{f}$ besitzt nämlich ebensoviele Punkte wie eine Gerade, und nicht drei davon sind kollinear. Zum Aufsaugen von mehr als vier Punkten reichen demnach zwei Geraden nie aus, für höchstens vier Punkte natürlich stets.

3. Neben den Raum P stellen wir nun einen zweiten projektiven Raum P' über einem kommutativen Körper mit Charakteristik $\neq 2$; P und P' brauchen nur die Dimension $n+1$ gemeinsam zu haben. In jedem der beiden Räume sei eine reguläre n-dimensionale Quadrik $\mathfrak{f}$ bzw. $\mathfrak{f}'$ mit den Polaritäten $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{q}'$ gegeben, ferner eine eineindeutige Abbildung φ von $\mathfrak{f}$ *auf* $\mathfrak{f}'$ mit der Eigenschaft

(E) *Liegen vier Punkte von* $\mathfrak{f}$ *in einer Ebene, so liegen auch die vier Bildpunkte auf* $\mathfrak{f}'$ *in einer Ebene.*

Natürlich ist damit nur für einen wenigstens dreidimensionalen Raum P' etwas ausgesagt. Unter den angegebenen Voraussetzungen sprechen wir die folgende Behauptung aus:

Die Abbildung φ kann, wenn nur $n\geqq 2$ ist, auf genau eine Weise zu einer Kollineation von P auf P' fortgesetzt werden.

Der Beweis läuft etwa so. Die Punkte von P werden intern auf $\mathfrak{f}$ erfaßt durch die Projektionen, die sie auf der Quadrik hervorrufen. Bei der Übertragung durch φ auf die Bildquadrik gehen diese Abbildungen in Projektionen von $\mathfrak{f}'$ über. Die Zuordnung der Projektionszentren setzt die Abbildung φ zu einer eineindeutigen und geradentreuen Abbildung von P auf P' fort, so daß unsere Behauptung auf den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie zurückgeführt werden kann.

Wir beginnen mit einer Erweiterung der Grundeigenschaft (E) unserer Abbildung φ in folgendem Hilfssatz:

(3) *Sind $Z_1, \ldots, Z_r$ beliebige Punkte von* $\mathfrak{f}$, *so gilt*

$$\dim \sum_{i=1}^{r} Z_i \geqq \dim \sum_{i=1}^{r} \varphi(Z_i).$$

BEWEIS. Ohne Verlust an Allgemeinheit dürfen wir erstens die Unabhängigkeit der Bildpunkte $Z_i' = \varphi(Z_i)$ voraussetzen und zweitens annehmen, es sei $r\geqq 4$; es gibt ja nach (2) mehr als drei unabhängige Punkte auf $\mathfrak{f}'$.

Wegen der Grundeigenschaft (E) bleibt bei $r=4$ nichts zu beweisen. Wir nehmen an, unsere Behauptung sei für je $r\geqq 4$ Flächenpunkte richtig, für die Punkte $Z_1, \ldots, Z_{r-1}, Z_r, Z_{r+1}$ mit den unabhängigen Bildern $Z_1, \ldots, Z_{r+1}'$ jedoch falsch; insbesondere sind je r der Originalpunkte unabhängig, alle $r+1$ aber abhängig. Es gibt dann einen wohlbestimmten Schnittpunkt

$$X = (Z_1 + \cdots + Z_{r-1}) \cap (Z_r + Z_{r+1}),$$

der überdies mit keinem der Punkte Z_j $(j=1, \ldots, r-1)$ zusammenfallen kann. Auf wenigstens einer der Geraden Z_j+X findet sich ein Flächenpunkt $Z \neq Z_j$; denn entweder ist X in einer der Polare $\mathfrak{q}(Z_j)$ nicht enthalten, dann ist (1 a) auf Z_j+X anwendbar, oder X ist selbst Flächenpunkt. Die Dimensionen der Unterräume

$$Z'_1+\cdots+Z'_{r-1}+Z' \quad \text{und} \quad Z'_j+Z'+Z'_r+Z'_{r+1}$$

mit der gemeinsamen Geraden Z'_j+Z' sind wegen obiger Annahme $\leqq r-2$ bzw. $\leqq 2$, so daß die Punkte $Z'_1, \ldots, Z'_{r+1}$ insgesamt einen höchstens $(r-1)$-dimensionalen Raum aufspannen würden, im Widerspruch zur vorausgesetzten Unabhängigkeit.

4. Wir greifen nun einen nicht auf $\mathfrak{f}$ liegenden Punkt X von P heraus und betrachten die Projektion π von $\mathfrak{f}$ auf sich aus X. Die Projektion erhält man, indem man diejenige projektive Involution in P, die X und die Punkte der Polaren $\mathfrak{q}(X)$ fest läßt, auf die Quadrik einschränkt. Vermöge π werden je zwei Flächenpunkte auf einer Geraden durch X vertauscht; genau die Flächenpunkte in der Polaren $\mathfrak{q}(X)$ bleiben fest.

Durch Transformation von π mit der Abbildung φ erzeugen wir eine eindeutige und involutorische Selbstabbildung $\pi'=\varphi\pi\varphi^{-1}$ der Bildquadrik $\mathfrak{f}'$ und nehmen uns vor zu zeigen, daß auch π' die Projektion aus einem passenden Punkt X' von P' ist.

Fixpunkte von π' sind genau die φ-Bilder der Fixpunkte von π. Auf Grund des Hilfssatzes (3) kann man auch die Fixpunkte von π' in eine Hyperebene einschließen. Bleibt ein Punkt $Z'=\varphi(Z)$ bei π' nicht fest, so nennen wir die Gerade $Z'+\pi'(Z')=\varphi(Z)+\varphi\pi(Z)$ seine π'-*Spur*.

Je zwei π'-Spuren treffen sich, weil je vier Originalpunkte $Z_1, \pi(Z_1)$; $Z_2, \pi(Z_2)$ komplanar sind. Andererseits können die π'-Spuren nicht alle in einer Ebene, nicht einmal in einer Hyperebene liegen; weil nämlich die Fixpunkte von π' in einer Hyperebene enthalten sind, würde man dann in Gegensatz zu (2) geraten. Daraus ergibt sich erstens, daß alle π'-Spuren durch einen gemeinsamen Punkt X' gehen. Zweitens kann dieser Punkt nicht zu $\mathfrak{f}'$ gehören; in diesem Falle wäre nämlich X' sicher Fixpunkt von π', jede π'-Spur müßte wenigstens drei Flächenpunkte enthalten, also gemäß (1 b) in der Polaren $\mathfrak{q}'(X')$ liegen, was nicht geht.

Die Verbindungsgerade von X' mit einem Flächenpunkt Z' trägt entweder nur diesen einen Flächenpunkt, oder noch genau einen zweiten. Der erste Fall tritt dann und nur dann ein, wenn Z' in der Polaren $\mathfrak{q}'(X')$ liegt; Z' ist dann notwendig Fixpunkt von π'. Im zweiten Fall werden die beiden Flächenpunkte auf der Geraden bei π' entweder vertauscht, oder sie bleiben beide fest. Wenn diese zuletzt genannte Möglichkeit ausgeschlossen werden kann — und darin liegt eine gewisse Schwierigkeit — dann ist π' in der Tat die Projektion aus dem Punkte X'.

Nehmen wir also an, π' hätte Fixpunkte außerhalb $\mathfrak{q}'(X')$; sie müssen in einer Hyperebene H' durch X' liegen. Auch π besitzt dann Fixpunkte, und zwar spannen diese die Polare $\mathfrak{q}(X)$ auf, wie sich aus (1a) ergibt.

Jeder Punkt Y aus $\mathfrak{q}(X)$, der nicht zu $\mathfrak{f}$ gehört, gibt Anlaß zu einer Projektion λ. Die Fixpunkte von π werden dabei nur untereinander permutiert; sicher gibt es zwei verschiedene, die bei λ vertauscht werden, d.h. gewisse λ-Spuren liegen in $\mathfrak{q}(X)$. Mithin liegen auch gewisse Spuren der transformierten Abbildung $\lambda' = \varphi\lambda\varphi^{-1}$ in H', ebenso der Treffpunkt Y' aller λ'-Spuren. Schließlich lassen sich in der Ebene, die X mit irgendeiner in $\mathfrak{q}(X)$ liegenden λ-Spur aufspannt, mit Hilfe von (1a) Flächenpunkte ausfindig machen, die nicht zu $\mathfrak{q}(X)$ gehören, so daß jede λ-Spur aus $\mathfrak{q}(X)$ von einer π-Spur getroffen wird.

Diese Tatsachen werden nutzbar, wenn wir außerdem wissen, daß bei φ kein Flächenpunkt außerhalb $\mathfrak{q}(X)$ in H' abgebildet werden kann. Zunächst gibt es offenbar einen Punkt Z_1 auf $\mathfrak{f}$ mit $\varphi(Z_1)$ außerhalb H', also Z_1 nicht in $\mathfrak{q}(X)$. Liegt auch $Z_2 \neq Z_1$ auf $\mathfrak{f}$, nicht aber in $\mathfrak{q}(X)$, so läßt sich der wohlbestimmte Schnittpunkt der Geraden $\varphi(Z_1)+\varphi(Z_2)$ mit H' angeben. Je nachdem der Punkt $Y=(Z_1+Z_2)\cap\mathfrak{q}(X)$ Flächenpunkt ist oder nicht, verwenden wir Hilfssatz (3) bzw. den vorhergegangenen Abschnitt um zu begründen, daß der gesuchte Schnittpunkt mit $\varphi(Y)$ bzw. mit dem Spurentreffpunkt Y' der zu Y gehörigen transformierten Abbildung λ' identisch ist. Jedenfalls ist er von $\varphi(Z_2)$ verschieden, so daß auch Z_2 wunschgemäß nicht in H' abgebildet wird. Es folgt, daß eine π'-Spur mit H' nur den Punkt X' gemeinsam hat.

Schließlich wählen wir einen beliebigen Fixpunkt Z von π und legen durch ihn zwei verschiedene Geraden, die je genau einen weiteren Fixpunkt Z_1 bzw. Z_2 von π enthalten. Die Geraden lassen sich auffassen als Spuren von Projektionen aus je einem passenden Punkt Y_1 bzw. Y_2 in $\mathfrak{q}(X)$; jede solche Spur wird von einer π-Spur getroffen. Nach der Transformation mit φ erscheinen zwei Spuren in H', die den Punkt $\varphi(Z)$, aber auch noch den Punkt X' gemeinsam haben, weil sie nämlich je von einer π'-Spur getroffen werden, was nur in X' geschehen kann. Da es eine Spur mit den drei verschiedenen Flächenpunkten $\varphi(Z)$, $\varphi(Z_1)$ und $\varphi(Z_2)$ nicht geben kann, ist unsere Annahme über Fixpunkte von π' außerhalb $\mathfrak{q}'(X')$ endgültig zu Fall gebracht.

5. Wir können jetzt jedem Punkt X von P, der nicht zu $\mathfrak{f}$ gehört und deshalb eine Projektion π liefert, eindeutig einen nicht auf $\mathfrak{f}'$ liegenden Punkt X' von P' zuordnen, nämlich das Zentrum der Projektion $\pi' = \varphi\pi\varphi^{-1}$. Durch die Vorschrift

$$\Phi(X) = \begin{cases} \varphi(X) & \textit{für } X \textit{ auf } \mathfrak{f}; \\ X' & \textit{sonst} \end{cases}$$

wird die ursprünglich vorgelegte Abbildung φ als eindeutige Abbildung auf ganz P fortgesetzt. Offenbar kann eine geradentreue Fortsetzung von φ nicht anders aussehen.

Aus $\Phi(X_1)=\Phi(X_2)$ folgt $X_1=X_2$. Die beiden Punkte X_1, X_2 müssen ja entweder beide zu $\mathfrak{f}$ gehören oder beide nicht, und höchstens der letzte Fall

ist problematisch. Wenn aber die Projektionen $\varphi\pi_1\varphi^{-1}$ und $\varphi\pi_2\varphi^{-1}$ wegen der gleichen Zentren zusammenfallen, so sind auch π_1 und π_2 mitsamt ihren Spurentreffpunkten X_1 und X_2 identisch. Die Einfachheit dieses Schlusses ist erkauft durch die Mühe beim vorausgegangenen Nachweis, daß die mit φ transformierten Projektionen durch ihren Spurentreffpunkt vollständig beschrieben sind.

Die eineindeutige Abbildung Φ soll letzten Endes als geradentreue Abbildung von P auf P' erkannt werden. Dies wird vorbereitet durch die Bemerkung, daß Φ die Polaritäten der beiden Quadriken ineinander transformiert.

Zwei verschiedene Punkte X_1, X_2 auf $\mathfrak{f}$ sind konjugiert oder nicht, je nachdem alle Punkte der Verbindungsgeraden Flächenpunkte sind oder nicht; im ersten Falle liegt auch die Verbindungsgerade der Bildpunkte $\Phi(X_1)$, $\Phi(X_2)$ ganz in $\mathfrak{f}'$, was man mit Hilfe von (3) und (1 b) einsieht, im zweiten Falle gibt es einander zugeordnete Projektionen π und π', welche die Punkte X_1, X_2 bzw. $\Phi(X_1)$, $\Phi(X_2)$ je vertauschen. Auch bei anderen Punktepaaren X_1, X_2 können wir die konjugierte Lage an gleichwertigen, Φ-invarianten Eigenschaften erkennen. Ein Punkt X_1 außerhalb $\mathfrak{f}$ und ein Flächenpunkt X_2 sind konjugiert genau dann, wenn X_2 bei der Projektion aus X_1 fest bleibt. Zwei Punkte $X_1 \neq X_2$ außerhalb $\mathfrak{f}$ sind konjugiert, wenn diejenigen beiden projektiven Involutionen in P, die auf $\mathfrak{f}$ die Projektionen aus X_1 bzw. X_2 induzieren, miteinander vertauschbar sind und umgekehrt. Vertauschbarkeit der beiden Involutionen ist aber notwendig und natürlich auch hinreichend für Vertauschbarkeit der Projektionen selbst; bleibt nämlich $\mathfrak{f}$ beim Kommutator der Projektionen punktweise fest, so können die Fixpunkte des induzierenden Kommutators nach (2) nicht in zwei Hyperebenen eingebettet werden, so daß dieser die Identität in P sein muß[1]). Insgesamt sehen wir, daß mit X_1, X_2 stets auch die Bildpunkte $\Phi(X_1)$, $\Phi(X_2)$ konjugiert sind und umgekehrt.

Nun können wir zeigen, daß jeder Punkt X' des Bildraumes P' ein Urbild $\Phi^{-1}(X')$ besitzt; natürlich dürfen wir annehmen, daß X' nicht auf $\mathfrak{f}'$ liegt. Dann wird die Polare $\mathfrak{q}'(X')$ entweder von unabhängigen Flächenpunkten $Z'_0, \ldots, Z'_n$ aufgespannt, oder sie ist frei von Flächenpunkten. Im ersten Fall gibt es in P einen zu $\Phi^{-1}(Z'_0), \ldots, \Phi^{-1}(Z'_n)$ konjugierten Punkt X, und $\Phi(X)$ fällt — weil zu $Z'_0, \ldots, Z'_n$ konjugiert — mit X' zusammen. Im zweiten Fall verbinden wir X' mit zwei Flächenpunkten Z'_{11} und Z'_{21}, um zwei verschiedene Geraden $G'_1 = Z'_{11} + Z'_{12}$ und $G'_2 = Z'_{21} + Z'_{22}$ durch X' mit je genau zwei Flächenpunkten zu erhalten. Die in $\mathfrak{q}'(X')$ liegende Polare der Ebene $G'_1 + G'_2$ enthält $n-1$ paarweise konjugierte Punkte $X'_0, \ldots, X'_{n-2}$, von denen keiner zu $\mathfrak{f}'$ gehört. Der erste Teil des Beweises zeigt, daß diese $n-1$ Punkte Urbilder besitzen. Die Urbilder liegen einerseits nicht auf $\mathfrak{f}$ und sind paarweise konjugiert, also unabhängig; andererseits sind sie auch zu den Urbildern der Z'_{ij}

[1]) Allgemein folgt so, daß eine Projektivität in P durch ihren Verlauf auf $\mathfrak{f}$ eindeutig festgelegt ist.

konjugiert. Die Geraden $\Phi^{-1}(Z'_{11})+\Phi^{-1}(Z'_{12})$ und $\Phi^{-1}(Z'_{21})+\Phi^{-1}(Z'_{22})$ liegen daher in einer Ebene; sie schneiden sich in einem Punkte X, der nicht zu $\mathfrak{f}$ gehören kann. Die Geraden G'_1, G'_2 erweisen sich so als Spuren der zu X gehörigen transformierten Projektion, und wir erhalten $X'=\Phi(X)$.

Schließlich ergibt sich ganz leicht die Geradentreue von Φ. Drei verschiedene Punkte X_1, X_2, X_3 in P (oder in P') sind nämlich genau dann kollinear, wenn jeder zu X_1 und X_2 konjugierte Punkt des Raumes auch zu X_3 konjugiert ist, und diese Charakterisierung ist bei Φ invariant.

Gestützt auf den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie erkennen wir die Abbildung Φ als eine Kollineation von P auf P' und haben damit unser Ziel erreicht.

Es folgt beispielsweise, daß eine Abbildung mit der Eigenschaft (E) nur zwischen zwei Quadriken existieren kann, die über isomorphen Körpern erklärt sind.

Karlsruhe, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 29. März 1961)

GRÖBNER, W.
Math. Zeitschr. 77, 101–105 (1961)

Über das Umkehrproblem der Abelschen Integrale

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22.9.1961 gewidmet

Von

W. GRÖBNER

1. Die Umkehrung eines Abelschen Integrals war seit der Zeit EULERs ein Problem, das viele Mathematiker angezogen und zu großartigen Leistungen, besonders zur Theorie der Abelschen Funktionen angeregt hat. Es handelt sich hier um Integrale der Gestalt

$$u = \int_{(x,y)}^{(X,Y)} \varphi(x, y)\, dx, \tag{1}$$

in denen der Integrand $\varphi(x, y)$ eine rationale Funktion der Variablen x, y, und zwar y eine algebraische Funktion von x bedeutet, die durch eine irreduzible algebraische Gleichung

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

definiert ist. Das Integral ist auf der zur Gl. (2) gehörenden Riemannschen Fläche längs eines Weges C zu erstrecken, welcher die beiden Punkte mit den Koordinaten (x, y) und (X, Y) verbindet. (Wir werden im folgenden daran festhalten, die unteren Grenzen der Integrale mit kleinen, die oberen Grenzen mit großen Buchstaben zu bezeichnen.) Der Wert des Integrals ändert sich bei stetiger Änderung des Weges C nicht, solange kein Pol des Integranden überstrichen wird; fügt man zu C einen geschlossenen Weg hinzu, welcher einen solchen Pol umschließt oder sich auf der Riemannschen Fläche nicht stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt, so nimmt u im allgemeinen um eine sogenannte Periode zu.

Betrachtet man daher eine genügend kleine Umgebung des (regulär vorausgesetzten) Anfangspunktes (x, y), so ist u eine eindeutige analytische Funktion der oberen Grenze (X, Y), also letztlich der Variablen X; wenn man dagegen diese Beschränkung aufhebt und die Integrationswege sich beliebig über die Riemannsche Fläche erstrecken dürfen, so wird u eine unendlich vielwertige Funktion von X, und zwar erhält man alle Funktionswerte für dieselbe Stelle (X, Y), wenn man beliebige Vielfache der für das Integral geltenden Perioden hinzufügt. Die Anzahl $2p$ der linear unabhängigen Perioden (abgesehen von etwaigen logarithmischen Perioden, die von logarithmischen Stellen des Integranden herrühren) hängt vom Geschlecht p der Gl. (2) bzw. der zugehörigen Riemannschen Fläche ab.

Die Umkehrung des Integrals (1), d.h. die Lösung der Aufgabe, bei festgehaltenen unteren Grenzen (x, y) die Koordinaten der oberen Grenze (X, Y) für einen gegebenen Wert u zu berechnen, führt auf eine Darstellung

$$X = g(u), \qquad Y = h(u) \tag{3}$$

durch analytische Funktionen von u, welche sich für $u=0$ auf die Anfangswerte reduzieren:

$$x = g(0), \qquad y = h(0), \tag{3a}$$

die Gl. (2) identisch erfüllen:

$$f(g(u), h(u)) = 0 \quad \text{(identisch in } u\text{)} \tag{3b}$$

und $2p$ linear unabhängige Perioden ω haben:

$$g(u+\omega) = g(u), \qquad h(u+\omega) = h(u). \tag{3c}$$

Es ist nun leicht einzusehen, daß eine einwertige (nicht konstante) analytische Funktion einer komplexen Variablen höchstens zwei linear unabhängige Perioden haben kann[1]; daher können die Funktionen (3) nur in den Fällen $p=0, 1$ eindeutige analytische Funktionen sein. Diese Umkehrfunktionen sind in der Tat sehr interessante und wichtige Funktionen, nämlich für $p=0$ die trigonometrischen Funktionen mit einer Periode, für $p=1$ die elliptischen Funktionen mit zwei unabhängigen Perioden.

Es ist daher verständlich, daß sich die Bemühungen der Mathematiker schon vor 150 Jahren darauf konzentrierten, ähnliche Umkehrfunktionen auch in den Fällen $p>1$ zu konstruieren und deren Eigenschaften zu erforschen. Aber es müssen dann notwendig unendlich vielwertige Funktionen sein. JACOBI bezeichnete solche Funktionen als absurd[2]) und formulierte, um mit einwertigen Funktionen durchzukommen, sein berühmtes Umkehrproblem. Aber schon sein Zeitgenosse GÖPEL erhob gegen die Behauptung der Absurdität unendlich vielwertiger Funktionen Einspruch. In der Folge wurden eingehende Untersuchungen über die Eigenschaften dieser Umkehrfunktionen und der durch sie bewirkten konformen Abbildungen, vor allem von WIRTINGER, angestellt, auf die hier aber nicht näher einzugehen ist[3]). Das Thema der vorliegenden Arbeit ist, zu zeigen, wie man mit Hilfe der Lie-Reihen[4]) sehr rasch und einfach eine Darstellung der Umkehrfunktion eines einzelnen Integrals gewinnen und mit deren Hilfe weiter operieren kann; ferner soll dieselbe Methode auch für die Lösung des Jacobischen Umkehrproblems angewandt werden.

2. Um die Umkehrfunktionen des Integrals (1) zu gewinnen, bilden wir zunächst den Differentialoperator

$$D = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{f_x}{\varphi f_y}\frac{\partial}{\partial y}, \tag{4}$$

---

[1]) Allgemeiner: Eine einwertige analytische Funktion von p komplexen Variablen kann höchstens $2p$ linear unabhängige Perioden haben. Siehe darüber: F. CONFORTO, Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, S. 5ff. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1956.

[2]) Vgl. Encyklopädie der Math. Wissensch., II B7. Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen. Von A. KRAZER und W. WIRTINGER. Leipzig 1920. Insbesondere Nr. 4: Umkehrung eines einzelnen Abelschen Integrals.

[3]) Vgl. den oben zitierten Enzyklopädie-Artikel.

[4]) Hinsichtlich der allgemeinen Theorie der Lie-Reihen verweise ich auf mein Buch: Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen. Deutscher Verlag d. Wissensch., Berlin 1960.

wo φ die im Integranden von (1) auftretende rationale Funktion, f_x und f_y die partiellen Ableitungen des Polynoms $f(x,y)$ in (2) bedeuten. Mit Ausnahme derjenigen Punkte (x,y) der Riemannschen Fläche, in denen φ oder φf_y verschwindet, ist der Operator D überall holomorph; bezeichnet also (x,y) einen solchen für D regulären Punkt, so können wir die Lie-Reihen bilden:

$$X = e^{uD}x = g(u), \qquad Y = e^{uD}y = h(u); \tag{5}$$

sie haben als Potenzreihen in u einen positiven Konvergenzradius und stellen innerhalb ihres Konvergenzkreises holomorphe Funktionen von u dar, die auf der Riemannschen Fläche mit Ausnahme der eben besprochenen Ausnahmspunkte überall analytisch fortgesetzt werden können. Diese Funktionen befriedigen die Gl. (2), denn mit Rücksicht auf den für Lie-Reihen geltenden Vertauschungssatz findet man:

$$f(X,Y) = f(e^{uD}x, e^{uD}y) = e^{uD}f(x,y) = f(x,y) = 0;$$

denn wegen $Df = 0$ reduziert sich die Reihe $e^{uD}f$ auf das erste Glied $f(x,y)$, und dieses verschwindet, weil der Anfangspunkt voraussetzungsgemäß auf unserer Riemannschen Fläche liegt, also die Gl. (2) befriedigt. Daher liefern die Funktionen (5), die sich für $u = 0$ auf die Anfangswerte (x,y) reduzieren, eine Parameterdarstellung der Riemannschen Fläche in der Umgebung des Anfangspunktes, die analytisch über die ganze Riemannsche Fläche mit Ausnahme der Ausnahmspunkte fortgesetzt werden kann.

Wenn wir die erste Funktion nach u differenzieren, so erhalten wir mit Rücksicht auf den Vertauschungssatz:

$$\frac{dX}{du} = e^{uD}(Dx) = e^{uD}\left(\frac{1}{\varphi(x,y)}\right) = \frac{1}{\varphi(X,Y)},$$

oder

$$du = \varphi(X,Y)\,dX. \tag{6}$$

Integriert man (6) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $u = 0$ an der Stelle (x,y), so erhält man das Abelsche Integral (1).

Satz. *Die mit dem Operator* (4) *gebildeten Lie-Reihen* (5) *stellen die Umkehrfunktionen des Integrals* (1) *dar. Sie können überall auf der Riemannschen Fläche von* (2), *ausgenommen diejenigen Punkte, in denen* φ *oder* φf_y *verschwindet, analytisch fortgesetzt werden; sie lassen alle Perioden zu, die zum Integral* (1) *gehören, und sind daher im allgemeinen unendlich vielwertig; sie liefern gleichzeitig auch eine Parameterdarstellung der Riemannschen Fläche, d. h. der algebraischen Kurve* (2).

3. Es sei nun folgendes, dem Jacobischen nahestehende Umkehrproblem gestellt:

$$\begin{cases} u_1 = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(X_1,Y_1)} \varphi_1(x,y)\,dx + \int\limits_{(x_2,y_2)}^{(X_2,Y_2)} \varphi_1(x,y)\,dx, \\ u_2 = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(X_1,Y_1)} \varphi_2(x,y)\,dx + \int\limits_{(x_2,y_2)}^{(X_2,Y_2)} \varphi_2(x,y)\,dx; \end{cases} \tag{7}$$

$\varphi_1(x,y)$ und $\varphi_2(x,y)$ seien rationale Funktionen der Variablen x, y, welche die Gl. (2) erfüllen müssen. Die Integrale sind auf der zugehörigen Riemannschen Fläche zu erstrecken längs eines Weges, welcher die untere Grenze mit der oberen Grenze verbindet; die Wege sind beliebig, müssen aber in zwei untereinanderstehenden Integralen gleich gewählt werden. Ändert man einen Weg ab, indem man einen geschlossenen Periodenweg hinzufügt, so nehmen u_1 und u_2 simultan um entsprechende Perioden ω_1 und ω_2 zu (Simultanperiode).

Es ist die Aufgabe gestellt, bei festen unteren Grenzen (x_k, y_k) und gegebenen Werten u_1, u_2 die Koordinaten (X_k, Y_k) der oberen Grenzen zu berechnen.

Zur Vereinfachung führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$\varphi_{ik} = \varphi_i(x_k, y_k) \qquad (i,k = 1,2) \tag{8}$$

und machen ferner die Voraussetzung:

$$\delta = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21} \neq 0. \tag{9}$$

Ferner bedeute

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{f_x(x_k, y_k)}{f_y(x_k, y_k)} \frac{\partial}{\partial y_k} \qquad (k = 1,2) \tag{10}$$

und

$$\Delta_1 = \frac{\varphi_{22}}{\delta} D_1 - \frac{\varphi_{21}}{\delta} D_2, \qquad \Delta_2 = \frac{-\varphi_{12}}{\delta} D_1 + \frac{\varphi_{11}}{\delta} D_2; \tag{11}$$

diese beiden Operatoren sind miteinander vertauschbar:

$$\Delta_1 \Delta_2 = \Delta_2 \Delta_1, \tag{11a}$$

wie man durch direktes Nachrechnen bestätigen kann. Mit diesen Operatoren bilden wir die Lie-Reihen:

$$\left.\begin{array}{l} X_k = e^{u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2} x_k = g_k(x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ u_1, u_2) \\ Y_k = e^{u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2} y_k = h_k(x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ u_1, u_2) \end{array}\right\} (k = 1,2). \tag{12}$$

Sie liefern analytische Funktionen der komplexen Variablen u_1, u_2, deren Abhängigkeit von den Anfangswerten x_k, y_k wir in der obigen Schreibweise zur Erinnerung gebracht haben. Mit Rücksicht auf (11a) dürfen wir diese Reihen nach u_1, u_2 differenzieren und den Vertauschungssatz anwenden; das gibt:

$$\frac{\partial X_1}{\partial u_1} = e^{u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2}(\Delta_1 x_1) = \frac{\varphi_{22}(X,Y)}{\delta(X,Y)},$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial u_2} = e^{u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2}(\Delta_2 x_1) = \frac{-\varphi_{12}(X,Y)}{\delta(X,Y)},$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial u_1} = e^{u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2}(\Delta_1 x_2) = \frac{-\varphi_{21}(X,Y)}{\delta(X,Y)},$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial u_2} = e^{u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2}(\Delta_2 x_2) = \frac{\varphi_{11}(X,Y)}{\delta(X,Y)};$$

die rechts stehenden Funktionen sind in den Variablen X_k, Y_k zu schreiben. Daraus folgt für die Jacobische Matrix:

$$\frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} \varphi_{22}, & -\varphi_{12} \\ -\varphi_{21}, & \varphi_{11} \end{pmatrix} \tag{13}$$

und für deren Reziproke:

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(X_1, X_2)} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}, & \varphi_{12} \\ \varphi_{21}, & \varphi_{22} \end{pmatrix}. \tag{13a}$$

Diese Relationen können wir auch so schreiben:

$$\begin{cases} du_1 = \varphi_1(X_1, Y_1)\, dX_1 + \varphi_1(X_2, Y_2)\, dX_2, \\ du_2 = \varphi_2(X_1, Y_1)\, dX_1 + \varphi_2(X_2, Y_2)\, dX_2; \end{cases} \tag{14}$$

integriert man diese Gleichungen unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (für $u_1 = u_2 = 0$ ist $X_k = x_k$, $Y_k = y_k$), so erhält man genau die Integrale (7).

Die Funktionen (12) *sind also die Umkehrfunktionen des Umkehrproblems* (7).

Bei Vertauschung der Indizes $k = 1, 2$ untereinander gehen die Operatoren Δ_1 und Δ_2 in sich über. Ist daher $F(X_k, Y_k)$ eine symmetrische Funktion, die gegenüber einer Vertauschung der beiden Indizes k invariant ist, so gilt zunächst die Darstellung dieser Funktion durch eine Lie-Reihe:

$$F(X_1, Y_1;\ X_2, Y_2) = e^{u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2} F(x_1, y_1;\ x_2, y_2); \tag{15}$$

hier ist nun die rechte Seite invariant gegenüber einer Vertauschung der unteren Grenzen (x_1, y_1) und (x_2, y_2); man darf also die Zuordnung der unteren zu den oberen Grenzen der Integrale (7) beliebig permutieren, ohne die Gleichungen zu ändern; das ist eine Tatsache, die man leicht auch durch direkte Überlegung bestätigen kann.

Es ist nicht schwierig, das obige Resultat auf p Gleichungen mit p Integralen zu verallgemeinern. Beim Jacobischen Umkehrproblem insbesondere ist p das Geschlecht der Kurve (2), und als Integrale werden p linear unabhängige Integrale 1. Gattung eingesetzt; in diesem Falle kann die Umkehrung mit eindeutigen meromorphen Funktionen geleistet werden[5]).

[5]) Vgl. das oben zitierte Buch von F. Conforto. Diese klassische Lösung des Jacobischen Umkehrproblems ist insoferne vorteilhafter, als sie — die Kenntnis der Perioden vorausgesetzt — die Umkehrfunktionen als Quotienten von ganzen Funktionen, also in ihrem gesamten Existenzbereich darstellt. Die oben mitgeteilten Umkehrungen sind dagegen viel allgemeiner anwendbar und setzen die Kenntnis der Perioden nicht voraus, aber sie liefern zunächst nur ein Funktionselement, das noch analytisch über den Existenzbereich der Funktionen fortgesetzt werden muß.

Innsbruck, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 10. April 1961)

TILLMANN, H. G.
Math. Zeitschr. 77, 106–124 (1961)

Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytische Funktionen

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22.9.1961 gewidmet

Von

HEINZ GÜNTHER TILLMANN

Einleitung. Die Grundidee der Distributionstheorie von L. SCHWARTZ [4] war es, die stetige Funktion $f(x)$ mit dem linearen Funktional $f[\varphi] = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx$ auf einem geeigneten Funktionenraum $\mathscr{D}$ zu identifizieren, wobei in $\mathscr{D}$ eine solche Topologie eingeführt wurde, daß diese Funktionale stetig sind. Die stetigen linearen Funktionale u auf $\mathscr{D}$, eben die Distributionen, stellen dann eine sehr brauchbare Verallgemeinerung der stetigen Funktionen dar, und die wichtigsten Operationen der Analysis lassen sich auf diese allgemeineren Gebilde in einfacher Weise übertragen.

G. KÖTHE [1, 2] hat nun gezeigt, daß die stetigen Linearfunktionen u auf dem Raum $\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{R}})$ der auf der geschlossenen reellen Geraden holomorphen und in ∞ verschwindenden Funktionen umkehrbar eindeutig als „Randverteilung" eines Paares $\{u_1, u_2\}$ in oberer bzw. unterer Halbebene holomorpher Funktionen u_i darstellbar ist. Das gilt also insbesondere auch für die durch stetige, summierbare Funktionen $f(x)$ definierten Funktionale $f[\varphi] = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx$. Es ist also eine recht enge Beziehung zwischen den Distributionen auf $\boldsymbol{R}$ und den Randverteilungen auf $\boldsymbol{R}$ von im Komplement von $\overline{\boldsymbol{R}}$ holomorphen Funktionen zu erwarten.

Nun zeigte schon G. KÖTHE in [2], daß im Falle einer endlichen, analytischen Jordan-Kurve C jede Distribution u auf C als Randverteilung einer im Komplement von C holomorphen Funktion $\tilde{u}$ aufgefaßt werden kann.

Vom Verfasser wurde in [5], I gezeigt, daß auch für analytische Jordan-Kurven C durch den Punkt ∞ jedenfalls jede Distribution u mit kompaktem Träger K als Randverteilung einer im Komplement von K holomorphen und in ∞ verschwindenden Funktion $\tilde{u}$ aufgefaßt werden kann, und die dabei auftretenden Funktionen wurden durch ihr Wachstumsverhalten charakterisiert:

$$\text{(I)} \quad |\tilde{u}(z)| \leqq M \cdot \varrho(z, K)^{-n} \quad \text{in} \quad \{\varrho(z, K) \leqq 1\}; \quad \varrho(z, K) = \inf_{z' \in K} |z - z'|.$$

Eine entsprechende Abschätzung charakterisiert im Falle mehrerer Variablen diejenigen holomorphen Funktionen, welche Distributionen mit kompaktem Träger als Randverteilung besitzen.

In [5], II wurde dann diese Identifizierung von Distributionen mit Randverteilungen ausgedehnt auf die Distributionenräume $\mathscr{D}_{L^p}(\boldsymbol{R}^N)$, $1 < p < \infty$ (vgl.

[4], Bd. 2, S. 55 ff.). Insbesondere gilt für Distributionen $u = D^k g$, die k-te Ableitung einer Funktion $g(x) \in \boldsymbol{L}^2$ sind, eine Abschätzung der Indikatrix $\tilde{u}$:

$$\text{(II)} \qquad |\tilde{u}(z)| \leqq M \cdot |y|^{-k-\frac{1}{2}}, \quad |y| = |\operatorname{Im}(z)| = \varrho(z, \boldsymbol{R})$$

und weiterhin auch (zur analogen Frage für $\mathscr{D}'_{L^2}$ vgl. [6]):

$$\text{(II a)} \qquad \|u(x+iy)\|_{L^2} \leqq M \cdot |y|^{-k}.$$

Für den Fall $k = 0$, also $u \in \boldsymbol{L}^2$ gilt für die Konvergenz gegen den Rand

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \tilde{u}(x + i\varepsilon) = \tilde{u}(x + i0) = u_+(x) \in \boldsymbol{L}^2 \\ \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \tilde{u}(x - i\varepsilon) = \tilde{u}(x - i0) = u_-(x) \in \boldsymbol{L}^2 \\ \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \{\tilde{u}(x + i\varepsilon) - u(x - i\varepsilon)\} = u_+(x) - u_-(x) = u(x), \end{cases}$$

wobei die Konvergenz im Sinne der Normtopologie von $\boldsymbol{L}^2$ erfolgt. Diese Resultate führen nun zur Darstellung weiterer Klassen und schließlich aller Distributionen durch „Randwerte" holomorpher Funktionen, nämlich als Limites der Form (III), wobei die Konvergenz im Sinne der starken Topologie der betreffenden Distributionenräume erfolgt.

Zunächst entsprechen den gemäßigten Distributionen u holomorphe Funktionen, deren Wachstumsverhalten durch eine Abschätzung

$$\text{(IV)} \qquad |\tilde{u}(z)| \leqq M(|z|) \cdot |y|^{-n}, \quad M(|z|) = M_0(1 + |z|^2)^m, \quad y = \operatorname{Im}(z),$$

charakterisiert ist (§ 1).

Dabei ist dann wegen (III) $\tilde{u}$ durch u nur bis auf eine ganze Funktion, die (IV) genügt, d.h. bis auf ein Polynom, festgelegt. Der Raum $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R})$ der gemäßigten Distributionen ist also dem Quotientenraum $\boldsymbol{H}_L(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})/\Lambda$, natürlich isomorph, wobei $\boldsymbol{H}_L(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})$ der Raum der Funktionen, die (IV) genügen, und Λ der Teilraum der Polynome ist.

Die Distributionen endlicher Ordnung werden charakterisiert durch die holomorphen Funktionen mit

$$\text{(V)} \qquad |\tilde{u}(z)| \leqq M(|z|) \cdot |y|^{-n}, \quad z = x + iy,$$

wobei $M(r)$ eine beliebige stetige Funktion ist. Der Raum der Distributionen endlicher Ordnung wird natürlich isomorph dem Quotientenraum $\boldsymbol{H}_F(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})/H(\boldsymbol{C})$ des Raumes der durch (V) charakterisierten holomorphen Funktion nach dem Teilraum der ganzen Funktionen (§ 2).

Damit münden diese Untersuchungen ein in die Theorie der Hyperfunktionen von M. Sato [3] in der gerade solche Klassen untersucht werden.

Aus dem Satoschen Beweis für das „Lokalisationsprinzip", das ebenso wie für Distributionen auch für Hyperfunktionen gilt, läßt sich dann (§ 3) die Aussage gewinnen, daß beliebige Distributionen u charakterisiert werden können durch holomorphe Funktionen $\tilde{u}(z)$ mit

$$\text{(VI)} \qquad |\tilde{u}(z)| \leqq M(|z|) \cdot |y|^{-n(|z|)}, \quad 0 < |\operatorname{Im}(z)| \leqq 1,$$

wobei $M(r)$, $n(r)$ geeignete stetige Funktionen sind. Für jede durch (VI) charakterisierte Funktion $\tilde{u}(z)$ gilt für die Konvergenz gegen den Rand wieder: $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \tilde{u}(x \pm i\varepsilon) = u_{\pm}(x) \in \mathscr{D}'(\boldsymbol{R})$ im Sinne der starken Topologie von $\mathscr{D}'$. Der Distributionenraum $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R})$ ist also natürlich isomorph zum Quotientenraum $\boldsymbol{H}_{(VI)}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})/\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C})$ und die Abbildung $T_\varepsilon: \tilde{u} \to \tilde{u}_\varepsilon(x) = \tilde{u}(x+i\varepsilon) - \tilde{u}(x-i\varepsilon)$ liefert eine Approximation von u durch eine Schar $\tilde{u}_\varepsilon$ von holomorphen Funktionen, welche auch vom Parameter ε holomorph abhängen. Die Distribution u selbst erscheint so als die „analytische Fortsetzung" für $\varepsilon \to 0$.

Diese Tatsache ermöglicht nun eine über die übliche Distributionstheorie hinausreichende Behandlung der Multiplikation. Man setze $u \cdot v = w$, wenn

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon[\varphi] = \lim \int u_\varepsilon(x)\, v_\varepsilon(x)\, \varphi(x)\, dx$$
$$= w[\varphi] = \lim \int w_\varepsilon(x)\, \varphi(x)\, dx$$

ist, oder allgemeiner wenn der endliche Teil $Pf\, u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon[\varphi]$ (im Sinne von J. HADAMARD) existiert und mit $w[\varphi]$ übereinstimmt.

Damit erhält man eine Multiplikation, die für stetige Funktionen mit der klassischen übereinstimmt, aber z. B. auch für Dirac-Distributionen und Pseudofunktionen definiert ist. Wegen des bekannten Beispiels von L. SCHWARTZ $\left(\delta \cdot (x \cdot Pf\, x^{-1}) = \delta;\ (\delta \cdot x) \cdot Pf\, x^{-1} = 0\right)$ ist die Multiplikation in dem hier zugänglichen Rahmen natürlich auch nicht assoziativ, jedoch kommutativ und es gilt die Produktregel der Differentiation. Insbesondere wird $\delta(x-a) \cdot \delta(x-b) = 0$ sowohl für $a \neq b$, wie für $a = b$.[1])

Bezeichnungen. Es sei $\boldsymbol{R}$ der reelle, $\boldsymbol{C}$ der komplexe Zahlkörper, Ω die Riemannsche Zahlenkugel, $\boldsymbol{R}^N$ bzw. $\boldsymbol{C}^N$ der N-dimensionale Zahlenraum aller Punkte $x = (x_1, \ldots, x_N)$ mit $x_j \in \boldsymbol{R}$ bzw. $z = (z_1, \ldots, z_N)$ mit $z_j \in \boldsymbol{C}$. Für ganzzahlige m_j und $m = (m_1, \ldots, m_N)$ ist $\varphi^{(m)}(z) = \dfrac{\partial^{|m|}}{\partial z^m} \varphi(z) = \dfrac{\partial^{m_1 + \cdots + m_N}}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_N^{m_N}} \varphi(z)$ und $\psi = \varphi^{(-m)}$ bezeichnet ein m-faches Integral von φ, d.h. $\psi^{(m)} = \varphi$. $|m| = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$ ist die Ordnung, $\mathrm{Rg}(m) = \sup_{j=1,\ldots,N} m_j$ der Rang der Ableitung $\varphi^{(m)}$ bzw. des Operators $\dfrac{\partial^{|m|}}{\partial z^m}$.

Für $x = (x_1, \ldots, x_N)$ sei $x_{[j]} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N)$, entsprechend für ganzzahlige Vektoren $m = (m_1, \ldots, m_N)$ oder $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$, wobei wir σ_j für die Zahlen ± 1 verwenden.

Zur Abkürzung verwenden wir gelegentlich die Bezeichnungen $(e + x^2)^m = (1 + x_1^2)^{m_1} \cdots (1 + x_N^2)^{m_N}$, $(x - \zeta)^{-1} = (x_1 - \zeta_1)^{-1} \cdots (x_N - \zeta_N)^{-1}$,

$$\binom{m}{n} = \binom{m_1}{n_1} \cdots \binom{m_N}{n_N} \quad \text{und} \quad m! = m_1!\, m_2! \ldots m_N!.$$

Für Distributionen benutzen wir vielfach die Schreibweise $u(x) = u(x_1, \ldots, x_N)$, wenn es sich um ein Funktional auf einem Raum von Funktionen $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_N)$ handelt. Diese Schreibweise ist besonders nützlich bei Rela-

[1]) Auf diese Multiplikation soll an anderer Stelle näher eingegangen werden.

tionen wie $u(x) = \lim_{y \to 0} g(x+iy)$, wobei g eine Funktion der komplexen Variablen $z = x+iy$ ist. Den Wert von u an der Stelle φ schreiben wir $u[\varphi] = \langle u, \varphi \rangle$ oder auch symbolisch $\int u(x)\, \varphi(x)\, dx$.
Im Übrigen schließen wir uns weitgehend an die Bezeichnungen in [5], II an.

§ 1. Darstellung von gemäßigten Distributionen durch Randverteilungen analytischer Funktionen

Die gemäßigten Distributionen[2]) wurden von L. SCHWARTZ [4] eingeführt als die stetigen Linearfunktionen auf dem Raum $\mathcal{S}$ der beliebig oft differenzierbaren, schnell abnehmenden Funktionen. Dabei kann die Topologie in $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^N)$ definiert werden durch die Folge der Normen[3])

$$(1) \qquad \|\varphi\|_{k,n} = \sup_x \left| (e+x^2)^k \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} \varphi(x) \right|, \quad k = (k_1, \ldots, k_N), \quad n = (n_1, \ldots, n_N),$$

wobei die Bezeichnungen

$$(e+x^2)^k = (1+x_1^2)^{k_1} \cdots (1+x_N^2)^{k_N}, \quad \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_N}}{\partial x_1^{n_1} \ldots \partial x_N^{n_N}}$$

benutzt sind. Die Elemente des dualen Raumes sind dann diejenigen Distributionen u, die sich in der Form

$$(2) \qquad u(x) = \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} (e+x^2)^m g(x) = \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} f(x)$$

schreiben lassen, wobei $g(x)$ eine beschränkte, stetige Funktion ist. Indem man m vergrößert, kann man dann auch $g(x)$ stetig und aus $\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^N)$ annehmen.

Da nun die Funktionen $g \in \boldsymbol{L}^2$ umkehrbar eindeutig durch ihre Indikatrixfunktionen $\tilde{g}(\zeta)$, die in $(\Omega - \bar{\boldsymbol{R}})^N = (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})^N$ holomorph sind, charakterisiert werden, liegt eine natürliche Zuordnung zwischen den gemäßigten Distributionen (2) und holomorphen Funktionen $\hat{u}(z)$ nahe, derart, daß u durch $\hat{u}$ vollständig bestimmt ist.

Für die stetige Funktion $g \in \boldsymbol{L}^2$ und ihre Indikatrix

$$(3) \qquad \begin{cases} \tilde{g}(\zeta) = (2\pi i)^{-N} \int g(x)\, (x-\zeta)^{-1}\, dx \\ \qquad = (2\pi i)^{-N} \int\limits_{\boldsymbol{R}^N} g(x_1, \ldots, x_N)\, (x_1-\zeta_1)^{-1} \cdots (x_N-\zeta_N)^{-1}\, dx_1, \ldots, dx_N \end{cases}$$

gilt nach II[4]), Satz 14 und 18:

$$g_\varepsilon(x) = \sum_\sigma \prod_1^N \sigma_j \tilde{g}(x + i\varepsilon\sigma)$$

konvergiert in der $\boldsymbol{L}^2$-Topologie und gleichmäßig auf jeder kompakten Menge aus $\boldsymbol{R}^N$ gegen $g(x)$. Insbesondere gilt also $g_\varepsilon \to g$ im Sinne der starken Topologie

[2]) „distributions temperées".

[3]) oder auch durch die Normen $|||\varphi|||_{k,n} = \left\| (e+x^2)^k \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} \varphi(x) \right\|_{L^2}$.

[4]) Mit I bzw. II werden im folgenden die Arbeiten [5], I bzw. [5], II zitiert.

von $\mathscr{S}'$ und $\mathscr{D}'$. Der Distribution $u(x)=\frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n}(e+x^2)^m g(x)$, $g(x)$ stetig und $g\in L^2$, ordnen wir nun die holomorphe Funktion

$$(4)\qquad \begin{cases} \hat{u}(z)=\frac{\partial^{|n|}}{\partial z^n}(e+z^2)^m \tilde{g}(z)\in H\big((\Omega-\overline{R})^N\big)=H\big((C-R)^N\big) \\ \quad =\frac{\partial^{|n|}}{\partial z^n}(1+z_1^2)^{m_1}\dots(1+z_N^2)^{m_N}\tilde{g}(z) \end{cases}$$

zu. Nach II, Satz 13 genügen die Ableitungen von $\tilde{g}(z)$ einer Abschätzung

$$\left|\frac{\partial^{|k|}}{\partial z^k}\tilde{g}(z)\right|=|\tilde{g}^{(k)}(z)|\leqq M_k\cdot\prod_{j=1}^{N}|y_j|^{-\frac{1}{2}-k_j}=M_k|y|^{-\frac{e}{2}-k},\quad y_j=\operatorname{Im}(z_j),$$

und daher gilt

$$|\hat{u}(z)|\leqq M\cdot\sup_{\nu\leqq n}\left(e+|z|^2\right)^{m-\frac{\nu}{2}}\cdot|y|^{-\frac{e}{2}-(n-\nu)}$$

also

$$(5)\qquad |\hat{u}(z)|\leqq M\left(e+|z|^2\right)^m\cdot|y|^{-\frac{e}{2}-n}=M\cdot\prod_{j=1}^{N}\left(1+|z_j|^2\right)^{m_j}\cdot|y_j|^{-\frac{1}{2}-m_j}.$$

Die Näherungen

$$(6)\qquad \hat{u}_\varepsilon(x)=\sum_\sigma\prod_1^N\sigma_j\,\hat{u}_\sigma(x+i\,\varepsilon\,\sigma)$$

sind holomorphe, langsam wachsende Funktionen auf R^N und es gilt:

$$(7)\qquad \hat{u}_\varepsilon(x)=\frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n}(e+x^2)^m\tilde{g}_\varepsilon(x)+\varepsilon\cdot\frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n}\sum_\sigma\varrho_\sigma(x,\varepsilon)\,\tilde{g}_\sigma(x+i\,\varepsilon\,\sigma),$$

wobei $\varrho_\sigma(x,\varepsilon)$ ein Polynom in x und ε ist, dessen Grad $<2|m|$ ist. Da $\tilde{g}_\varepsilon\to g$ in der starken Topologie von $\mathscr{S}'$, Multiplikation mit Polynom und Differentation stetige Operationen in $\mathscr{S}'$ sind und das letzte Glied in (6) mit $\varepsilon\searrow 0$ in $\mathscr{S}'$ stark gegen Null geht, folgt $\hat{u}_\varepsilon(x)\to\frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n}(e+x^2)^m g(x)=u(x)$, wir haben also:

1.1. Satz. *Ordnet man der Distribution* $u(x)=\frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n}(e+x^2)^m g(x)\in\mathscr{S}'$, $g\in L^2$, *die holomorphe Funktion* $\hat{u}(z)=\frac{\partial^{|n|}}{\partial z^n}(e+z^2)^m\tilde{g}(z)\in H\big((C-R)^N\big)$ *zu, so genügt* $\hat{u}(z)$ *einer Abschätzung* (5) *und die Näherungen* (6) *konvergieren in* $\mathscr{S}'(R^N)$ *stark gegen* u. *Jede Distribution* $u\in\mathscr{S}$ *kann also als Randverteilung einer holomorphen Funktion* $\hat{u}\in H\big((C-R)^N\big)$ *aufgefaßt werden.*

Es gilt weiterhin

1.2. Satz. *Sei* $\hat{u}(z)$ *eine Funktion aus* $H\big((C-R)^N\big)$, *die einer Abschätzung* (5) *genügt. Dann konvergieren die holomorphen Funktionen* $\hat{u}_{\varepsilon,\sigma}(x)=\hat{u}_\sigma(x+i\,\varepsilon\sigma)$ *auf* R^N *gegen eine gemäßigte Distribution* u_σ *im Sinne der starken Topologie von* $\mathscr{S}'$.

Beweis. $\hat{u}_\sigma(z)$ ist die Komponente von $\hat{u}(z)$ im Gebiet $G_\sigma=\{z;\sigma_j\operatorname{Im}(z_j)>0\}$. Aus der Abschätzung $|\hat{u}(z)|\leqq M\left(e+|z|^2\right)^m|y|^{-\frac{e}{2}-n}$ erhalten wir für die unbestimmten Integrale

$$(8)\qquad \hat{u}_\sigma^{(-e_j)}(z)=\int_{\sigma_j\cdot i}^{z_j}\hat{u}_\sigma(z)\,dz_j$$

die Abschätzung

$$|\hat{u}_\sigma^{(-\varepsilon_j)}(z)| \leqq M_{\varepsilon_j}\left(e+|z|^2\right)^{m+\frac{\varepsilon_j}{2}} \cdot |y|^{-\frac{\varepsilon}{2}-(n-\varepsilon_j)} \quad \text{für} \quad |y_j| = |\operatorname{Im}(z_j)| \leqq 1.$$

Durch Induktion folgt dann bei wiederholter Integration

$$|\hat{u}_\sigma^{(-n)}(z) \leqq M_n\left(e+|z|^2\right)^{m+\frac{n}{2}} \cdot |y|^{-\frac{\varepsilon}{2}}$$

und eine weitere Integration nach jeder Variablen zeigt, daß

$$|\hat{u}_\sigma^{(-n-\varepsilon)}(z)| \leqq M_{n+\varepsilon}\left(e+|z|^2\right)^{m+\frac{n+\varepsilon}{2}} \tag{9}$$

in $|\operatorname{Im}(z_j)| \leqq 1$ und daß $\hat{u}_\sigma^{(-n-\varepsilon)}(z)$ auf $G_\sigma \cup \boldsymbol{R}^N$ stetig fortsetzbar ist. Die Funktion $f_\sigma(x)$, die durch die Randwerte gegeben ist, genügt der Bedingung

$$|f_\sigma(x)| \leqq |\hat{u}_\sigma^{(-n-\varepsilon)}(x+i\,0\sigma)| \leqq M_{n+\varepsilon} \cdot \left(e+|x|^2\right)^{m+\frac{n+\varepsilon}{2}} \tag{10}$$

und die Güte der Konvergenz gegen die Randwerte läßt sich abschätzen durch

$$|\hat{u}_\sigma^{(-n-\varepsilon)}(x+i\,\varepsilon\sigma) - \hat{u}_\sigma^{(-n-\varepsilon)}(x+i\,\delta\sigma)| \leqq M_{n+\varepsilon}^*\left(e+|x|^2\right)^{m+\frac{n+\varepsilon}{2}} \cdot |\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{\delta}|. \tag{11}$$

Die holomorphen Funktionen $\hat{u}_{\varepsilon,\sigma}(x) = \hat{u}(x+i\,\varepsilon\sigma)$ definieren auf $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^N)$ stetige lineare Funktionale

$$\hat{u}_{\varepsilon,\sigma}[\varphi] = \int \hat{u}_\sigma(x+i\,\varepsilon\sigma)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|n+\varepsilon|}\int \hat{u}_\sigma^{(-n-\varepsilon)}(x+i\,\varepsilon\sigma)\,\varphi^{(n+\varepsilon)}(x)\,dx, \tag{12}$$

die für $\varepsilon \searrow 0$ gegen

$$\hat{u}_\sigma[\varphi] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{u}_{\varepsilon,\sigma}[\varphi] = (-1)^{|n+\varepsilon|}\int \hat{u}_\sigma^{(-n-\varepsilon)}(x+i\,0\sigma)\,\varphi^{(n+\varepsilon)}(x)\,dx = f_\sigma^{(n+\varepsilon)}[\varphi] \tag{13}$$

konvergieren. Dabei erfolgt die Konvergenz im Sinne der starken Topologie von $\mathscr{S}'$. Denn wegen (11) gilt:

$$\hat{u}_\sigma[\varphi] - \hat{u}_{\varepsilon,\sigma}[\varphi] = (-1)^{|n+\varepsilon|}\int_{R^N}\{\hat{u}_\sigma^{(-n-\varepsilon)}(x+i\,0\sigma) - \hat{u}_\sigma^{(-n-\varepsilon)}(x+i\,\varepsilon\sigma)\}\varphi^{(n+\varepsilon)}(x)\,dx$$

$$|\hat{u}_\sigma[\varphi] - \hat{u}_{\varepsilon,\sigma}[\varphi]| \leqq \sqrt{\varepsilon}\,M_{n+\varepsilon}^*\int (e+x^2)^{m+\frac{n+\varepsilon}{2}}\,|\varphi^{(n+\varepsilon)}(x)|\,dx.$$

Auf der Umgebung

$$W_{k,n+\varepsilon,\eta} = \{\varphi;\,|(e+x^2)^k\,\varphi^{(n+\varepsilon)}(x)| < \eta\}$$

mit $k \geqq m + \dfrac{n+\varepsilon}{2}$ gilt also

$$|\hat{u}_\sigma[\varphi] - \hat{u}_{\varepsilon,\sigma}[\varphi]| \leqq \sqrt{\varepsilon}\,\eta\,M_{n+\varepsilon}^* \cdot \pi^N$$

und dies geht mit $\varepsilon \searrow 0$ gleichmäßig gegen 0. Insbesondere geht also $\hat{u}_\sigma[\varphi] - \hat{u}_{\varepsilon,\sigma}[\varphi]$ gleichmäßig gegen 0 auf jeder beschränkten Menge von $\mathscr{S}$. Mit den $\hat{u}_\sigma$ ist dann auch

$$u = \sum_\sigma \left(\prod_1^N \sigma_j\right)\hat{u}_\sigma$$

eine gemäßigte Distribution und

$$u = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{\sigma} \left(\prod_{1}^{N} \sigma_j \right) \hat{u}_{\varepsilon,\sigma} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{u}_\varepsilon \quad \text{in} \quad \mathcal{S}'.$$

Nach Satz 1.1. und 1.2. ist also jede Distribution $u \in \mathcal{S}'$ in eine Summe $u = \sum_{\sigma} \left(\prod \sigma_j \right) \hat{u}_\sigma$, $\hat{u}_\sigma(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{u}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma)$ zerlegbar. Bezeichnen wir mit $\boldsymbol{H}_L\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$ den Teilraum von $\boldsymbol{H}\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$, der aus den „langsam wachsenden" Funktionen $\hat{u}$ besteht, die einer Abschätzung (5) mit geeigneten M, m, n genügen, so ist die Abbildung

$$P: \quad \hat{u} \to u(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \hat{u}_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{\sigma} \left(\prod \sigma_j \right) \hat{u}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma) \tag{14}$$

nach Satz 1.1. und 1.2. eine Abbildung von $\boldsymbol{H}_L\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$ *auf* den Raum $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^N)$ der gemäßigten Distributionen.

Diese Abbildung ist aber nicht mehr eineindeutig. Man kann ja z. B. zu $\hat{u}(z)$ ein Polynom in $z_1, \ldots, z_N$ addieren, ohne daß dies auf den $\lim \sum_{\sigma} \left(\prod \sigma_j \right) \hat{u}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma)$ von Einfluß ist. Um den Kern der Abbildung P zu bestimmen, betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall $N = 1$. Dann ist $u \equiv 0$ genau dann, wenn $\hat{u}^{(-n-1)}(x + i0) - \hat{u}^{(-n-1)}(x - i0)$ ein Polynom höchstens n-ten Grades ist. Durch Wahl der Integrationskonstanten in den unbestimmten Integralen $\hat{u}_\sigma^{(-\nu)}(z)$ kann man also erreichen, daß $\hat{u}^{(-n-1)}(x + i0) - \hat{u}^{(-n-1)}(x - i0) \equiv 0$ wird. Dann ist also $\hat{u}^{(-n-1)} = \{\hat{u}_+^{(-n-1)}, \hat{u}_-^{(-n-1)}\}$ ein Paar holomorpher Funktionen welche auf $\boldsymbol{R}$ die gleichen stetigen Randwerte haben. Also sind $\hat{u}_+^{(-n-1)}$ und $\hat{u}_-^{(-n-1)}$ Komponenten einer ganzen analytischen Funktion $\hat{u}^{(-n-1)}(z)$, welche einer Abschätzung $|\hat{u}^{(-n-1)}(z)| \leqq M_{n+1}\left(1 + |z|^2\right)^{m + \frac{n+1}{2}}$ für alle $z \in \boldsymbol{C}$ genügt. Dann muß aber $\hat{u}^{(-n-1)}(z)$ ein Polynom von einem Grad $\leqq 2m + n + 1$ sein. Also ist $\hat{u}(z)$ ein Polynom von einem Grad $\leqq 2m$.

Wir beweisen nun durch Induktion:

1.3. Satz. *Der Kern des Homomorphismus* P: $\hat{u}(z) \to u(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{u}_\varepsilon(x)$ *von* $\boldsymbol{H}_L\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$ *auf* $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^N)$ *besteht aus allen endlichen Linearkombinationen von Funktionen* $z_j^\nu a_{j\nu}(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_N)$ *wobei* $a_{j\nu}(z_{[j]}) \in \boldsymbol{H}_L\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{N-1}\right)$ *ist (Pseudopolynome).*

Der Raum $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^N)$ *ist also natürlich isomorph dem Quotientenraum von* $\boldsymbol{H}_L\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$ *nach dem Teilraum* $\boldsymbol{H}_P\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$ *aller Pseudopolynomen:*

$$\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^N) \cong \boldsymbol{H}_L\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right) / \boldsymbol{H}_P\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right).$$

Beweis. $u[\varphi] = (-1)^{|n+e|} \int \left\{ \sum_{\sigma} \prod_{1}^{N} \sigma_j \, \hat{u}_\sigma^{(-n-e)}(x + i0\sigma) \right\} \varphi^{(n+e)}(x)\, dx.$

Ist $u[\varphi] = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D} < \mathcal{S}$, so muß die stetige Funktion $f(x) = \sum_{\sigma} \prod \sigma_j \, \hat{u}_\sigma^{(-n-e)}(x + i0\sigma)$ der Differentialgleichung $\frac{\partial^{|n+e|}}{\partial x^{n+e}} f(x) = 0$ genügen, wobei die Ableitungen im Sinne der Distributionstheorie zu bilden sind. Dann

ist aber $f(x)$ eine Summe $\sum_{j=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{n_j} x_j^{\nu} a_{j\nu}(x_{[j]})$, wobei die Koeffizienten $a_{j\nu}(x_{[j]})$ langsam wachsende, stetige Funktionen der $N-1$ Variablen x_k, $k \neq j$, sind[5]).

Nach dem Beweis von Satz 1.1. für $n=0$ und $N-1$ statt N gilt dann aber

$$a_{j\nu}(x_{[j]}) = \sum_{\sigma_{[j]}} \prod_{k\neq j} \sigma_k \hat{a}_{j\nu}(x_{[j]} + i\,0\,\sigma_{[j]}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{\sigma_{[j]}} \prod_{k\neq j} \sigma_k \hat{a}_{j\nu}(x_{[j]} + i\,\varepsilon\,\sigma_{[j]}).$$

Das bedeutet aber, daß die Integrationskonstanten bei der Bildung des $n+e$-fachen unbestimmten Integrals $\hat{u}_{\sigma}^{(-n-e)}(z)$ so gewählt werden können, daß

$$f(x) = \sum_{\sigma} \prod_{1}^{N} \sigma_j \hat{u}_{\sigma}^{(-n-e)}(x + i\,0\,\sigma) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{\sigma} \prod \sigma_j \hat{u}_{\sigma}^{(-n-e)}(x + i\,\varepsilon\,\sigma) \equiv 0$$

ist.

Es bleibt also zu zeigen:

1.4. Satz. *Ist $\hat{v}(z)$ eine gemäß (5) langsam wachsende holomorphe Funktion in $(C-R)^N$ mit stetigen Randwerten auf R^N, derart, daß*

$$v_0(x) = \sum_{\sigma} \prod_{1}^{N} \sigma_j \hat{v}_{\sigma}(x + i\,0\,\sigma) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{\sigma} \prod_{1}^{N} \sigma_j \hat{v}_{\sigma}(x + i\,\varepsilon\,\sigma) \equiv 0$$

gilt, so ist $\hat{v}(z)$ ein Pseudopolynom:

$$\hat{v}(z) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\nu=0}^{n_j} z_j^{\nu}\, b_{j\nu}(z_{[j]}),$$

$b_{j\nu}$ unabhängig von z_j und σ_j und umgekehrt gilt für jedes solche $\hat{v}(z)$ auch $v_0(x) \equiv 0$.

Beweis von Satz 1.4. Für $N=1$ ist die Behauptung schon bewiesen, da dann die Pseudopolynome $\hat{v}(z)$ genau die gewöhnlichen Polynome in z sind.

Für $N>1$ sei $\bar{\sigma} = \sigma_{[N]} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{N-1})$, $\sigma = (\sigma_{[N]}, \sigma_N) = (\bar{\sigma}, \sigma_N)$, $\bar{x} = x_{[N]}$. Die Funktion $v_0(x)$ zerlegen wir in $v_0 = v_+ - v_-$,

$$(15) \qquad \begin{cases} v_+(x) = \sum_{\sigma} \prod_{j=1}^{N-1} \sigma_j \hat{v}_{(\bar{\sigma},+1)}(\bar{x} + i\,0\,\bar{\sigma}, x_N + i\,0) \\ v_-(x) = \sum_{\bar{\sigma}} \prod_{1}^{N-1} \sigma_j \hat{v}_{(\bar{\sigma},-1)}(\bar{x} + i\,0\,\bar{\sigma}, x_N - i\,0). \end{cases}$$

$v_+(\bar{x}, x_N + i\,0)$, $v_-(\bar{x}, x_N - i\,0)$ stimmen also überein. Also sind $v_+(\bar{x}, z)$, $v_-(\bar{x}, z)$ Teile einer ganzen holomorphen Funktion in z_N, $v(\bar{x}, z_N)$. Da die $\hat{v}_{\sigma}(z)$ langsam wachsen, muß $v(\bar{x}, z_N)$ ein Polynom in z_N sein, dessen Koeffizienten stetige Funktionen von $(x_1, \ldots, x_{N-1}) = x_{[N]}$ sind, welche auch langsam wachsen:

$$v(x_{[N]}, z_N) = \sum_{k=0}^{k_N} z_N^k \cdot b_{N,k}(x_{[N]}).$$

Nach Satz 1.1. kann aber jedes $b_{N,k}$ durch die Randwerte holomorpher Funktionen $\hat{b}_{N,k,\sigma[N]}(z_1, \ldots, z_{N-1})$ dargestellt werden, wobei die

$$\hat{b}_{N,k,\varepsilon}(\bar{x}) = \sum_{\bar{\sigma}} \prod_{1}^{N-1} \sigma_j \hat{b}_{N,k,\bar{\sigma}}(\bar{x} + i\,\varepsilon\,\bar{\sigma})$$

[5]) Siehe Anhang.

auf jedem kompakten Intervall gleichmäßig gegen $b_{N,k}(x_{[N]}) = b_{N,k}(\bar{x})$ konvergieren.

$$\hat{v}_N(z_1, \ldots, z_N) = \sum_{k=0}^{k_N} z_N^k \, \hat{b}_{N,k,\sigma[N]}(z_1, \ldots, z_{N-1}) \quad \text{für } z \in G_\sigma \tag{16}$$

ist dann ein Pseudopolynom aus $\boldsymbol{H}_L\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$.

$$\hat{w}_N(z_1, \ldots, z_N) = \hat{v}(z_1, \ldots, z_N) - \hat{v}_N(z_1, \ldots, z_N)$$

ist ebenfalls aus $\boldsymbol{H}_L\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$ und

$$w_{N,0}(\bar{x}, z_N) = \sum_{\bar{\sigma}} \prod_{1}^{N-1} \sigma_j \, \hat{w}_{N,\sigma}(\bar{x} + i\,0\,\bar{\sigma}, z_N) \equiv 0$$

für alle komplexen $z_N (\notin \boldsymbol{R})$.

Fortsetzung der obigen Schlußweise liefert nun nacheinander die Abspaltung von Pseudopolynomen $\hat{v}_{N-1}, \ldots, \hat{v}_2$, bis schließlich eine Funktion $\hat{w}_1(z_1, \ldots, z_N) \in \boldsymbol{H}_L\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$ übrig bleibt, für die $\hat{w}_1(x_1 + i\,0, z_2, \ldots, z_N) - \hat{w}_1(x_1 - i\,0, z_2, \ldots, z_N) \equiv 0$ ist, so daß $\hat{w}_1(z_1, \ldots, z_N) = \hat{v}_1(z_1, \ldots, z_N)$ ein Pseudopolynom der Gestalt $\hat{v}_1(z_1, \ldots, z_N) = \sum_{0}^{k_1} z_1^k \cdot \hat{v}_{1,k,\sigma[1]}(z_2, \ldots, z_N)$, $z \in G_\sigma$ ist. Es ist also auch $\hat{v}(z_1, \ldots, z_N) = \hat{v}_1(z_1, \ldots, z_N) + \cdots + \hat{v}_N(z_1, \ldots, z_N)$ ein Pseudopolynom.

Daß umgekehrt für jedes Pseudopolynom $\hat{v}(z) = \hat{v}_1(z) + \cdots + \hat{v}_N(z)$ die Funktion $v_0(x) = \sum_{\sigma} \prod \sigma_j \hat{v}_\sigma(x + i\,0\sigma) \equiv 0$ ist, ist aber trivial, da jeder Summand $\hat{v}_j(z)$ des Pseudopolynoms in bezug auf die Variable z_j eine ganze Funktion ist und die Sprungfunktion

$$\sum_{k} \{(x_j + i\,0)^k - (x_j - i\,0)^k\} \, \hat{b}_{j,k,\sigma[j]}(z_{[j]})$$

identisch verschwindet.

Also ist Satz 1.4. und damit Satz 1.3. vollständig bewiesen.

§ 2. Darstellung von Distributionen endlicher Ordnung durch holomorphe Funktionen

Es sei $\mathscr{D}'_F(\boldsymbol{R}^N)$ der Raum der Distributionen endlicher Ordnung, d.h. der Ableitungen endlicher Ordnung von stetigen Funktionen. Wir zeigen zunächst, daß jede solche Distribution $u \in \mathscr{D}'_F(\boldsymbol{R}^N)$ sich schreiben läßt in der Form

$$u(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} f(x_1, \ldots, x_N)\, g(x_1, \ldots, x_N), \tag{17}$$

wobei $f(x_1, \ldots, x_N)$ die Einschränkung einer ganzen, analytischen Funktion $f(z_1, \ldots, z_N)$ auf den $\boldsymbol{R}^N$ und $g(x_1, \ldots, x_N)$ eine stetige, quadratintegrable Funktion ist. Dann liegt wieder die Approximation von $u(x)$ durch die holomorphen Funktionen

$$\hat{u}_\varepsilon(x) = \sum_{\sigma} \left(\prod_{1}^{N} \sigma_j \right) \hat{u}_\sigma(x + i\,\varepsilon\sigma)$$

nahe, wobei

$$\hat{u}(z_1, \ldots, z_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial z^m} f(z_1, \ldots, z_N)\, \tilde{g}(z_1, \ldots, z_N) \in \boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})^N\big)$$

ist.

2.1. Lemma[6]. *Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_N)$ eine beliebige stetige Funktion im Raume $\boldsymbol{R}^N$ von N reellen Variablen. Dann existiert eine ganze analytische Funktion $f(z_1, \ldots, z_N)$ im Raume $\boldsymbol{C}^N$ von N komplexen Variablen, welche keine Nullstellen besitzt und für reelle $z_i = x_i$ der Ungleichung*

$$f(x_1, \ldots, x_N) \geqq |\varphi(x_1, \ldots, x_N)| \tag{18}$$

genügt.

Beweis. Sei $r(x) = (x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{\frac{1}{2}}$, $k(s) = \max\limits_{0 \leq r(x) \leq s} 1 + |\varphi(x_1, \ldots, x_N)|$. Dann ist $k(s) \geqq 1$, monoton wachsend und stetig. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ seien zwei monotone, divergente Folgen positiver reeller Zahlen mit $a_n > b_n$ (z. B. $a_n = 2n$, $b_n = n$). Es gibt dann eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen m_n, so daß

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{2m_n} \geqq k(a_{n+1}) \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots .$$

Dann ist

$$h_1(z) = k(a_1) + \sum_1^\infty \left(\frac{z}{b_n}\right)^{2m_n} \tag{19}$$

wegen $b_n \to \infty$ eine gerade, ganze analytische Funktion von z und es gilt

$$h_1(a_n) \geqq \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{2m_n} \geqq k(a_{n+1}), \quad \text{also } h_1(x) \geqq k(x) \geqq 1$$

für alle reellen x. Dann ist auch

$$h(z_1, \ldots, z_N) = k(a_1) + \sum_1^\infty \left(\frac{z_1^2 + \cdots + z_N^2}{b_n^2}\right)^{m_n} \tag{20}$$

eine ganze analytische Funktion im $\boldsymbol{C}^N$ und es gilt für reelle Argumente $z_i = x_i$:

$$h(x_1, \ldots, x_N) = h_1\big(r(x)\big) \geqq k\big(r(x)\big) \geqq 1 + |\varphi(x_1, \ldots, x_N)| .$$

Mit h ist auch $f(z_1, \ldots, z_N) = \exp\big(h(z_1, \ldots, z_N)\big)$ eine ganze, dazu nullstellenfreie, analytische Funktion und aus $e^s \geqq s$ für $s \geqq 0$ folgt

$$f(x_1, \ldots, x_N) \geqq h(x_1, \ldots, x_N) \geqq 1 + |\varphi(x_1, \ldots, x_N)| .$$

Es sei nun $u(x_1, \ldots, x_N)$ eine Distribution endlicher Ordnung, also

$$u(x_1, \ldots, x) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \psi(x_1, \ldots, x_N)$$

mit stetigem ψ. Nach 2.1. können wir dann $\varphi(x) = \psi(x) \cdot \prod\limits_{j=1}^{N} (1 + x_j^2)$ durch eine nullstellenfreie, ganze analytische Funktion $f(z_1, \ldots, z_N)$ majorisieren. $g(x) = \frac{\psi(x)}{f(x)}$ wird dann durch $\prod\limits_1^N (1 + x_j^2)^{-1}$ majorisiert, ist also eine stetige

[6] Vgl. Sato [3], S. 161.

Funktion aus $L^2(R^N)$, welche differenzierbar ist, falls ψ es ist und es ist

$$u(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} f(x_1, \ldots, x_N)\, g(x_1, \ldots, x_N).$$

Nach II, Satz 14 und 18 ist dann die Indikatrix

$$(21) \quad \begin{cases} \tilde{g}(z) = \tilde{g}(z_1, \ldots, z_N) \\ \quad = (2\pi i)^{-N} \int\limits_{R^N} g(x_1, \ldots, x_N)\,(x_1 - z_1)^{-1} \ldots (x_N - z_N)^{-1}\, dx_1 \ldots dx_N \end{cases}$$

in $(C-R)^N$ holomorph und die holomorphen Funktionen

$$(22) \qquad g_\varepsilon(x) = \sum_\sigma \left(\prod_{j=1}^N \sigma_j \right) \tilde{g}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma)$$

konvergieren auf R^N in der L^2-Norm und gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall gegen $g(x_1, \ldots, x_N)$. Der Distribution

$$u(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} f(x_1, \ldots, x_N)\, g(x_1, \ldots, x_N)$$

ordnen wir nun die Funktion

$$\hat{u}(z_1, \ldots, z_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial z^m} f(z_1, \ldots, z_N)\, \tilde{g}(z_1, \ldots, z_N)$$

zu. Dann gilt

2.2. Satz. *Jede Distribution endlicher Ordnung $u(x_1, \ldots, x_N)$ hat die Form*

$$u(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} f(x_1, \ldots, x_N)\, g(x_1, \ldots, x_N)$$

mit

$$f \in H(C^N) \quad \textit{und} \quad g \in L^2(R^N) \cap \mathscr{C}(R^N).$$

Die holomorphen Funktionen

$$\hat{u}_\varepsilon(x_1, \ldots, x_N) = \sum_\sigma \prod_{j=1}^N \sigma_j\, \hat{u}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma)$$

mit

$$\hat{u}(z_1, \ldots, z_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial z^m} f(z_1, \ldots, z_N)\, \tilde{g}(z_1, \ldots, z_N)$$

konvergieren mit $\varepsilon \to 0$ in $\mathscr{D}'(R^N)$ stark gegen u.

Beweis. Wir haben nur noch die Konvergenz $\hat{u}_\varepsilon \to u$ zu zeigen. Ist B eine beschränkte Menge von Funktionen aus $\mathscr{D}(R^N)$, so haben alle $\varphi \in B$ ihren Träger in einer kompakten Menge $K = K_B$ und die $\frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \varphi(x)$, $\varphi \in B$ sind auf K gleichmäßig beschränkt. Nun ist

$$\hat{u}_\varepsilon(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} f(x_1, \ldots, x_N) \sum_\sigma \prod \sigma_j\, \tilde{g}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma) + \\ + \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \sum_\sigma \prod \sigma_j \{ f(x + i\varepsilon\sigma) - f(x) \} \tilde{g}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma).$$

Da $g_\varepsilon(x)=\sum_\sigma \prod \sigma_j \tilde{g}_\sigma(x+i\varepsilon\sigma)$ nach II, Satz 18 auf jeder kompakten Menge gleichmäßig gegen $g(x)$ strebt mit $\varepsilon\to 0$, geht das erste Glied in $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^N)$ stark gegen $u(x)$. Für das zweite Glied gilt aber

$$\left\langle \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \sum_\sigma \prod \sigma_j \{f(x+i\varepsilon\sigma)-f(x)\}\,\tilde{g}_\sigma(x+i\varepsilon\sigma),\, \varphi(x)\right\rangle$$
$$=(-1)^{|m|}\sum_\sigma \prod \sigma_j \int_K \{f(x+i\varepsilon\sigma-f(x)\}\,\tilde{g}_\sigma(x+i\varepsilon\sigma)\,\frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m}\varphi(x)\,dx.$$

Da die $\tilde{g}_\sigma(x+i\varepsilon\sigma)$ für $\varepsilon\to 0$ in der $\boldsymbol{L}^2$-Norm beschränkt bleiben, geht dieser Ausdruck wie $\theta(\varepsilon)$ gegen 0, gleichmäßig für alle $\varphi\in B$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Die Funktion

$$\hat{u}(z)=\frac{\partial^{|m|}}{\partial z^m} f(z)\,\tilde{g}(z)=\sum_{0\leqq n\leqq m}\binom{m}{n}\frac{\partial^{|m-n|}f(z)}{\partial z^{m-n}}\cdot\frac{\partial^{|n|}\tilde{g}(z)}{\partial z^n}$$
$$\left(\binom{m}{n}=\binom{m_1}{n_1}\cdots\binom{m_N}{n_N},\quad n\leqq m\Leftrightarrow n_j\leqq m_j\quad\text{für}\quad j=1,\ldots,N\right)$$

genügt wegen II, Satz 3 einer Abschätzung

$$(23)\qquad \begin{cases} |\hat{u}(z)|\leqq k_0(|z|)\prod_{j=1}^{N}(1+|y_j|^{-m_j-1}) \\ \qquad\leqq k(|z|)\cdot\prod_{1}^{N}|y_j|^{-m_j-1}\quad\text{für}\quad |y_j|=|\operatorname{Im}(z_j)|\leqq 1, \end{cases}$$

wobei $k_0(r)$, $k(r)$ als stetige, monoton wachsende Funktionen gewählt werden können.

Die Gesamtheit aller holomorphen Funktionen aus $\boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$, die einer solchen Abschätzung (23) genügen, bezeichnen wir mit $\boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$. Man sieht dann leicht, daß $\boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$ genau aus denjenigen Funktionen aus $\boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$ besteht, von denen ein endlichfaches unbestimmtes Integral stetige Randwerte auf $\boldsymbol{R}^N$ besitzt. Daraus folgt unmittelbar

2.3. Satz. *Für jedes $\hat{u}(z)\in\boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$ konvergieren die holomorphen Funktionen $\hat{u}_\varepsilon(x)=\sum_\sigma\prod\sigma_j\hat{u}_\sigma(x+i\varepsilon\sigma)$ auf $\boldsymbol{R}^N$ im Sinne der starken Topologie von $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^N)$ gegen eine Distribution $u(x)$ von endlicher Ordnung.*

Die Abbildung P: $\hat{u}(z)\to u(x)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\sum_\sigma\prod_{j=1}^{N}\sigma_j\hat{u}_\sigma(x+i\varepsilon\sigma)$ ist also ein Homomorphismus von $\boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$ auf den Raum $\mathscr{D}'_F(\boldsymbol{R}^N)$.

Zur Bestimmung des Kerns dieser Abbildung P betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall.

Es gilt dann für $\hat{u}(z)\in\boldsymbol{H}_F(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$ und $u=P\hat{u}$, $\varphi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$

$$\langle u,\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\langle\hat{u}_+(x+i\varepsilon)-\hat{u}_-(x-i\varepsilon),\,\varphi(x)\rangle=$$
$$=(-1)^{|m|}\int\{\hat{u}_+^{(-m)}(x+i0)-\hat{u}_-^{(-m)}(x-i0)\}\,\varphi^{(m)}(x)\,dx.$$

Wenn nun $\langle u, \varphi\rangle \equiv 0$ gilt, so muß $\hat{u}_+^{(-m)}(x+i0) - \hat{u}_-^{(-m)}(x-i0)$ ein Polynom vom Grad $\leqq m-1$ sein. Da wir aber für $\hat{u}_\pm^{(-m)}$ ein beliebiges unbestimmtes Integral wählen, also die Integrationskonstanten geeignet vorgeben können, dürfen wir annehmen, daß $\hat{u}_+^{(-m)}(x+i0) - \hat{u}_-^{(-m)}(x-i0) \equiv 0$ ist. Dann ist aber $\hat{u}^{(-m)}(z)$ und damit auch $\hat{u}(z)$ eine ganze analytische Funktion von z.

Umgekehrt ist aber natürlich für jede ganze Funktion $\hat{u}(z)$ der Limes $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \{\hat{u}(x+i\varepsilon) - \hat{u}(x-i\varepsilon)\} = 0$ gleichmäßig auf allen kompakten Mengén, also erst recht $u_\varepsilon \to 0$ in der starken Topologie von $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R})$. Wir haben damit:

2.4. Satz. *Der Kern des Homomorphismus P von $\boldsymbol{H}_F(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$ auf $\mathscr{D}'_F(\boldsymbol{R})$ besteht genau aus dem Raum $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C})$ der ganzen analytischen Funktionen. Der Raum $\mathscr{D}'_F(\boldsymbol{R})$ ist also natürlich isomorph dem Quotientenraum $\boldsymbol{H}_F(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})/\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C})$.*

Im Falle beliebiger Dimension N hat ein m-faches unbestimmtes Integral $\hat{u}_\sigma^{(-m)}(z)$ der Komponenten $\hat{u}_\sigma(z)$ von $u \in \boldsymbol{H}_F\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$, $m = (m_1, \ldots, m_N)$, stetige Randwerte auf R^N. Indem wir notfalls die m_i vergrößern, können wir annehmen, daß die Randfunktionen

$$\psi_\sigma(x) = \hat{u}_\sigma^{(-m)}(x + i0\sigma) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{u}_\sigma^{(-m)}(x + i\varepsilon\sigma)$$

noch stetige Ableitungen vom Rang 1 haben. Die durch $\hat{u}(z)$ bestimmte Distribution hat dann die Gestalt

$$\langle u, \varphi\rangle = (-1)^{|m|} \int \psi(x)\, \varphi^{(m)}(x)\, dx,$$

$$\psi(x) = \sum_\sigma \prod_1^N \sigma_j \psi_\sigma(x) = \sum_\sigma \prod \sigma_j \hat{u}_\sigma^{(-m)}(x + i0\sigma)$$

ist nun $P\hat{u} = 0$, also $\langle u, \varphi\rangle \equiv 0$, so muß ψ die Gestalt $\psi(x) = \sum_{j=1}^N \prod_{k=0}^{m_j-1} x_j^k a_{jk}(x_{[j]})$ haben, wobei $a_{jk}(x_{[j]})$ stetige Funktionen sind (vgl. Anhang), ebenso wie ihre Ableitungen vom Rang 1. Dann gibt es aber nach dem Satz 2.2. holomorphe Funktionen $\hat{a}_{jk}(z_{[j]}) \in \boldsymbol{H}_F\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{N-1}\right)$, derart, daß alle Komponenten $\hat{a}_{jk,\sigma_{[j]}}$ von $\hat{a}_{jk}$ stetige Randwerte auf $\boldsymbol{R}^{N-1}$ haben und

$$a_{jk}(x_{[j]}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{\sigma_{[j]}} \prod_{i \neq j} \sigma_i \hat{a}_{j,k,\sigma_{[j]}}(x_{[j]} + i\varepsilon\sigma_{[j]}) \tag{24}$$

(gleichmäßige Konvergenz). Dann ist also mit

$$q_j(z) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{m_j-1} z_j^k \hat{a}_{jk}(z_{[j]}) & \text{für } \operatorname{Im}(z_j) > 0 \\ 0 & \text{für } \operatorname{Im}(z_j) < 0 \end{cases}$$

$$v(z) = u^{(-m)}(z) - \sum_{j=1}^N q_j(z) \in \boldsymbol{H}_F\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$$

ein anderes m-faches Integral von $\hat{u}$ und

$$v_0(x) = \sum_\sigma \prod_1^N \sigma_j v_\sigma(x + i0\sigma) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_\sigma \prod \sigma_j v_\sigma(x + i\varepsilon\sigma) \equiv 0.$$

Wir wollen zeigen, daß $v(z)$ sich zerlegen läßt in $v(z)=\sum_1^N v_j^0(z)$, wobei $v_j^0(z)$ in bezug auf die Variable z_j ganz ist, d.h. $v_j(z)\in \boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{j-1}\times \boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{N-j}\big)$.

2.5. Satz. *Der Kern des Homomorphismus P von $\boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$ auf $\mathscr{D}'_F(\boldsymbol{R}^N)$ besteht genau aus der Summe*

$$\boldsymbol{H}_{F,0}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{j-1}\times\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{N-j}\big)\cap\boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$$

der Räume derjenigen Funktionen, welche in bezug auf eine Variable ganz sind.

Beweis. Nach den Vorbemerkungen genügt es zu zeigen, daß jede Funktion $v(z)\in\boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$, für die $\sum_\sigma \prod \sigma_j v_\sigma(x+i\,o\,\sigma)\equiv 0$ ist, zu $\boldsymbol{H}_{F,0}$ gehört. Wir setzen $v(z)=v_N(z)$ und zeigen: Aus

$$(25)\qquad v_k(z)\in\boldsymbol{H}_F,\ \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_k}\prod_1^k \sigma_j v_{k,\sigma}(x_1+i\,o\,\sigma_1,\dots,x_k+i\,o\,\sigma_k,z_{k+1},\dots,z_N)\equiv 0$$

folgt $v_k(z)=v_{k-1}(z)+v_k^0(z)$ mit $v_k^0(z)\in\boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{k-1}\times\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{N-j}\big)$, $v_{k-1}(z)\in\boldsymbol{H}_F$ und Gültigkeit von (25) mit $k-1$ an Stelle von k. Sei nämlich (25) erfüllt, $f(z)$ ganz holomorph, nullstellenfrei und für reelle $z_i=x_i$ sei $f(x)\geqq |v_{k,\sigma}(x+i\,o\,\sigma)|\cdot\prod_1^N(1+x_j^2)$. Dann ist $w_{k,\sigma}(z)=\frac{v_{k,\sigma}(z)}{f(z)}$ auf $\boldsymbol{R}^N$ quadratintegrabel und stetig. $w_k(z)=\{w_{k,\sigma}(z)\}$ genügt dann auch der Relation (25) und

$$w_k^*(x_1,\dots,x_{k-1},z_k,\dots,z_N)=\sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_{k-1}}\prod_1^{k-1}\sigma_j w_{k,\sigma}(x_1+i\,o\,\sigma_1,\dots,x_{k-1}+i\,o\,\sigma_{k-1},z_k,\dots,z_N)$$

ist wegen

$$w_k^*(x_1,\dots,x_{k-1},x_k+i\,o,z_{k+1},\dots,z_N)-w_k^*(x_1,\dots,x_{k-1},x_k-i\,o,z_{k+1},\dots,z_N)\equiv 0$$

eine bezüglich z_k ganze analytische Funktion.

Sei $\tilde{w}_k^*(z)=(2\pi i)^{-k}\int_{\boldsymbol{R}^k}\frac{w_k^*(x_1,\dots,x_k,z_{k+1},\dots,z_N)}{(x_1-z_1)\dots(x_k-z_k)}\,dx_1,\dots,dx_k$ die Indikatrix von w_k^*. Dann gilt

$$(26)\qquad \begin{cases} w_k^*(x_1,\dots,x_k,z_{k+1},\dots,z_N) \\ \quad=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\sum_{\sigma_1\dots\sigma_k}\prod_1^k\sigma_j\tilde{w}_{k\sigma}^*(x_1+i\,\varepsilon\,\sigma_1,\dots,x_k+i\,\varepsilon\,\sigma_k,z_{k+1},\dots,z_N), \end{cases}$$

wobei die Konvergenz im quadratischen Mittel und gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall erfolgt.

Da der Integrand bezüglich x_k ganz analytisch ist, kann der Integrationsweg bezüglich x_k ins Komplexe verlegt werden, woraus folgt, daß auch die Komponenten von $\tilde{w}_k^*(z)$ bezüglich z_k zu ganzen analytischen Funktionen $\hat{w}_{k,\sigma}(z)$ fortgesetzt werden können, so daß die Funktionen $w_k^0(z)=\sum_{\sigma_k}\sigma_k\hat{w}_{k,\sigma}(z)$ zu $\boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)\cap\boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{k-1}\times\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{N-k}\big)$ gehört. Das gleiche gilt dann auch für $v_k^0(z)=f(z)\cdot w_k^0(z)$. Setzen wir nun noch $v_{k-1}(z)=v_k(z)-v_k^0(z)$,

so haben wir: $v_{k-1}(z) \in \boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$ und mit $w_{k-1}(z) = \frac{v_{k-1}(z)}{f(z)}$:

$$\sum_{\sigma_1 \dots \sigma_{k-1}} \prod_1^k \sigma_j\, v_{k-1,\sigma}(x_1 + i0\sigma_1, \dots, x_{k-1} + i0\sigma_{k-1}, z_k, \dots, z_N)$$

$$= f(x_1, \dots, x_{k-1}, z_k, \dots, z_N) \times$$

$$\times \Big\{ \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_{k-1}} \prod_1^{k-1} \sigma_j\, w_{k,\sigma}(x_1 + i0\sigma_1, \dots, x_{k-1} + i0\sigma_{k-1}, z_k, \dots, z_N) -$$

$$- \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \prod_1^k \sigma_j\, \hat{w}_{k,\sigma}(x_1, \dots, x_{k-1}, z_k, \dots, z_N) \Big\}$$

$$= f(x_1, \dots, x_{k-1}, z_k, \dots, z_N) \times$$

$$\times \Big\{ w_k^*(x_1, \dots, x_{k-1}, z_k, \dots, z_N) - \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \prod_1^k \sigma_j\, \hat{w}_{k,\sigma}(x_1, \dots, x_{k-1}, z_k, \dots, z_N) \Big\},$$

Hier hängt die rechte Seite analytisch von z_k ab. Für $z_k = x_k$ reell gilt aber wegen (26)

$$(27) \quad \begin{cases} w_k^*(x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_N) = \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \prod_1^k \sigma_j\, \tilde{w}_{k,\sigma}^*(x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_N) \\ \qquad\qquad = \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \prod_1^k \sigma_j\, \hat{w}_{k,\sigma}(x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_N). \end{cases}$$

Damit ist gezeigt, daß $v_{k-1}(z)$ der Relation (25) für $k-1$ an Stelle von k genügt. Durch Induktion folgt dann aber, daß $v(z) = v_N(z) = \sum_{j=1}^{N} v_j^0(z)$, wobei $v_k^0(z)$ bezüglich z_k ganz ist.

2.6. Korollar. *Der Raum $\mathscr{D}_F'(\boldsymbol{R}^N)$ der Distribution endlicher Ordnung ist natürlich isomorph dem Quotientenraum $\boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)/\boldsymbol{H}_{F,0}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$. Für $\hat{u}(z) \in \boldsymbol{H}_F$ konvergieren die Näherungen $\hat{u}_\varepsilon(x) = \sum_{\sigma} \prod_1^N \sigma_j\, \hat{u}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma)$ im Sinne der starken Topologie des Raumes $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^N)$ gegen die Distribution u, die das natürliche Bild von $\hat{u}$ in $\mathscr{D}_F'$ ist.*

Man erhält also für alle $\hat{u}(z) \in \boldsymbol{H}_F$ unmittelbar eine durch $\hat{u}$ auf dem Raum $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^N)$ der differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger definierte stetige Linearfunktion:

$$(28) \quad u[\varphi] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\boldsymbol{R}^N} \hat{u}_\varepsilon(x)\, \varphi(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\boldsymbol{R}^N} \Big(\sum_{\sigma} \prod \sigma_j\, \hat{u}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma) \Big)\, \varphi(x)\, dx.$$

§ 3. Darstellung beliebiger Distributionen durch holomorphe Funktionen. Eindimensionaler Fall

Es sei $u(x)$ eine beliebige Distribution, d.h. eine stetige Linearfunktion auf dem Raum $\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$. Es sei I_m das Intervall $(m-1, m+1)$, m eine ganze Zahl. Dann gibt es eine Zerlegung $u(x) = \sum_m u_m(x)$, wobei u_m seinen Träger in I_m hat, da die I_m eine offene Überdeckung von $\boldsymbol{R}$ bilden. u_m ist eine Distribution mit kompaktem Träger, kann also nach I, Satz 9 und 10, charakterisiert

werden durch eine in $\Omega - I_m$ holomorphe Funktion $\tilde{u}_m(z)$, derart, daß

$$|\tilde{u}_m(z)| \leqq M_m \cdot \varrho(z, I_m)^{-k_m} \quad \text{für} \quad \varrho(z, I_m) \leqq 1 \tag{29}$$

und

$$u_m(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \tilde{u}_m(x + i\varepsilon) - \tilde{u}_m(x - i\varepsilon) \quad \text{in} \quad \mathscr{D}'(\boldsymbol{R}). \tag{30}$$

Durch (30) ist aber $\tilde{u}_m(z)$ nur bis auf eine ganze Funktion bestimmt. Insbesondere können wir zu $\tilde{u}_m$ ein Polynom h_m addieren, ohne die Beziehung (30) zu verletzen. h_m kann aber offenbar so gewählt werden, daß

$$|\tilde{u}_m(z) - h_m(z)| < 2^{-m} \quad \text{auf} \quad |z| \leqq |m| - 2.$$

Dann ist die Reihe $\sum_m g_m(z)$, $g_m(z) = \tilde{u}_m(z) - h_m(z)$, auf allen kompakten Teilmengen der oberen und der unteren Halbebene gleichmäßig konvergent, stellt also eine Funktion $g(z) \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})$ dar. Auf jedem kompakten Intervall aus $\boldsymbol{C}$ konvergiert die Reihe nach Streichen endlich vieler Glieder ebenfalls gleichmäßig. Daher gilt auch

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \{g(x + i\varepsilon) - g(x - i\varepsilon)\} \quad \text{in} \quad \mathscr{D}'(\boldsymbol{R}). \tag{31}$$

Denn für ein $\varphi \in \mathscr{D}$ mit Träger in der kompakten Menge K gilt

$$\int \{g(x + i\varepsilon) - g(x - i\varepsilon)\} \varphi(x)\, dx$$
$$= \int_K \Big\{ \sum_{|m| \leqq N_K} \tilde{u}_m(x + i\varepsilon) - \tilde{u}_m(x - i\varepsilon) - 2i\varepsilon\, h_m(x + i\vartheta_x \varepsilon) \Big\} \varphi(x)\, dx + \eta_{N_K}(\varepsilon),$$

wobei $K \subset (-N_K + 1, N_K - 1)$ und

$$\eta_{N_K}(\varepsilon) = \int \sum_{|m| > N_K} \{g_m(x + i\varepsilon) - g_m(x - i\varepsilon)\} \varphi(x)\, dx$$

durch Wahl von N_K für alle $\varepsilon < 1$ beliebig klein gemacht werden kann. Es gilt also

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int \{g(x + i\varepsilon) - g(x - i\varepsilon)\} \varphi(x)\, dx$$
$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int \sum_{|m| < N} \{\tilde{u}_m(x + i\varepsilon) - \tilde{u}_m(x - i\varepsilon)\} \varphi(x)\, dx = \int u(x) \varphi(x)\, dx = u[\varphi]$$

und die Konvergenz erfolgt gleichmäßig auf jeder beschränkten Menge in $\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$.

Die Funktion $g(z)$ läßt sich nun abschätzen auf $|z| \leqq m_0 - 2$ durch

$$|g(z)| \leqq \sum_{|m| \leqq m_0} (|\tilde{u}_m(z)| + |h_m(z)|) + \sum_{|m| > m_0} |\tilde{u}_m(z) - h_m(z)|$$
$$\leqq \sum_{|m| \leqq m_0} M_m \cdot |\operatorname{Im}(z)|^{-k_m} + \sum_{|m| \leqq m_0} |h_m(z)| + \sum_{|m| > m_0} 2^{-m}$$
$$\leqq N_{m_0} \cdot |\operatorname{Im}(z)|^{-n_{m_0}} \quad \text{für} \quad |\operatorname{Im}(z)| \leqq 1.$$

Man kann dann offenbar in $0 \leqq r < \infty$ stetige, monoton wachsende Funktionen $M(r)$, $n(r)$ finden, derart, daß

$$|g(z)| \leqq M(|z|) \cdot |\operatorname{Im}(z)|^{-n(|z|)} \quad \text{für alle } z \text{ mit } 0 < |\operatorname{Im}(z)| \leqq 1. \tag{32}$$

3.1. Satz. *Zu jeder Distribution u gibt es eine holomorphe Funktion $g(z)$, die einer Abschätzung (32) genügt und für die gilt $u(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \{g(x+i\varepsilon) - g(x-i\varepsilon)\}$ im Sinne der starken Konvergenz in $\mathcal{D}'(\boldsymbol{R})$.*

3.2. Satz. *Die folgenden Bedingungen für Funktionen aus $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$ sind äquivalent:*

(a) $|g(z)| \leqq M(|z|) \cdot |y|^{-n(|z|)}$ *für alle $z = x+iy$ mit $0<|y|\leqq 1$, wobei $M(r)$, $n(r)$ geeignete stetige Funktionen sind.*

(b) *Auf jedem kompakten Intervall $K \subset \boldsymbol{R}$ hat ein endlichfaches Integral der Komponenten $g_\sigma(z)$ noch stetige Randwerte ($\sigma = \pm 1$).*

(c) *Auf jedem Streifen $|x| \leqq k$, $0<|y|\leqq 1$, ist ein endlichfaches Integral der Komponenten $g_\sigma(z)$ von $g(z)$ beschränkt.*

Beweis. (a) $\rightarrow$ (b) folgt durch fortgesetzte Integration (vgl. I, Beweis von Satz 10), die Umkehrung durch Anwendung der Cauchyschen Integralformel. Die Äquivalenz von (b) und (c) ist evident.

$\boldsymbol{H}_*(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$ sei der Teilraum von $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$, der aus all denjenigen Funktionen $g(z)$ besteht, die einer der äquivalenten Bedingungen aus 3.2. genügen.

Es gilt dann

3.3. Satz. *Für jedes $\hat{g} \in \boldsymbol{H}_*(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$ existiert $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \{\hat{g}(x+i\varepsilon) - \hat{g}(x-i\varepsilon)\}$ im Sinne der starken Topologie von $\mathcal{D}'(\boldsymbol{R})$, stellt also eine Distribution $g(x)$ dar. Die Abbildung*

$$\hat{g} \rightarrow g(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \{\hat{g}(x+i\varepsilon) - \hat{g}(x-i\varepsilon)\} \tag{33}$$

ist ein Homomorphismus von $\boldsymbol{H}_*(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$ auf $\mathcal{D}'(\boldsymbol{R})$ (als $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C})$-Moduln). Der Kern dieses Homomorphismus besteht genau aus allen ganzen Funktionen. Der Distributionenraum $\mathcal{D}'(\boldsymbol{R})$ ist also natürlich isomorph zu dem Quotientenraum $\boldsymbol{H}_*(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})/\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C})$.

Beweis. Aus (b) und der Tatsache, daß für jede beschränkte Menge $B \subset \mathcal{D}(\boldsymbol{R})$ alle $\varphi \in B$ ihren Träger in einer festen kompakten Menge $K = K(B)$ haben und dort alle Ableitungen $\varphi^{(m)}$, $\varphi \in B$, gleichmäßig beschränkt sind, folgt die Existenz von $\lim\{\hat{g}(x+i\varepsilon) - \hat{g}(x-i\varepsilon)\}$ im Sinne der starken Topologie von $\mathcal{D}'(\boldsymbol{R})$. Dieser Limes stellt also eine Distribution $g(x)$ dar. Daß die Abbildung $\hat{g} \rightarrow g$ ein Homomorphismus der linearen Räume $\boldsymbol{H}_*(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$ und $\mathcal{D}'(\boldsymbol{R})$ ist, ist evident. Man sieht aber auch leicht, daß es ein Homomorphismus der beiden Räume als $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C})$-Moduln ist, denn für ganzes $h(z)$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\lim \int \{h(x+i\varepsilon)\,\hat{g}(x+i\varepsilon) - h(x-i\varepsilon)\,\hat{g}(x-i\varepsilon)\}\,\varphi(x)\,dx \\
&= \lim \int \{\hat{g}(x+i\varepsilon) - \hat{g}(x-i\varepsilon)\}\,h(x)\,\varphi(x)\,dx + \\
&\quad + \lim \int \{h(x+i\varepsilon) - h(x)\}\,g(x+i\varepsilon)\,\varphi(x)\,dx - \\
&\quad - \lim \int \{h(x-i\varepsilon) - h(x)\}\,g(x-i\varepsilon)\,\varphi(x)\,dx = g[h\cdot\varphi].
\end{aligned}$$

Denn die beiden letzten Integrale streben mit $\varepsilon \rightarrow 0$ stark gegen 0, wie man unmittelbar durch partielle Integration einsieht.

Es sei nun $\hat{g}(z)$ eine Funktion aus $\boldsymbol{H}_*(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$, für die $g(x)=\lim\{\hat{g}(x+i\varepsilon)-\hat{g}(x-i\varepsilon)\}=0$ ist, und es sei K ein kompaktes Intervall. Dann hat $\hat{g}_{\pm}^{(-m)}(z)$ für geeignetes m in der Umgebung von K stetige Randwerte auf $\boldsymbol{R}$. Da $g=0$ ist, muß $f(x)=\hat{g}_{+}^{(-m)}(x+i0)-\hat{g}_{-}^{(-m)}(x-i0)$ auf K mit einem Polynom höchstens $(m-1)$-ten Grades übereinstimmen. Da man aber die Integrationskonstanten bei der Bildung der unbestimmten Integrale von $\hat{g}$ beliebig wählen kann, läßt sich stets erreichen, daß $f(x)\equiv 0$ ist. $\hat{g}_{+}^{(-m)}(z)$ und $\hat{g}_{-}^{(-m)}(z)$ haben dann also auf K die gleichen stetigen Randwerte, sind also Teile einer eindeutigen, auf $(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})\cup K$ holomorphen Funktion. Das gleiche gilt dann aber auch für $\hat{g}_{+}(z)$ und $\hat{g}_{-}(z)$, und da K ein beliebiges Intervall war, muß $\hat{g}(z)$ eine ganze Funktion sein. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Die Darstellung der Distributionen unendlicher Ordnung im Raume von mehreren Variablen soll in einer späteren Note behandelt werden.

Anhang. Beim Beweis der Sätze 1.3. und 2.4. haben wir Gebrauch gemacht von folgendem

Lemma. Sei $f(x_1,\ldots,x_N)$ eine stetige Funktion, für die die Ableitung $f^{(m)}(x)=\dfrac{\partial^{|m|}}{\partial x^m}f(x)\equiv 0$ ist (Ableitung im Sinne der Distributionstheorie). Dann läßt sich f darstellen in der Form

$$f(x_1,\ldots,x_N)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{m_j-1}x_j^k\cdot g_{jk}(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_N), \tag{34}$$

wobei die g_{jk} stetige Funktionen von $N-1$ Variablen sind. Ist $f(x)$ von langsamem Wachstum (d.h. durch ein Polynom majorisiert), so können auch die g_{jk} als langsam wachsende Funktionen gewählt werden.

Beweis. O.B.d.A. können wir annehmen, daß $m\geqq e$, und $f(x)$ mit seinen Ableitungen vom Rang 1 stetig (und langsam wachsend) ist, und dann zeigen, daß auch die g_{jk} so gewählt werden können, daß sie mit ihren Ableitungen vom Rang 1 stetig (und langsam wachsend) sind. (Man betrachte etwa an Stelle von f und m $F(x)=\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_N}f(y)\,d^Ny$ und $m'=m+e$.)

Aus $f^{(m)}(x)\equiv 0$ folgt, daß f sich schreiben läßt in der Form

$$f(x_1,\ldots,x_N)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{m_j-1}x_j^k\cdot a_{jk}(x_{[j]}), \tag{35}$$

wobei $a_{jk}(x_{[j]})$ Distributionen sind, welche von x_j unabhängig sind. Durch Induktion nach $\mu=\mu(m)=\sum_{j=1}^{N}(m_j-1)$ zeigen wir, daß die a_{jk} sogar stetig (mit ihren Ableitungen vom Rang 1) gewählt werden können.

a) Sei $\mu=0$, also $m=e$, $f(x_1,\ldots,x_N)=\sum_{j=1}^{N}a_j(x_{[j]})$. Dann gilt:

$$\frac{\partial^{N-1}f(x)}{\partial x_1\ldots\partial x_{j-1}\partial x_{j+1}\ldots\partial x_N}=\frac{\partial^{N-1}a_j(x_{[j]})}{\partial x_1\ldots\partial x_{j-1}\partial x_{j+1}\ldots\partial x_N}=c_j(x_{[j]})$$

ist eine stetige Funktion, die von x_j nicht abhängt. $b_j(x_{[j]}) = \int_0^{x_{[j]}} c_j(\xi_{[j]})\, d^{N-1}\xi_{[j]}$ ist stetig mit seinen Ableitungen vom Rang 1, $a_j - b_j = \sum_{k=1}^{N} c_{jk}$, wobei c_{jk} eine von x_j und x_k unabhängige Distribution ist. Auf $h(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{N} b_j(x_{[j]}) = \sum_{jk} c_{jk}(x_{[j,k]})$ wenden wir wiederum eine analoge Schlußweise an und erhalten schließlich eine Darstellung

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} b_j(x_{[j]}) + \sum_{j_1, j_2=1}^{N} b_{j_1 j_2}(x_{[j_1 j_2]}) + \cdots + \sum_{j_1 \ldots j_N=1}^{N} b_{j_1 \ldots j_N},$$

wobei alle Summanden mit ihren Ableitungen vom Rang 1 stetig sind.

b) Nun sei für $\mu < \mu_0$ die Behauptung gültig und bewiesen, daß die Koeffizienten a_{jk} für maximales $k = m_i - 1 = \mathrm{Rg}(m) - 1$ in (35) durch Addition von Distributionen $c_{j,l}$, die von x_j und x_l unabhängig sind, in die Funktionen g_{jk} der Behauptung übergeführt werden können. Es sei nun $f^{(m)}(x) \equiv 0$, $\mu(m) = \mu_0 = \sum_{j=1}^{N} (m_j - 1)$. Dann gilt also eine Darstellung (35) und es ist mindestens ein m_j, etwa $m_i > 1$.

$$\Delta_i f(x) = f(x + e_i) - f(x) = \sum_{j \neq i} \sum_{k=0}^{m_j - 1} x_j^k \cdot \Delta_i a_{jk}(x_{[j]}) + \sum_{k=1}^{m_i - 1} \Delta_i x_i^k \cdot a_{ik}(x_{[i]}).$$

Nach Induktionsannahme läßt sich nun aber $a_{i, m_i - 1}(x_{[i]})$ als Koeffizient der höchsten Potenz von x_i in der letzten Summe [bis auf den Faktor $(m_i - 1) \neq 0$] schreiben $a_{i, m_i - 1} = g_{i, m_i - 1} + \sum c_{ik}(x_{[i,k]})$. Da die Glieder $x_i^{m_i - 1} \cdot c_{ik}(x_{[i,k]})$ mit $a_{k,0}(x_{[k]})$ zusammengefaßt werden können, gestattet $g(x) = f(x) - x_i^{m_i - 1} \cdot g_{i, m_i - 1}(x_{[i]})$ nach Induktionsannahme die gewünschte Darstellung und damit ist dann auch $f(x) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m_j - 1} x_j^k g_{jk}(x)$, wobei die g_{jk} mit ihren Ableitungen vom Rang 1 stetig sind. Für maximales k gehen auch die g_{jk} aus den a_{jk} durch Addition von Distributionen in $N-2$ Variablen hervor.

Aus dem Beweis ergibt sich zugleich, daß alle Koeffizienten g_{jk} langsam wachsen, wenn f und seine Ableitungen vom Rang 1 langsam wachsen.

Literatur

[1] KÖTHE, G.: Dualität in der Funktionentheorie. J. reine angew. Math. **191**, 30–49 (1953).

[2] — Die Randverteilungen analytischer Funktionen. Math. Z. **57**, 13–33 (1952).

[3] SATO, M.: Theory of Hyperfunctions I. J. Fac. Sci. Tokyo **8**, 139–193 (1959/60).

[4] SCHWARTZ, L.: Theorie des Distributions I, II. Paris, 1950, 1951.

[5] TILLMANN, H. G.: Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen, I. Math. Z. **59**, 61–83 (1953); II. Distributionen als Randverteilungen analytischer Funktionen. Math. Z. **76**, 5–21, (1961).

[6] LUSZCZKI, Z., u. Z. ZIELESNY: Distributionen der Räume $\mathcal{D}'_{L^p}$ als Randverteilungen analytischer Funktionen. Colloq. Math. **8**, 125—131 (1961).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 13. April 1961)

SEIFERT, H.
Math. Zeitschr. 77, 125–130 (1961)

Zum Satz von O. Bonnet über den Durchmesser einer Eifläche

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22.9.1961 gewidmet

Von

HERBERT SEIFERT

In dieser Note wird die von O. BONNET herrührende Methode der konjugierten Punkte auf geodätischen Linien zur Herleitung von Bedingungen für die Kompaktheit symmetrischer Räume und Liescher Gruppen benutzt.

Der Satz von O. BONNET lautet:

Wenn die Gaußsche Krümmung einer Eifläche M^2 des dreidimensionalen euklidischen Raumes in jedem Punkte $\geqq 1 : A^2$ ist, dann ist die geodätische Entfernung je zweier Punkte von M^2 höchstens gleich πA.

Der Beweis verläuft folgendermaßen (vgl. z.B. [1], S. 218): p, q seien zwei beliebige Punkte von M^2. Es gibt einen kürzesten geodätischen Bogen g von p nach q. Auf g kann wegen seiner Minimaleigenschaft kein zu p konjugierter Punkt liegen. Anderseits hat der auf p folgende konjugierte Punkt (auf der Verlängerung von g) von p eine geodätische Entfernung $\leqq \pi A$, wie sich aus der Jacobischen Differentialgleichung ergibt, welche die zu g infinitesimal benachbarten Geodätischen und damit die konjugierten Punkte auf g festlegt. Somit hat g höchstens die Länge πA.

Dieser Satz und sein Beweis sind auf n-dimensionale Mannigfaltigkeiten übertragen worden ([5], [8], [7]):

Wenn in einer vollständigen[1]) n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit M^n die Riemannsche Krümmung jedes zweidimensionalen Flächenelementes $\geqq 1 : A^2$ ist, dann ist die geodätische Entfernung je zweier Punkte von M^n höchstens gleich πA.

Der Beweis gelingt durch Zurückführung auf den Fall $n = 2$. Zwei beliebige Punkte p, q von M^n werden durch einen kürzesten geodätischen Bogen g

[1]) Eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M^n heißt vollständig, wenn man jeden geodätischen Bogen nach beiden Seiten unbegrenzt fortsetzen kann (HOPF-RINOW [4]). Damit gleichbedeutend: Jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge von M^n ist kompakt. Dabei bezieht sich „beschränkt" auf die Entfernungsfunktion $\varrho(x, y)$, die durch die untere Grenze der Längen der Verbindungskurven von x und y gegeben ist. Auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit kann man je zwei Punkte durch mindestens einen kürzesten Bogen verbinden. Wir nehmen an, daß die Riemannschen Mannigfaltigkeiten von der Klasse C^∞ sind (unendlich oft stetig differenzierbare Koordinatentransformationen und unendlich oft stetig differenzierbare Komponenten des Maßtensors).

verbunden. g läßt sich in eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit M^2 einbetten, so daß die zweidimensionalen Tangentialelemente von M^2 längs g parallel sind. Nach dem Lemma von SYNGE ([9], Theorem XIII) ist die Gaußsche Krümmung von M^2 längs g gleich der Riemannschen Krümmung des Tangentialelementes, also $\geqq 1:A^2$, woraus wie oben folgt, daß g höchstens die Länge πA haben kann.

Bei diesem Beweise wird die Bedingung, daß die Riemannsche Krümmung $\geqq 1:A^2$ sein soll, nicht voll ausgenutzt. Es genügt zu wissen, daß es ein $A>0$ mit den folgenden Eigenschaften gibt: 1. Durch jeden Vektor ξ von M^n kann ein Flächenelement f gelegt werden, dessen Riemannsche Krümmung $\geqq 1:A^2$ ist. 2. Alle Flächenelemente, die aus f durch Parallelverschiebung längs der durch ξ bestimmten Geodätischen entstehen, haben Riemannsche Krümmung $\geqq 1:A^2$. Diese Bemerkung führt zu

SATZ 1. *Wenn in einer zusammenhängenden symmetrischen Riemannschen Mannigfaltigkeit M^n durch jeden Vektor ein Flächenelement von positiver Riemannscher Krümmung gelegt werden kann, dann ist M^n kompakt.*

Eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M^n heißt nach E. CARTAN [2] symmetrisch, wenn es zu jedem Punkt $p\in M^n$ eine Isometrie von M^n auf sich gibt, bei der p festbleibt, während jeder in p angreifende Vektor seine Richtung umkehrt (Inversion an p). Sicher ist dann M^n vollständig, denn ein geodätischer Bogen $\widehat{pq}$ kann durch Inversion an q um seine eigene Länge verlängert werden. Ferner ist klar, daß auf einer symmetrischen Riemannschen Mannigfaltigkeit jeder gegen Isometrien invariante Tensor ungerader Stufe identisch verschwinden muß, denn die auf ein n-Bein $e_1, \ldots, e_n$ in p bezogenen Komponenten eines Tensors sind auf Grund der Inversion an p gleich den entsprechenden Komponenten in bezug auf das n-Bein $-e_1, \ldots, -e_n$, anderseits unterscheiden sich aber bei einem Tensor ungerader Stufe die Komponenten in bezug auf die beiden n-Beine nach der Transformationsregel eines Tenors durch das Vorzeichen. Insbesondere verschwindet die kovariante Ableitung des Krümmungstensors (Tensor 5ter Stufe), woraus sich ergibt, daß die Komponenten des Krümmungstensors ungeändert bleiben, wenn man das Bezugs-n-Bein parallel verschiebt. Somit ist die Riemannsche Krümmung eines Flächenelementes invariant gegen Parallelverschiebung (vgl. [2]).

Zum Beweise von Satz 1 genügt es zu zeigen, daß die oben genannten Bedingungen 1 und 2 erfüllt sind: Zu jedem in $p\in M^n$ angreifenden Vektor ξ gibt es ein Flächenelement maximaler Riemannscher Krümmung $k(\xi)$. Diese hängt stetig von ξ ab und ist nach Voraussetzung >0. Das Minimum von $k(\xi)$ für alle durch p gehenden Vektoren wird für einen Vektor ξ_0 angenommen. Setzt man $k(\xi_0)=1:A^2$, so ist A unabhängig von p wegen der Invarianz der Riemannschen Krümmung bei Parallelverschiebung. Somit kann man durch jeden Vektor von M^n ein Flächenelement legen, dessen Riemannsche Krümmung $\geqq 1:A^2$ ist, d.h. Bedingung 1 ist erfüllt. Bedingung 2 ergibt sich unmittelbar aus der Invarianz der Riemannschen Krümmung gegen Parallel-

verschiebung. Somit haben je zwei Punkte von M^n eine geodätische Entfernung $\leqq \pi A$, woraus wegen der Vollständigkeit von M^n die Kompaktheit folgt.

Satz 1 gestattet eine Anwendung auf Liesche Gruppen. Auf der zusammenhängenden Lieschen Gruppe G möge es eine Riemannsche Metrik geben, die gegen Rechts- und Linkstranslationen von G invariant ist (biinvariante Metrik). Bekanntlich wird G dadurch zu einer symmetrischen Riemannschen Mannigfaltigkeit, was man folgendermaßen erkennt: Die das Einselement e von G festlassende Abbildung $x \to x^{-1}$ ist eine Isometrie, denn für eine differenzierbare Kurve $x(t)$ erhält man durch Differentiation der Identität $x(t) \cdot x^{-1}(t) = e$

$$\frac{dx(t)}{dt} \cdot x^{-1}(t) + x(t) \cdot \frac{dx^{-1}(t)}{dt} = 0, \tag{1}$$

wenn allgemein mit $\xi \cdot a$ bzw. $a \cdot \xi$ derjenige Vektor bezeichnet wird, der aus dem Vektor ξ durch Rechtstranslation bzw. Linkstranslation mit $a \in G$ hervorgeht. Übergang zu den Beträgen liefert wegen der Biinvarianz der Metrik

$$\left|\frac{dx(t)}{dt}\right| = \left|\frac{dx^{-1}(t)}{dt}\right|,$$

d.h. $x \to x^{-1}$ ist eine Isometrie. Bei ihr werden die in e angreifenden Vektoren umgekehrt, was man erkennt, wenn man in (1) $x(0) = e$ annimmt und $t = 0$ setzt. $x \to x^{-1}$ ist also die Inversion an e. Die Inversion an $a \in G$ erhält man als Produkt der Isometrien $x \to xa^{-1}$, $x \to x^{-1}$, $x \to xa$.

Die Riemannsche Krümmung von G ergibt sich aus dem

HILFSSATZ. *Sind ξ_0, η_0 zwei im Einselement von G angreifende aufeinander senkrechte Einheitsvektoren, so ist die Riemannsche Krümmung des von ihnen aufgespannten Flächenelementes*

$$K(\xi_0, \eta_0) = \tfrac{1}{4} \langle [\xi_0, \eta_0], [\xi_0, \eta_0] \rangle.$$

Dabei bezeichnet $[\,,\,]$ das Lie-Produkt (s. unten) und $\langle\,,\,\rangle$ das skalare Produkt.

BEWEIS. 1. Das Lie-Produkt zweier auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^n definierten Vektorfelder ξ, η ist in einem lokalen Koordinatensystem $x^1, \ldots, x^n$ gegeben durch

$$[\xi, \eta]^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \eta^k - \frac{\partial \eta^i}{\partial x^k} \xi^k. \tag{2}$$

Ist M^n eine Liesche Gruppe G, so bestimmt jeder im Einselement e angreifende Vektor ξ_0 umkehrbar eindeutig ein rechtsinvariantes Vektorfeld ξ, dem er angehört. Das Lie-Produkt zweier in e angreifenden Vektoren ξ_0, η_0 soll dann mit Hilfe der zugehörigen rechtsinvarianten Vektorfelder ξ, η nach Formel (2) gebildet werden. $[\xi_0, \eta_0]$ ist also der in e angreifende Vektor des rechtsinvarianten Feldes $[\xi, \eta]$. Dafür kann man auch schreiben

$$[\xi_0, \eta_0] = \frac{d}{dt} \left(\xi_0 \cdot y(t) - y(t) \cdot \xi_0\right)_{t=0} \tag{3}$$

oder auch

$$[\xi_0, \eta_0] = \frac{d}{dt} \left(y^{-1}(t) \cdot \xi_0 \cdot y(t)\right)_{t=0}, \tag{4}$$

wenn $y(t)$ eine differenzierbare Kurve mit dem Tangentenvektor η_0 im Punkte $y(0)=e$ ist. Die rechte Seiten von (3) ist sinnvoll, weil der Ausdruck in der Klammer für $t=0$ verschwindet. Ist auf G eine biinvariante Metrik mit dem skalaren Produkt $\langle\ ,\ \rangle$ gegeben, so gilt für drei beliebige in e angreifende Vektoren ξ_0, η_0, ζ_0

$$\langle[\xi_0,\eta_0],\zeta_0\rangle+\langle\eta_0,[\xi_0,\zeta_0]\rangle=0. \tag{5}$$

Man gewinnt diese Formel aus der Invarianzbedingung

$$\frac{d}{dt}\langle x^{-1}(t)\cdot\eta_0\cdot x(t),\quad x^{-1}(t)\cdot\zeta_0\cdot x(t)\rangle=0$$

mit Hilfe von (4), wenn man $x(0)=e$ annimmt und $\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}=\xi_0$ setzt.

2. Ist auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^n ein linearer Zusammenhang mit den Komponenten Γ^i_{kl} gegeben, so lautet die Formel für das kovariante Differential eines kontravarianten Vektorfeldes ξ in lokalen Koordinaten $x^1,\ldots,x^n$

$$[D(\xi)]^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}\,dx^k+\Gamma^i_{kl}\,\xi^k\,dx^l, \tag{6}$$

somit die kovariante Ableitung von ξ in Richtung η

$$[D_\eta(\xi)]^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}\,\eta^k+\Gamma^i_{kl}\,\xi^k\,\eta^l. \tag{7}$$

Offenbar ist der lineare Zusammenhang genau dann symmetrisch, $\Gamma^i_{kl}=\Gamma^i_{lk}$, wenn für beliebige Vektorfelder ξ, η gilt

$$D_\eta(\xi)-D_\xi(\eta)=[\xi,\eta]. \tag{8}$$

Auf einer Lieschen Gruppe G pflegt man nach E. CARTAN [3] gewisse durch die Gruppenstruktur gegebene lineare Zusammenhänge zu betrachten: $D^{(r)}$ bzw. $D^{(l)}$ ist die infinitesimale Änderung von ξ gegenüber dem durch Rechts- bzw. Linkstranslation mitgeführten Vektor. Diese linearen Zusammenhänge sind im allgemeinen nicht symmetrisch, wohl aber $D=\frac{1}{2}(D^{(r)}+D^{(l)})$. In der Tat hat man für beliebige rechtsinvariante Vektorfelder ξ, η wegen $D^{(r)}(\xi)=D^{(r)}(\eta)=0$: $D_\xi(\eta)=\frac{1}{2}D^{(l)}_\xi(\eta)=\frac{1}{2}d_\xi\left(\eta(x)-x\cdot\eta(e)\right)=\frac{1}{2}d_\xi\left(\eta(e)\cdot x-x\cdot\eta(e)\right)$, also nach (3)

$$D_\xi(\eta)=\tfrac{1}{2}[\eta,\xi] \tag{9}$$

im Punkte $x=e$ und daher wegen der Rechtsinvarianz der beiden Seiten von (9) in allen Punkten von G. Analog ist

$$D_\eta(\xi)=\tfrac{1}{2}[\xi,\eta]$$

und daher

$$D_\eta(\xi)-D_\xi(\eta)=[\xi,\eta],$$

was nach (8) gleichbedeutend mit der Symmetrie von D ist. Ist nun auf G weiter eine biinvariante Metrik gegeben, so verschwinden für den Maßtensor die kovarianten Differentiale $D^{(r)}$ und $D^{(l)}$, also auch D. Nach dem Hauptsatz

der Riemannschen Geometrie gibt es aber nur einen linearen symmetrischen Zusammenhang, für den das kovariante Differential des Maßtensors verschwindet. Dieser ist also durch D gegeben.

3. Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M^n hängt der Krümmungstensor $R^i_{.klm}$ mit der zur Metrik gehörigen kovarianten Differentiation D durch die Formel zusammen:

$$[(D_\zeta D_\eta - D_\eta D_\zeta - D_{[\eta,\zeta]})(\xi)]^i = R^i_{.klm}\,\xi^k \eta^l \zeta^m. \tag{10}$$

Dabei sind ξ, η, ζ beliebige Vektorfelder. Anderseits ist die Riemannsche Krümmung $K(\xi, \eta)$ des von zwei aufeinander senkrechten Einheitsvektoren ξ, η aufgespannten Flächenelementes gegeben durch

$$K(\xi, \eta) = -R_{iklm}\,\xi^i \eta^k \xi^l \eta^m = -R^i_{.klm}\,\xi_i \eta^k \xi^l \eta^m,$$

also nach (10)

$$K(\xi, \eta) = -\langle (D_\eta D_\xi - D_\xi D_\eta - D_{[\xi,\eta]})(\eta), \xi \rangle. \tag{11}$$

Ist M^n speziell eine Liesche Gruppe mit biinvarianter Metrik, so folgt aus (11), (9) und (5)

$$K(\xi_0, \eta_0) = \tfrac{1}{4} \langle [[\eta_0, \xi_0], \eta_0], \xi_0 \rangle = \tfrac{1}{4} \langle [\xi_0, \eta_0], [\xi_0, \eta_0] \rangle.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Ist wieder G eine Liesche Gruppe mit biinvarianter Metrik, so kann man nach dem Hilfssatz durch jeden in e angreifenden Vektor ξ_0 ein Flächenelement positiver Riemannscher Krümmung legen, es sei denn, daß ξ_0 mit allen Vektoren η_0 das Lie-Produkt 0 ergibt, d. h. daß ξ_0 dem Zentrum der Lie-Algebra von G angehört.

Aus Satz 1 folgt somit

Satz 2. *Wenn eine zusammenhängende Liesche Gruppe G eine biinvariante Riemannsche Metrik gestattet und das Zentrum ihrer Lie-Algebra verschwindet, dann ist G kompakt.*

Da das Verschwinden des Zentrums der Lie-Algebra von G gleichbedeutend mit der Diskretheit des Zentrums ist, kann man Satz 2 auch so formulieren:

Satz 2'. *Eine zusammenhängende Liesche Gruppe, die eine biinvariante Riemannsche Metrik gestattet und diskretes Zentrum besitzt, ist kompakt.*

Weiter folgt aus Satz 2 der

Satz von H. Weyl [*10*]. *Die Fundamentalgruppe einer halbeinfachen kompakten Lieschen Gruppe ist endlich.*

Beweis. Jede kompakte Liesche Gruppe kann mit einer biinvarianten Metrik versehen werden (vgl. z. B. [*6*], Satz 99). Hebt man die biinvariante Metrik in die universelle Überlagerung $\hat{G}$ von G hoch, so erhält man eine biinvariante Metrik in $\hat{G}$. Ist nun G halbeinfach, so hat die Lie-Algebra von G und damit auch die von $\hat{G}$ verschwindendes Zentrum. Nach Satz 2 ist daher $\hat{G}$ kompakt, also endlichblättrig über G.

Literatur

[1] BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie I. Berlin 1945.
[2] CARTAN, E.: Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. Bull. Soc. Math. France **54**, 214–264 (1926); **55**, 114–134 (1927).
[3] – La géometrié des groupes de transformations. J. Math. Pures Appl. **6**, 1–119 (1927).
[4] HOPF, H., u. W. RINOW: Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. Comm. Math. Helv. **3**, 209–225 (1931).
[5] MYERS, S. B.: Riemannian manifolds in the large. Duke Math. J. **1**, 39–49 (1935).
[6] PONTRJAGIN, L. S.: Topologische Gruppen II. Leipzig 1958.
[7] PREISSMANN, A.: Quelques propriétés globales des espaces de Riemann. Comm. Math. Helv. **15**, 175–216 (1943).
[8] SCHOENBERG, J. M.: Some applications of the calculus of variation to Riemannian geometry. Ann. Math. (2) **33**, 485–495 (1932).
[9] SYNGE, J. L.: The first and second variations of the length in Riemannian space. Proc. Lond. Math. Soc. **25**, 247–264 (1926).
[10] WEYL, H.: Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I, II, III. Math. Z. **23**, 271–304 (1925); **24**, 328–395 (1926).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 17. April 1961)

HERRMANN, O.
Math. Zeitschr. 77, 131–134 (1961)

Geodätische Untermannigfaltigkeiten der Dodekaederräume

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22.9.1961 gewidmet

Von

OSKAR HERRMANN

Bei der Untersuchung der Verteilung der Längen geodätischer Lote von einem Punkt auf eine Untermannigfaltigkeit einer hyperbolischen Raumform ergab sich die Frage, ob es in jeder dreidimensionalen hyperbolischen Raumform eine geschlossene zweidimensionale total-geodätische Untermannigfaltigkeit gibt [1]. Es ist aus der Konstruktion der von FRANK LÖBELL [2, 3] angegebenen dreidimensionalen geschlossenen hyperbolischen Raumformen unmittelbar ersichtlich, daß es in diesen Beispielen hyperbolischer geschlossener Raumformen zweidimensionale geschlossene total-geodätische Untermannigfaltigkeiten gibt. Für den hyperbolischen Dodekaederraum [4] wurde diese Frage bisher nicht aufgeworfen.

In dieser Note soll gezeigt werden, daß es in dem hyperbolischen Dodekaederraum eine geschlossene zweidimensionale Untermannigfaltigkeit gibt; diese Untermannigfaltigkeit ist eine nicht-orientierbare Fläche vom topologischen Geschlecht 20. Die Konstruktion dieser Untermannigfaltigkeit kann in analoger Weise im sphärischen Dodekaederraum durchgeführt werden. Man findet, daß die im folgenden konstruierte Untermannigfaltigkeit des sphärischen Dodekaederraumes eine geschlossene nicht-orientierbare Fläche vom topologischen Geschlecht 1 ist.

Der Vollständigkeit halber wird an die Konstruktion der beiden Dodekaederräume erinnert. Im dreidimensionalen hyperbolischen (sphärischen) Raum verschaffe man sich zunächst ein Dodekaeder mit einem Kantenwinkel $\gamma = 2\pi/5$ (bzw. $\gamma = 2\pi/3$). Die Paare von Gegenseiten werden durch eine Schraubung längs des gemeinsamen Lotes mit dem Schraubwinkel $3\pi/5$ (bzw. $\pi/5$) auf einander bezogen. Der Schraubsinn ist hierbei ein für allemal fest zu wählen. Aufeinander bezogene Punkte werden identifiziert. In Fig. 1′ (bzw. Fig. 1″). sind zu identifizierende Kanten und Ecken im Netz der Oberfläche des Dodekaeders gleich bezeichnet. In dieser Abbildung ist die Zeichenebene durch einen unendlich fernen Punkt zu einer Sphäre zu schließen. Durch obige Identifizierung entsteht ein geschlossener topologischer Raum. Er heißt der hyperbolische (sphärische) Dodekaederraum. Der Dodekaederraum ist eine Raumform, denn die Kantenwinkel ergänzen sich stets zu 2π, wie man Fig. 1′ (bzw. Fig. 1″) entnimmt. Da die Seiten durch eigentliche Bewegungen aufeinander bezogen sind, bei denen das Innere des Dodekaeders auf angrenzende Dodekaeder abgebildet wird, folgt hieraus die Homogenität in den Ecken[1]).

[1]) Einzelheiten dieser Konstruktion sind [4] zu entnehmen.

Das Bild einer Seitenfläche im Dodekaederraum wird im folgenden Seitenfünfeck genannt. Es gibt genau sechs Seitenfünfecke. Eine Ebene des hyperbolischen (bzw. sphärischen) Raumes, die durch eine Dodekaederkante geht und den zugehörigen Kantenwinkel halbiert, geht auch durch den Mittelpunkt

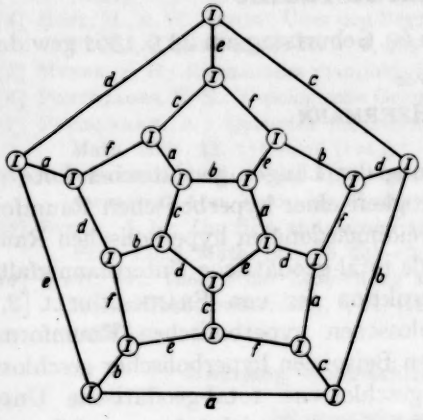

Fig. 1'

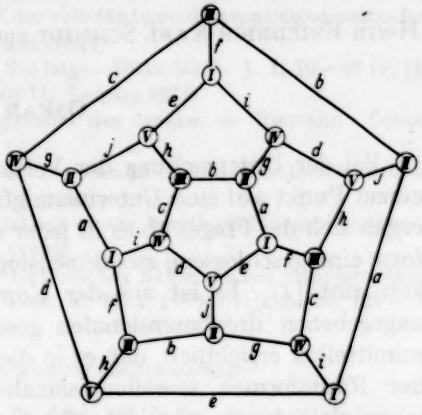

Fig. 1''

des Dodekaeders und durch die gegenüberliegende Kante. Der Durchschnitt des Dodekaeders mit einer solchen Ebene ist ein Sechseck. Dessen Bild im Dodekaederraum heißt ein Diametralsechseck. In Fig. 2 ist ein Diametralsechseck gezeichnet. Die mit k bezeichneten Kanten sind Bilder von Dodekaederkanten, während die mit h bezeichneten Kanten Bilder von Fünfeckshöhen sind. Alle fünfzehn Diametralsechsecke sind kongruent.

Fig. 2

Die Diametralsechsecke und die Seitenfünfecke sind total-geodätische Flächenstücke im Dodekaederraum. An das Bild einer Dodekaederkante im Dodekaederraum grenzen genau so viele Seitenfünfecke wie Diametralsechsecke. Aus Symmetriegründen sind diese so um die Kante angeordnet, daß je ein Seitenfünfeck und ein Diametralsechseck eben aneinanderstoßen, d.h. daß je ein Diametralsechseck und ein Seitenfünfeck ein einziges total-geodätisches Flächenstück bilden. Analog gibt es zu jeder Fünfeckshöhe ein Paar von Diametralsechsecken, die längs dieser Höhe eben aneinanderstoßen und zusammen ein total-geodätisches Flächenstück bilden. Damit ist eine natürliche Verheftung der Diametralsechsecke und der Seitenfünfecke erklärt. Da die Anzahl dieser Flächenstücke endlich ist, und da jede Randkante mit genau einer anderen Randkante verheftet wird, entsteht bei dieser Verheftung eine total-geodätische geschlossene Untermannigfaltigkeit im hyperbolischen (bzw. sphärischen) Dodekaederraum. Es ist nun zu zeigen, daß diese Untermannigfaltigkeit nicht in Komponenten zerfällt, d.h. daß keine echte Teilmenge der

21 Flächenstücke bei dieser Verheftung bereits eine geschlossene Fläche bildet.

Der Inhalt eines Seitenfünfeckes ist

$$F_5 = 3\pi - 5\beta \quad (\text{bzw. } F_5 = 5\beta - 3\pi),$$

wenn β ein Fünfeckswinkel ist. Der Inhalt eines Diametralsechseckes ist

$$F_6 = 4\pi - 2\gamma - 4\alpha \quad (\text{bzw. } F_6 = 2\gamma + 4\alpha - 2\pi).$$

Um das Bild einer Ecke des Ausgangsdodekaeders im Dodekaederraum schlage man eine Kugel vom Radius ε, wobei ε eine hinreichend kleine Länge ist. Die Oberfläche dieser Kugel wird von den Seitenfünfecken in zwanzig (bzw. vier) kongruente kleine Dreiecke ikosaedrisch (tetraedrisch) zerlegt. Hieraus ist zu entnehmen, daß in dem Bild eines Eckpunktes in der oben konstruierten Fläche jeweils vier Sechsecke und zwei Fünfecke (bzw. zwei Sechsecke und ein Fünfeck) zusammenstoßen. Also ist

$$4\alpha + 2\beta = 2\pi \quad (\text{bzw. } 2\alpha + \beta = 2\pi).$$

Damit hat die Vereinigung aller Diametralsechsecke und aller Seitenfünfecke den Inhalt

$$F = 15F_6 + 6F_5 = 78\pi - 60\alpha - 30\beta - 30\gamma = 36\pi$$

$$(\text{bzw. } F = 15F_6 + 6F_5 = 60\alpha + 30\beta + 30\gamma - 78\pi = 2\pi).$$

Damit ist gezeigt, daß im sphärischen Dodekaederraum die Vereinigung aller genannten 21 Flächenstücke gerade den Mindestinhalt einer geschlossenen Fläche der konstanten Krümmung $+1$ hat. Das bedeutet aber, daß keine echte Teilmenge der genannten 21 Flächenstücke eine geschlossene Fläche bilden kann. Eine geschlossene Fläche mit dem Inhalt 2π und konstanter positiver Krümmung $+1$ hat das Geschlecht 1 und ist nicht-orientierbar. Damit ist die Behauptung der Einleitung im sphärischen Falle bewiesen.

Im hyperbolischen Falle ist die Verheftung der 21 Flächenstücke genauer zu untersuchen. Aus Fig. 1′ folgt, daß die Bilder der Kanten des Dodekaeders geschlossene geodätische Linien sind. Damit kann man die an ein Seitenfünfeck in den Ecken anstoßenden Seitenfünfecke bestimmen und findet, daß alle Seitenfünfecke in einer Komponente der konstruierten Untermannigfaltigkeit enthalten sind. Da aber keine Komponente nur aus Diametralsechsecken besteht, zerfällt die konstruierte Untermannigfaltigkeit nicht. Bestimmt man die beiden an ein festes Diametralsechseck angrenzenden Seitenfünfecke, so stellt man fest, daß die den Sechseckskanten gegenüberliegenden Ecken als Punkte der Untermannigfaltigkeit äquivalent sind und daß hier die Orientierbarkeitsbedingung verletzt ist.

Schließlich folgt aus der Relation

$$F = 2\pi(p - 2)$$

zwischen Flächeninhalt und Geschlecht einer nicht-orientierbaren geschlossenen Fläche $p=20$. Damit ist die in der Einleitung formulierte Behauptung auch im hyperbolischen Falle bewiesen.

Literatur

[1] Herrmann, Oskar: Über die Verteilung der Längen von Loten in n-dimensionalen hyperbolischen Raumformen. (In Vorbereitung.)

[2] Löbell, Frank: Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford-Kleinscher Räume negativer Krümmung. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **83**, 167–174 (1931).

[3] — Zur Konstruktion geschlossener Clifford-Kleinscher Räume negativer Krümmung. S.-B. math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1955.

[4] Weber, Constantin, u. Seifert, Herbert: Die beiden Dodekaederräume. Math. Z. **37**, 237–253 (1933).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 18. April 1961)

KRULL, W.
Math. Zeitschr. 77, 135–148 (1961)

Ordnungsfunktionen und Bewertungen von Körpern

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22.9.1961 gewidmet

Von

WOLFGANG KRULL

Durch die Einführung des Begriffes des *Fastringes* hat es F. K. SCHMIDT[1]) möglich gemacht, Absolutbetragsbewertungen und Exponentenbewertungen mit reellen Werten in viel weitergehendem Maße gemeinsam zu behandeln, als man es auf den ersten Blick für durchführbar halten möchte. Die tiefergehenden topologischen Untersuchungen, zu denen er die Fastringe benutzte, erzwangen dabei die Beschränkung auf reellzahlige Werte. Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Schmidtsche Begriffsbildung in passender Modifikation auch dann äußerst nützlich ist, wenn man allgemeinste Bewertungen systematisch vom Standpunkt der Ordnungsfunktionen aus betrachtet.

Unter einer *Ordnungsfunktion* des (kommutativen) Körpers K verstehen wir einen Homomorphismus der multiplikativen Körpergruppe auf eine total geordnete (Abelsche) Gruppe. Teilt man die Ordnungsfunktionen in naheliegender Weise in Äquivalenzklassen ein, so entspricht jeder Äquivalenzklasse umkehrbar eindeutig eine totale Vorordnung der multiplikativen Gruppe von K und somit eine *totale Unterhalbgruppe* T von K im Sinne der folgenden Definition: Die 0 enthaltende Untermenge T von K heißt totale Unterhalbgruppe, wenn 1. aus $a, b \in T$ stets $a \cdot b \in T$ und 2. aus $a^{-1} \notin T$ stets $a \in T$ folgt. — Wir nennen nun $a \in T$ Nichteinheit aus T, wenn $a^{-1} \notin T$, und bezeichnen die Untermenge U von K als *archimedisch beschränkt hinsichtlich* T, wenn für jede Nichteinheit a aus T ein n existiert, derart daß $a^n \cdot U \subseteqq T$. Indem wir uns an der Schmidtschen Konzeption des Fastrings orientieren, definieren wir schließlich:

Die Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ von K mit der zugehörigen totalen Halbgruppe T soll eine *Bewertung im weiteren Sinne* heißen, wenn die additive Komplexsumme $T + T$ *hinsichtlich* T *archimedisch beschränkt ist.*

Den Wert dieser Definition zeigen die folgenden Resultate: 1. Bewertungen im weiteren Sinne sind: a) Die Exponentenbewertungen. b) Die Absolutbetragsbewertungen. c) „Zusammengesetzte" Bewertungen, die in naheliegender Weise aus der Kombination einer Exponentenbewertung mit einer Absolut-

[1]) Die Schmidtschen Konzeptionen liegen z. B. den Untersuchungen zugrunde, die in § 104 des 2. Bandes der van der Waerdenschen Algebra (Berlin 1959, 4. Auflage, S. 51–55) dargestellt sind. Bei VAN DER WAERDEN werden gleich Schiefkörper betrachtet. Dagegen fehlt dort die auf den Begriff des Fastringes (VAN DER WAERDEN, S. 52) gegründete, von F. K. SCHMIDT stammende Axiomatik des Hilbertschen Irreduzibilitätssatzes, die im übrigen auch in der vorliegenden Note nicht berührt wird, da gerade bei ihr die Beschränkung auf reellzahlige Bewertungen wesentlich ist.

betragsbewertung ihres Restklassenkörpers entstehen. — 2. Es ist äußerst nützlich, die Bewertungen des Typus c) von vornherein neben a) und b) einzuführen. Denn die Theorie total, aber nicht archimedisch geordneter Körper führt automatisch auf zusammengesetzte Bewertungen. — 3. Aus einer genaueren Analyse ergibt sich, daß es durchaus vernünftig erscheint, sich bei dem Studium der Ordnungsfunktionen von Körpern genau auf die Bewertungen im weiteren Sinne zu beschränken.

Zum Aufbau im einzelnen sei bemerkt: §1 bringt die nötigen Hilfssätze über total geordnete Abelsche Gruppen, unter kurzer Skizzierung der (an sich in der Literatur zu findenden) Beweise. In §2 wird der Zusammenhang mit der üblichen Bewertungstheorie hergestellt. §3 bringt den Beweis des Hauptsatzes über Bewertungen im weiteren Sinne. In §4 werden beliebige Ordnungsfunktionen eines Körpers diskutiert.

Ein großer Teil der Betrachtungen ließe sich leicht auf Schiefkörper ausdehnen, doch tauchen dort neue Fragen auf (z.B. Bewertungen mit nichtkommutativer Wertgruppe). Deshalb wurde hier durchweg die Beschränkung aufs Kommutative vorgezogen.

§1. Total vorgeordnete Abelsche Gruppen

In §1 werden multiplikative Abelsche Gruppen betrachtet; e bedeutet stets das Einselement. Unter $M-N$ verstehen wir wie üblich die Differenzmenge von M und $N \subseteq M$. Dagegen bedeutet später bei Untermengen M, N eines *Körpers* $M+N$ stets die Komplexsumme, also $M+N=\{a+b \mid a \in M, b \in N\}$. — Im Anschluß an BOURBAKI verstehen wir unter einer *totalen Vorordnung* der Gruppe G eine Relation $\geqq$ mit den folgenden Eigenschaften: 1. Für jedes Paar a, b aus G gilt stets mindestens eine der beiden Relationen $a \geqq b$, $b \geqq a$. — 2. Aus $a \geqq b$, $b \geqq c$ folgt immer $a \geqq c$. — 3. Aus $a \geqq b$ folgt immer $a \cdot c \geqq b \cdot c$ für alle $c \in G$. — Eine totale Vorordnung wird als *Totalordnung* bezeichnet, wenn über 1. bis 3. hinaus noch gilt: 4. Aus $a \geqq b$, $b \geqq a$ folgt stets $a = b$.

Bei einer totalen Vorordnung schreiben wir $a > b$ nur dann, wenn $a \geqq b$, aber $b \ngeqq a$. Die durch „$e \geqq a$ für alle a" gekennzeichnete „*triviale Vorordnung*" schließen wir in §1 aus. — Unter einer *Unterhalbgruppe* U von G verstehen wir eine Untermenge mit den Eigenschaften: 1. Aus a, b in U folgt $a \cdot b$ in U. 2. $e \in U$. — Die *echte* Unterhalbgruppe T von G wird *total* (in G) genannt, wenn aus $c \notin T$ immer $c^{-1} \in T$ folgt. Es gilt dann, wie wohlbekannt:

HILFSSATZ 1. *Ist $\geqq$ eine totale Vorordnung von G, so ist $T=\{a \mid e \geqq a\}$ [2] eine totale Unterhalbgruppe von G. — Ist umgekehrt T eine totale Unterhalbgruppe von G, so gewinnt man eine totale Vorordnung von G durch die Vorschrift: $b \geqq a$ genau dann, wenn $a \cdot b^{-1} \in T$.*

Totale Vorordnungen und totale Unterhalbgruppen entsprechen also einander umkehrbar eindeutig. — Die Menge $\{d \mid d \in T, d^{-1} \in T\} = E$ bildet die

[2] Natürlich könnte man statt T auch $T'=\{a \mid a \geqq e\}$ wählen. Die Bevorzugung von T ist für unseren Aufbau der Bewertungstheorie zweckmäßig.

größte Untergruppe der totalen Unterhalbgruppe T. Genau dann, wenn $E=\{e\}$, definiert T eine Totalordnung von G. Allgemein induziert die durch T definierte totale Vorordnung von G in kanonischer Weise eine Totalordnung der Faktorgruppe G/E. — Die Elemente von E bzw. von $T-E$ bezeichnen wir als die *Einheiten* bzw. die *Nichteinheiten* von T. — Eine *echte* Untermenge H der Halbgruppe T wird *T-Semi-Ideal*[3]) genannt, wenn aus $a\in H$ stets $a\cdot c\in H$ für alle $c\in T$ folgt. Hat das T-Semi-Ideal P die Eigenschaft, daß immer $a\cdot b\notin P$, wenn $a\notin P$, $b\notin P$ $(a, b\in T)$, so nennt man P ein *T-Semi-Primideal*.

HILFSSATZ 2. *Die Menge aller Semi-Ideale der totalen Unterhalbgruppe T ist hinsichtlich der Enthaltenseins-Relation $\supseteq$ total geordnet, ebenso natürlich die Untermenge aller Semi-Primideale. $M=T-E$ ist gleichzeitig das größte Semi-Ideal und das größte Semi-Primideal von T.*

Zum Beweis beachte man: Ist $H_1\supseteq H_2$, also etwa $h_2\notin H_1$, $h_2\in H_2$, so ist $h_1^{-1}\cdot h_2\notin T$ für alle $h_1\in H_1$, und daher $h_1\cdot h_2^{-1}\in T$ für alle $h_1\in H_1$; d.h. $H_2\supseteq H_1$.

HILFSSATZ 3. *Ist P ein Semi-Primideal der totalen Unterhalbgruppe T und $p\in P$, $c\in T-P$, so ist stets $p\cdot c^{-1}\in P$.*

Beweis. Da $c\cdot p^{-1}\notin T$, ist $p\cdot c^{-1}\in T$, und aus $(p\cdot c^{-1})\cdot c\in P$, $c\notin P$ folgt $p\cdot c^{-1}\in P$.

Ist T eine totale Unterhalbgruppe von G, so ist jede Oberhalbgruppe von T, d.h. jede T umfassende Unterhalbgruppe von G, ebenfalls in G total. Unter einer *totalen Unterhalbgruppe von T* verstehen wir eine *in G* totale Unterhalbgruppe von T. Sind T_1, T_2 totale Unterhalbgruppen von G und bedeutet $\geqq_i$ die durch T_i definierte totale Vorordnung von G $(i=1, 2)$, so bezeichnen wir genau dann $\geqq_1$ als *Verfeinerung* von $\geqq_2$ und $\geqq_2$ als *Vergröberung* von $\geqq_1$, wenn $T_2\supseteq T_1$. Vom Standpunkt der totalen Vorordnungen ist es also eine Fundamentalaufgabe, zu einer gegebenen totalen Unterhalbgruppe T von G die totalen Unter- und Oberhalbgruppen von T zu bestimmen.

HILFSSATZ 4. a) *Ist P ein Semi-Primideal der totalen Unterhalbgruppe T von G, so bildet die Menge $\{a\cdot b^{-1}\mid a\in T,\ b\in T-P\}=\{b\mid b^{-1}\in T-P\}\cup T$ eine totale Oberhalbgruppe T_P von T. Die Menge aller T_P-Semi-Primideale ist gleich der Menge aller in P enthaltenen T-Semi-Primideale; insbesondere ist P das größte Semi-Primideal von T_P.* — b) *Ist T_1 eine Oberhalbgruppe von T, so ist das größte T_1-Semi-Primideal M_1 zugleich ein T-Semi-Primideal, und es gilt $T_1=T_{M_1}$.*

Beweis. a) Die Gleichheit der beiden Definitionen für T_P und die Halbgruppeneigenschaft von T_P ist leicht zu verifizieren. Ist P_1 ein T_P-Semi-Primideal, so ist jedenfalls $P_1\subseteq P\subset T$, und daraus folgt sofort, daß P_1 auch ein T-Semi-Primideal ist. Ist andererseits P_1 ein T-Semi-Primideal und $P_1\subseteq P$, so zeigt Hilfssatz 3, daß P_1 auch ein T_P-Semi-Primideal sein muß. — b) Da T total ist, gilt $M_1\subseteq T$, und es ist M_1 sicher ein T-Semi-Primideal. Ist $a\in T_1-T$,

[3]) Von einem *Semi-Ideal* reden wir, da später zwischen „Idealen" und „Semi-Idealen" unterschieden werden muß, und da hier von den zwei für ein Ring-Ideal charakteristischen Eigenschaften sozusagen nur die *Hälfte* gefordert wird.

so ist $a^{-1} \in T - M_1$, also $a \in T_{M_1}$; umgekehrt folgt aus $a \in T - M_1$ sofort $a^{-1} \in T_1$. Es ist also $T_1 = T_{M_1}$.

HILFSSATZ 5. *Es sei T eine totale Unterhalbgruppe von G und M ihr größtes Semi-Primideal. Dann gilt:* a) *Ist T_0 eine totale Unterhalbgruppe von T, so ist $M \subseteq T_0$, und es ist $T_0 - M$ eine totale Unterhalbgruppe der Gruppe $E = T - M$.* — b) *Ist T' eine totale Unterhalbgruppe von E, so ist $T' \cup M$ eine totale Unterhalbgruppe von T.*

Der Beweis von Hilfssatz 5 ist im wesentlichen trivial. Während Hilfssatz 4 die Menge aller Oberhalbgruppen einer totalen Halbgruppe T charakterisiert, liefert Hilfssatz 5 eine Methode zur Konstruktion aller totalen Unterhalbgruppen der totalen Halbgruppe T.

Die Gruppe G soll wie üblich hinsichtlich der totalen Vorordnung $\geqq$ *archimedisch* heißen, wenn für alle $a, b \in G$ mit $e > a$, $e \geqq b$ eine natürliche Zahl n existiert, derart daß $b \geqq a^n$. Offenbar gilt: Ist E die Einheitengruppe der zu $\geqq$ gehörigen totalen Unterhalbgruppe T von G, so ist G hinsichtlich $\geqq$ genau dann archimedisch, wenn G/E hinsichtlich der durch $\geqq$ induzierten totalen Ordnung archimedisch ist.

HILFSSATZ 6. *G ist hinsichtlich der totalen Vorordnung $\geqq$ genau dann archimedisch, wenn die zugehörige totale Unterhalbgruppe T ein einziges Semi-Primideal (nämlich M) besitzt.*

Beweis. a) Ist G hinsichtlich $\geqq$ archimedisch und $a < e$, also $a \in M$, und bedeutet p ein Element aus irgendeinem Semi-Primideal P von T, so gilt $a^n \cdot p^{-1} \in T$, $a^n \in P$ für großes n, also auch $a \in P$; d.h. es ist $P \geqq M$, $P = M$. — Ist G hinsichtlich $\geqq$ nicht archimedisch, so gibt es ein $a \in M$ und ein $b \in T$, derart daß $a^n \cdot b^{-1} \notin T$ für alle n. Dann aber ist $\{b \mid b \in T;\ a^n \cdot b^{-1} \notin T \text{ für alle } n\} = P$ ein in M echt enthaltenes Semi-Primideal von T.

Wir definieren schließlich noch: Ist T die zu der totalen Vorordnung $\geqq$ gehörige totale Unterhalbgruppe von G und E die Einheitengruppe von T, so soll eine Untermenge U von G hinsichtlich $\geqq$ (und hinsichtlich der durch $\geqq$ induzierten Totalordnung von G/E) *beschränkt* bzw. *archimedisch beschränkt* heißen, wenn ein $a \in T$ existiert, derart daß $a \cdot u \in T$ für alle $u \in U$, bzw. wenn es zu jedem $a \in M = T - E$ ein n gibt, derart daß $a^n \cdot u \in T$ für alle $u \in U$. — Offenbar bedeutet „archimedisch beschränkt" genau so viel wie „beschränkt", wenn G hinsichtlich $\geqq$ archimedisch ist. Im allgemeinen dagegen ist „archimedisch beschränkt" eine schärfere Bedingung als „beschränkt".

§ 2. Ordnungsfunktionen und Bewertungen von Körpern

Vorbemerkung. Im folgenden denken wir uns jede auftretende multiplikative Gruppe G stillschweigend durch Hinzunahme eines Nullelements 0 erweitert, das den Gleichungen $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in G$ genügt. (Ist G multiplikative Untergruppe eines Körpers K, so ist 0 natürlich die Körpernull.) Ist G^* die unerweiterte, $G = G^* \cup \{0\}$ die erweiterte Gruppe, so soll unter einer totalen Unterhalbgruppe von G immer eine Unterhalbgruppe $T = T^* \cup \{0\}$

verstanden werden, bei der T^* totale Unterhalbgruppe von G^* im Sinne von §1 ist. Offenbar gilt: Die totalen Unterhalbgruppen von G und G^* entsprechen einander umkehrbar eindeutig. In jeder totalen Unterhalbgruppe $T = T^* \cup \{0\}$ von G ist $\{0\}$ Semi-Primideal. Die übrigen Semi-Ideale bzw. Semi-Primideale von T entstehen aus denen von T^* einfach durch Adjunktion von 0. — Die durch T definierte totale Vorordnung von G entsteht aus der durch T^* definierten totalen Vorordnung von G^* durch Hinzunahme der Vorschrift: $a > 0$ für alle $a \in G$. Alle Hilfssätze von §1 lassen sich sofort auf erweiterte Gruppen übertragen. Nur ist jetzt zu den Oberhalbgruppen von T die Gesamtgruppe G hinzuzurechnen, $G = T_{\{0\}}$ im Sinne von Hilfssatz 4, und es ist dementsprechend die durch $a \leqq e$ für alle $a \neq 0$, $0 < e$ gekennzeichnete triviale Vorordnung von G zuzulassen. Ein Homomorphismus einer erweiterten Gruppe G auf eine erweiterte Gruppe H ist ein Homomorphismus von G^* auf H^*, ergänzt durch die Vorschrift: G-Null auf H-Null.

Es sei jetzt K ein kommutativer Körper mit Einselement e. Unter einer *Ordnungsfunktion* $\mathfrak{v}$ von K verstehen wir einen Homomorphismus der erweiterten multiplikativen Gruppe $K = K^* \cup \{0\}$ in eine total geordnete Gruppe O. Jeder Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ entspricht eindeutig eine totale Unterhalbgruppe T von K, nämlich $T = \{a \mid \mathfrak{v}a \leqq \mathfrak{v}e\}$. Umgekehrt entspricht der totalen Unterhalbgruppe T von K mit der Einheitenuntergruppe E^* eindeutig eine *kanonische Ordnungsfunktion* $\mathfrak{v}^*$, nämlich der kanonische Homomorphismus von K auf die durch Auszeichnung von T im Sinne von §1 total geordnete Faktorgruppe K/E^*. Nennen wir ferner zwei Ordnungsfunktionen von K, denen dieselbe totale Unterhalbgruppe T zugeordnet ist, äquivalent, so wird dadurch die Klasse aller Ordnungsfunktionen in elementefremde Äquivalenzklassen aufgeteilt[4]), und man hat den Satz:

Die Klassen äquivalenter Ordnungsfunktionen von K entsprechen umkehrbar eindeutig den totalen Unterhalbgruppen T von K und somit den totalen Vorordnungen von K. In jeder Äquivalenzklasse gibt es genau eine kanonische Ordnungsfunktion.

Unter den Ordnungsfunktionen zeichnen wir jetzt drei Klassen aus, die als *Exponentenbewertungen*, *Absolutbetragsbewertungen* und *zusammengesetzte Bewertungen* bezeichnet werden sollen. Die Exponentenbewertungen sind diejenigen Bewertungen, die im Sinne der allgemeinen Bewertungstheorie durch die Existenz eines *Bewertungsringes* in K charakterisiert sind. Bedenken wir, daß wir bei den Ordnungsfunktionen die geordneten Bildgruppen durchweg multiplikativ schreiben und daß bei uns die einer Gruppenordnung entsprechende totale Unterhalbgruppe aus allen $a \leqq e$ (und nicht allen $a \geqq e$) besteht, so sehen wir, daß wir definieren müssen: Die Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ heißt eine *Exponentenbewertung*, wenn außer der Homomorphiebedingung

[4]) Unsere Äquivalenzdefinition ist natürlich gleichwertig mit der folgenden: Die Ordnungsfunktionen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}'$, die K *auf* die total geordneten Gruppen $\mathfrak{v}K = O$, $\mathfrak{v}'K = O'$ abbilden, heißen äquivalent, wenn ein Ordnungsisomorphismus $\mathfrak{i}$ von O auf O' existiert derart, daß $\mathfrak{v}' = \mathfrak{i} \circ \mathfrak{v}$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{i}^{-1} \circ \mathfrak{v}'$.

$\mathfrak{v}(a \cdot b) = (\mathfrak{v}\, a) \cdot (\mathfrak{v}\, b)$ zusätzlich die Bedingung

$$\mathfrak{v}(a+b) \leqq \max\{\mathfrak{v}a, \mathfrak{v}b\} \quad \text{für alle } a, b \in K$$

erfüllt ist. — Wir erhalten dann mühelos:

SATZ 1. *Die Ordnungsfunktion* $\mathfrak{v}$ *mit der zugehörigen totalen Unterhalbgruppe* T *ist dann und nur dann eine Exponentenbewertung, wenn* T *als Untermenge von* K *der additiven Bedingung* $T+T=T$ *im Sinne von* §1 *genügt, wenn also* T *eine additive Gruppe und damit ein (Bewertungs-)Ring ist*[5]).

Es sei ferner $\boldsymbol{R}$ die (durch 0 erweiterte) in natürlicher Weise geordnete Multiplikationsgruppe der nichtnegativen reellen Zahlen. Dann definieren wir: Die Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$, die K *auf* die total geordnete Gruppe O abbildet, soll eine Absolutbetragsbewertung heißen, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Es existiert eine ordnungserhaltende isomorphe Abbildung (Injektion) $\mathfrak{j}$ von O in $\boldsymbol{R}$, derart daß der durch Zusammensetzung von $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{v}$ entstehende Homomorphismus $\mathfrak{a} = \mathfrak{j} \circ \mathfrak{v}$ von K in $\boldsymbol{R}$ zusätzlich den Bedingungen (A_1) und (A_2) genügt, die die Möglichkeit der Addition in $\boldsymbol{R}$ ausnützen:

(A_1) $\quad \mathfrak{a}\, a_1 + \mathfrak{a}\, a_2 \geqq \mathfrak{a}(a_1 + a_2)$ $\quad$ für alle Paare $a_1, a_2 \in K$;

(A_2) $\quad \mathfrak{a}(a_1^* + a_2^*) > \max\{\mathfrak{a}\, a_1^*, \mathfrak{a}\, a_2^*\}$ $\quad$ für mindestens ein Paar $a_1^*, a_2^* \in K$.

Die Benennung *Absolutbetragsbewertung* wird gerechtfertigt durch den keineswegs trivialen, aber wohlbekannten *Satz von* OSTROWSKI:

SATZ 2. *Ist* $\mathfrak{v}$ *eine Absolutbetragsbewertung von* K, *so gibt es eine Injektion* $\mathfrak{k}$ *von* K *in den Körper* $\boldsymbol{C}$ *aller komplexen Zahlen und eine ausgezeichnete ordnungserhaltende Injektion* $\mathfrak{j}^*$ *von* $O = \mathfrak{v}K$ *in* $\boldsymbol{R}$, *derart daß für* $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{j}^* \circ \mathfrak{v}$ *allgemein gilt:*

(A^*) $\quad \mathfrak{a}^*\, a = |\mathfrak{k}\, a|$,

wobei $|\mathfrak{k}\, a|$ *den Absolutbetrag der komplexen Zahl* $\mathfrak{k}\, a$ *bedeutet.*

(Kurz und unpräzis, aber anschaulich: Man kann K so mit einem Körper aus komplexen Zahlen identifizieren und die „Bewertung" $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{j}^* \circ \mathfrak{v}$ so normieren, daß der Wert eines Körperelements gerade gleich seinem Absolutbetrag wird.) — Für unsere weiteren Untersuchungen ist weniger der Satz von OSTROWSKI wichtig, als das folgende Theorem, das wenn auch nicht in der hier gewählten Formulierung, so doch in seinem Inhalt auf F. K. SCHMIDT zurückgeht, und das daher als *Satz von* F. K. SCHMIDT bezeichnet werden soll.

SATZ 3. *Die Ordnungsfunktion* $\mathfrak{v}$ *mit der zugehörigen totalen Unterhalbgruppe* T *ist genau dann eine Absolutbetragsbewertung, wenn* K *hinsichtlich*

[5]) Man beachte, daß $T+T=T$ die additive Gruppeneigenschaft von T sichert, weil T jede Einheitswurzel aus K, speziell also auch $-e$, enthält. — Die Bezeichnung „Exponentenbewertung" für die Bewertungen mit Bewertungsring, die ich zuerst in meiner „Allgemeinen Bewertungstheorie" [J. reine u. angew. Math. **176**, 160—196 (1931)] systematisch untersucht habe, wurde deshalb gewählt, weil die Einführung dieser Bewertungen letzten Endes auf das Studium der Potenzreihenringe einer Unbestimmten zurückgeht, wo die Anfangsexponenten der Reihen in natürlicher Weise als „Werte" auftreten. (Im Sinne der vorliegenden Note wären bei einem Potenzreihenring nicht die Anfangsexponenten n, sondern etwa die Zahlen $exp(-n)$ als Werte zu wählen.)

der durch T bestimmten Vorordnung im Sinne von §1 archimedisch ist, und wenn außerdem $T+T$ echte Obermenge von T, aber im Sinne von §1 beschränkt ist. (In unserem Fall ist dann $T+T$ von selbst archimedisch beschränkt.)

Zum Beweis, wie er im Rahmen unseres Ansatzes am raschesten zu führen wäre, sollen hier nur einige Andeutungen gegeben werden. Da die Gruppe $\boldsymbol{R}$ hinsichtlich ihrer natürlichen Ordnung archimedisch ist, muß auch K hinsichtlich $\mathfrak{v}$ archimedisch sein. Ebenso ergibt sich die Notwendigkeit der Bedingungen für $T+T$. (Die zur natürlichen Ordnung von $\boldsymbol{R}$ gehörige totale Halbgruppe $T_{\boldsymbol{R}}=\{r \mid |r| \leqq 1\}$ ist keine additive Gruppe, wohl aber ist $T_{\boldsymbol{R}}+T_{\boldsymbol{R}}$ beschränkt.) Ist andererseits K hinsichtlich der durch $\mathfrak{v}$ bestimmten totalen Vorordnung, also auch $O=\mathfrak{v}K$ hinsichtlich der induzierten Totalordnung archimedisch, so existiert jedenfalls, wie wohlbekannt, eine Injektion $\mathfrak{j}$ von O in $\boldsymbol{R}$. Da ferner T keine additive Gruppe ist, gibt es Elemente $a_1^* \in T$, $a_2^* \in T$, derart daß $a_1^*+a_2^* \notin T$, und da T durch $\mathfrak{a}=\mathfrak{j}\circ\mathfrak{v}$ in $T_{\boldsymbol{R}}$ abgebildet wird, bedeutet das: $\mathfrak{a}\,a_i^* \leqq 1$ $(i=1, 2)$, $\mathfrak{a}\,(a_1^*+a_2^*)>1$; es ist also jedenfalls (A_2) bei jeder Injektion $\mathfrak{j}$ von O in $\boldsymbol{R}$ erfüllt. Somit bleibt nur zu zeigen: Aus „$T+T$ beschränkt" und der Existenz von a_1^*, a_2^* läßt sich die Existenz einer Injektion $\mathfrak{j}^*$ erschließen, derart daß (A_1) für $\mathfrak{a}=\mathfrak{j}^*\circ\mathfrak{v}$ gilt. Dabei ist zu berücksichtigen, daß $\mathfrak{j}^*$ die Gestalt $\mathfrak{j}^*=\mathfrak{r}\circ\mathfrak{j}$ hat, wobei $\mathfrak{r}$ ein ordnungserhaltender Automorphismus von $\boldsymbol{R}$, also eine Abbildung der Form $\mathfrak{r}\,r=r^s$ mit festem, reell positivem s ist. Dieser noch fehlende Beweis ist das eigentliche Kernstück; er kann elementar, ohne Hereinziehung topologischer Überlegungen geführt werden, ist aber ziemlich lang und etwas künstlich. Hier sei also auf die Literatur verwiesen[6]).

Zu einem allgemeineren Bewertungstyp führt das Prinzip der Verfeinerung einer Vorordnung im Sinne von §1. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, von dem — wie später zu sehen, allein wichtigen — Sonderfall auszugehen, daß die zunächst gegebene Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ von K eine *Exponentenbewertung* ist, daß also zu $\mathfrak{v}$ nicht eine beliebige totale Unterhalbgruppe, sondern ein Bewertungsring T aus K gehört. Hier können wir bei der Verfeinerung von $\mathfrak{v}$ statt von der Einheitengruppe E^* von T vom Restklassenkörper $\overline{K}=T/M$ von T nach dem maximalen Primideal $M=T-E^*$ ausgehen. Ist $\overline{T}$ eine totale Unterhalbgruppe von $\overline{K}$, so ist $\widetilde{T}^*=\{a \mid a \in T, a+M \in \overline{T}^*\}$ eine totale Unterhalbgruppe von E^*, und wir haben für die im Sinne von §1, Hilfssatz 5 gebildete totale Unterhalbgruppe $T_1=M \cup \widetilde{T}^*$ von T die zweite Darstellung $T_1=\{a \mid a+M \in \overline{T}\}$. Ist also $\mathfrak{v}_1$ eine zu T_1 gehörige Ordnungsfunktion von K, so kann man nicht nur rein gruppentheoretisch $\mathfrak{v}_1$ im Sinne von §1 als Verfeinerung von $\mathfrak{v}$ auffassen. Man kann auch körpertheoretisch sagen: $\mathfrak{v}_1$ entsteht durch „Zusammensetzung" einer Exponentenbewertung $\mathfrak{v}$ von K und einer Ordnungsfunktion $\overline{\mathfrak{v}}$ des zu $\mathfrak{v}$ gehörigen Restklassenkörpers $\overline{K}$. In erster Linie interessiert nun wieder der Fall, daß auch die Ordnungsfunktion $\overline{\mathfrak{v}}$ von $\overline{K}$ eine Bewertung von einem der bereits bekannten Typen darstellt. Ist $\overline{\mathfrak{v}}$ ebenso wie $\mathfrak{v}$ eine Exponentenbewertung, also $\overline{T}+\overline{T}=\overline{T}$, so haben wir auch $T_1+T_1=T_1$,

[6]) Der Beweis kann z. B. aus §104 von VAN DER WAERDEN [vgl. [1])] herauspräpariert werden. Vgl. ferner: KAPLANSKY, I.: Topological methods in valuation theory. Duke math. J. **14**, 527—541 (1947), insbesondere Lemma 1 (ARTIN).

d.h. durch die Zusammensetzung zweier Exponentenbewertungen $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ entsteht wieder eine Exponentenbewertung. Auf einen neuen, bisher noch nicht erfaßten „Bewertungs"-Typ kommen wir dagegen, wenn wir für $\bar{\mathfrak{v}}$ eine Absolutbetragsbewertung von $\bar{K}$ wählen. Daß dieser neue Typ, bei dem wir von einer „echt zusammengesetzten Bewertung" reden wollen, unsere Aufmerksamkeit verdient, zeigen die folgenden Beispiele:

a) Ist K ein nichtarchimedisch total geordneter Körper, und setzen wir $|a| = a$ bzw. $= -a$ falls $a \geqq 0$ bzw. < 0, so bildet $T = \{a \mid n \cdot e > |a| \text{ für großes } n\}$ einen Bewertungsring in K mit dem maximalen Primideal $M = \{a \mid n \cdot |a| < e \text{ für alle } n\}$, dem die zur Ordnung von K gehörige „Größenklassenbewertung" $\mathfrak{v}$ entspricht. Im Restklassenkörper $\bar{K} = T/M$ ist die Gruppe $\bar{T} = \{a + M \mid |a| \leqq e\}$ ausgezeichnet, die eine Absolutbetragsbewertung $\bar{\mathfrak{v}}$ von $\bar{K}$ definiert. Im ganzen legt also die gegebene Ordnung von K eine Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}_1$ fest, die aus einer Exponentenbewertung $\mathfrak{v}$ und einer Absolutbetragsbewertung $\bar{\mathfrak{v}}$ des Restklassenkörpers von $\mathfrak{v}$ zusammengesetzt ist[7]).

b) Ist L ein algebraischer Oberkörper des in a) betracnteten Körpers K, so braucht L keineswegs total ordenbar zu sein. Wohl aber gibt es zu der Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ von a) immer (mindestens) eine Fortsetzung $\mathfrak{w}$ auf L, die ebenso wie $\mathfrak{v}$ Exponentenbewertung ist. Der Restklassenkörper $\bar{L}$ von $\mathfrak{w}$ ist ein algebraischer Oberkörper von $\bar{K}$, und die Absolutbetragsbewertung $\bar{\mathfrak{v}}$ von a) läßt sich in mindestens einer Weise zu einer Absolutbetragsbewertung $\bar{\mathfrak{w}}$ von $\bar{L}$ erweitern. Die Zusammensetzung von $\mathfrak{w}$ und $\bar{\mathfrak{w}}$ liefert eine Ordnungsfunktion $\mathfrak{w}_1$ von L, die sich als Fortsetzung von $\mathfrak{v}_1$ auf L deuten läßt, und die offenbar für die Strukturuntersuchung von L über K wichtig ist.

Die Beispiele von a) und b) zeigen, daß es sinnvoll ist, den Bewertungsbegriff über die wohlbekannten Spezialfälle der Exponenten- und der Absolutbetragsbewertungen hinaus folgendermaßen zu verallgemeinern:

DEFINITION. Die Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}_1$ von K soll eine *Bewertung im weiteren Sinne* heißen, wenn $\mathfrak{v}_1$ die Verfeinerung einer Exponentenbewertung $\mathfrak{v}$ ist, die dadurch entsteht, daß man $\mathfrak{v}$ mit einer Bewertung $\bar{\mathfrak{v}}$ im engeren Sinne (Exponenten- oder Absolutbetragsbewertung des zu $\mathfrak{v}$ gehörigen Restklassenkörpers $\bar{K}$) zusammensetzt.

Unsere Definition ist so gefaßt, daß auch alle Bewertungen im engeren Sinne Bewertungen im weiteren Sinne werden, wenn man nur, wie es hier zweckmäßig ist, auch die triviale Exponentenbewertung $\mathfrak{v}_0$ zuläßt, bei der $T = K$, $M = \{0\}$, $\bar{K} = K/\{0\} = K$ ist. (Zum Beispiel erhält man eine evtl. vorhandene Absolutbetragsbewertung $\mathfrak{v}_1$ von K durch Zusammensetzung von $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{v}_1 = \bar{\mathfrak{v}}$.) Man wird nun sofort fragen, ob die zunächst auf verhältnismäßig künstliche Weise konstruierten Bewertungen im weiteren Sinne in ähnlich einfacher Weise charakterisiert werden können, wie die Exponenten- und Absolutbetragsbewertungen in Satz 1 bzw. Satz 3 charakterisiert wurden. Die Antwort lautet:

[7]) In der „Allgemeinen Bewertungstheorie" [vgl. [5])] wird die Theorie der total geordneten Körper noch *neben*, aber *nicht im Rahmen* der eigentlichen Bewertungstheorie entwickelt.

SATZ 4. *Die Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ von K mit der zugehörigen totalen Halbgruppe T ist dann und nur dann eine Bewertung im weiteren Sinne, wenn $T+T$ im Sinne von §1 archimedisch beschränkt ist.*

Satz 4 soll in §3 bewiesen werden. Anschließend wollen wir in §4 zeigen, daß es vom Standpunkt der totalen Vorordnungen aus kaum zweckmäßig sein dürfte, den Bewertungsbegriff über die Bewertungen im weiteren Sinne hinaus auszudehnen. Dabei gehen wir so vor, daß wir zunächst systematisch beliebige totale Halbgruppen T aus einem gegebenen Körper K untersuchen.

§ 3. Totale Unterhalbgruppen in Körpern. Beweis von Satz 4

Es sei T eine totale Halbgruppe aus dem Körper K mit der Einheitengruppe E^* und dem maximalen Semi-Primideal $M=T-E^*$. Wir setzen $S=\{a \mid a\cdot(T+T)\subseteqq T\}$. S ist entweder ein Semi-Ideal von T oder gleich T selbst. Natürlich kann $S=\{0\}$ sein. Ein Semi-Ideal H^+ (bzw. Semi-Primideal P^+) von T soll *Ideal* (bzw. *Primideal*) heißen, wenn H^+ (bzw. P^+) eine *additive Gruppe* darstellt. Aus Hilfssatz 2 von §1 folgt sofort: Es gibt in T ein *größtes Primideal* M^+ und ein *größtes Ideal* N^+. Natürlich ist $T>N^+\geqq M^+$.

HILFSSATZ 7. *Es ist $S\geqq N^+$. Jedes Semi-Primideal $P<S$ ist ein Primideal.*

Beweis. a) Ist $c\in N^+$, so haben wir $c\cdot a_i\in N^+$ $(i=1,2)$ für jedes Paar $a_1, a_2\in T$, und aus der Definition von N^+ folgt $c\cdot a_1-c\cdot a_2=c\cdot(a_1-a_2)\in N^+<T$. Also ist $c\in S$. — b) Es seien $a_1, a_2\in P$ und etwa $a_2\cdot a_1^{-1}\in T$, also $a_2=a_1\cdot c$, $c\in T$. Ferner sei $P<S$ und $s\in S-P$. Dann hat man $a_1+a_2=a_1\cdot(e+c)\in T$ wegen $a_1\in S$, weiter $s\cdot(a_1+a_2)=a_1\cdot s\cdot(e+c)\in P$ wegen $s\cdot(e+c)\in T$, $a_1\in P$ und schließlich $a_1+a_2\in P$ wegen $s\cdot(a_1+a_2)\in P$, $s\notin P$.

KOROLLAR. *Das Primideal M^+ ist entweder gleich S, oder es ist das größte in S echt enthaltene Semi-Primideal.*

Es sei jetzt $\tilde{T}=T_{M^+}$ die zu M^+ gehörige Oberhalbgruppe von T im Sinne von Hilfssatz 4 von §1 (hier natürlich einschließlich 0). Dann gilt:

HILFSSATZ 8. *Es ist $\tilde{T}+\tilde{T}=\tilde{T}$, d.h. $\tilde{T}$ ist ein Bewertungsring.*

Beweis. Sind $\tilde{a}_i\in\tilde{T}$ $(i=1,2)$, so haben wir $\tilde{a}_i=a_i\cdot c^{-1}$ $(i=1,2;\ a_i\in T,\ c\in T-M^+)$. Wegen $\tilde{a}_1+\tilde{a}_2=(a_1+a_2)\cdot c^{-1}$, $c^{-1}\in\tilde{T}$ ist $\tilde{a}_1+\tilde{a}_2\in\tilde{T}$, falls $a_1+a_2\in\tilde{T}$. Ist nun $a_1+a_2\notin T\subseteqq\overline{T}$, so ist $a_1+a_2=d^{-1}$, $d\in T$. Wäre $d\in M^+$, so hätten wir $d\cdot a_i\in M^+$ $(i=1,2)$, $d\cdot a_1+d\cdot a_2=e\in M^+$, was unmöglich ist. Es ist also $d^{-1}=a_1+a_2\in T_{M^+}=\tilde{T}$ w.z.b.w.

KOROLLAR. *T ist genau dann Bewertungsring, $T+T=T$, wenn $M^+=M$, also $T=T_{M^+}$, $S=T$.*

Ist $T>S$, so bezeichnen wir mit $\sqrt{S}$ das kleinste Semi-Primoberideal von S (vgl. Hilfssatz 2). Wie sofort zu verifizieren, ist $\sqrt{S}=\{a \mid a^n\in S \text{ für großes } n\}$[8].

[8] $\sqrt{S}$ weist darauf hin, daß es sich im Sinne der Idealtheorie um das *Radikal* handelt, für das sich die Bezeichnung $\sqrt{\ldots}$ einzubürgern beginnt (vgl. etwa ZARISKI-SAMUEL, Commutative Algebra, Bd. 1, S. 174. Princeton 1958). Zur direkten Verifikation der Tatsache, daß $\{a \mid a^n\in S \text{ für großes } n\}$ ein Primideal ist, beachte man: Ist $(a_1\cdot a_2)^n\in S$ und etwa $a_2\cdot a_1^{-1}\in T$, so ist $a_2^{2n}\in S$.

Für $S=M^+$ ist $\sqrt{S}=M^+$. Für $S>M^+$ gibt es kein Semi-Primideal P mit $\sqrt{S}>P>M^+$. Denn aus $\sqrt{S}>P\geqq M^+$ folgt $S>P$ nach Hilfssatz 2 und weiter $P=M^+$ nach dem Korollar zu Hilfssatz 7.

HILFSSATZ 9. *Ist $T+T>T$, so ist $T+T$ dann und nur dann archimedisch beschränkt, wenn $M=\sqrt{S}>M^+$. In diesem Fall ist M^+ das zweitgrößte Semi-Primideal von T.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus den schon besprochenen Eigenschaften von $\sqrt{S}$, aus dem Korollar zu Hilfssatz 8 und aus der Definition der archimedischen Beschränktheit. Man beachte: „$a^n\in S$ für großes n" ist gleichwertig mit „$a^n\cdot(T+T)\subseteqq T$ für großes n". — Zum Beweis von Satz 4 von §2 brauchen wir jetzt noch eine Aussage über $T+M^+$.

HILFSSATZ 10. a) *$T+M^+$ ist eine Oberhalbgruppe von T mit dem größten Primideal M^+.* — b) *Ist $T+T$ archimedisch beschränkt, so ist stets $T+M^+=T$.*[9])

Beweis. a) Ist $a_i=c_i+p_i$ ($c_i\in T$, $p_i\in M^+$; $i=1, 2$), so ist $a_1\cdot a_2=c_1\cdot c_2+p\in T+M^+$ wegen $p=c_1\cdot p_2+c_2\cdot p_1+p_1\cdot p_2\in M^+=M^++M^+$. $T+M^+$ ist also Halbgruppe, und nach Hilfssatz 4 von §1 gibt es in T ein Semi-Primideal P, derart daß $T+M^+=T_P$ im dortigen Sinne. P ist das maximale Semi-Primideal von T_P, und da $p^{-1}=a+q$ ($a\in T$; $p, q\in M^+$) zu dem Widerspruch $e=a\cdot p+q\cdot p\in M^+$ führen würde, ist $P\geqq M^+$. Daraus folgt weiter nach Hilfssatz 4, daß M^+ das maximale Primideal von $T+M^+=T_P$ ist. — b) Ist $T+T$ archimedisch beschränkt, so ist entweder $T+T=T+M^+=T$, oder es ist nach Hilfssatz 9 sicher $M=\sqrt{S}$ und M^+ das zweitgrößte Semi-Primideal von T. In diesem letzten Falle haben wir also für das Semi-Primideal P von a) nur die beiden Möglichkeiten $P=M$, $T+M^+=T_M=T$ und $P=M^+$, $T+M^+=T_{M^+}$. Es sei nun $s\in S-M^+$. Dann ist $s^{-2}\in T_{M^+}$. Wäre aber $s^{-2}=a+p$ ($a\in T$, $p\in M^+$), so hätten wir $s^{-1}=a\cdot s+p\cdot s\in T$, was unmöglich ist wegen $T+T>T$, $T>S$. Wir haben also $s^{-2}\notin T+M^+$, $T+M^+<T_{M^+}$, $T+M^+=T$.

Beweis von Satz 4 von §2. a) Ist $T+T>T$, also T kein Bewertungsring, aber $T+T$ archimedisch beschränkt, so ist $\sqrt{S}=M$ das größte, M^+ das zweitgrößte Semi-Primideal von T, und $T+M^+=T$. Wir bilden nun zu dem Bewertungsring $\overline{T}=T_{M^+}$ den Restklassenkörper $\overline{K}=\overline{T}/M^+$, in dem durch T die totale Halbgruppe $(T+M^+)/M^+=T/M^+=\overline{T}$ ausgezeichnet ist. Ist $\bar{\mathfrak{v}}$ die zu $\overline{T}$ gehörige kanonische Ordnungsfunktion von $\overline{K}$, so ist $\overline{K}$ hinsichtlich $\bar{\mathfrak{v}}$ nach Hilfssatz 6 von §1 archimedisch, weil $\overline{M}=\sqrt{S}/M^+$ das einzige von $\{\overline{0}\}$ verschiedene Semi-Primideal von $\overline{T}$ darstellt. Es ist $\overline{T}+\overline{T}>\overline{T}$, weil aus $\overline{T}+\overline{T}=\overline{T}$ sofort $T+T=T$ folgte. Ist schließlich $\bar{a}=a+M^+\in\overline{M}=\sqrt{S}$, so ist $a^n\in S$ für großes n, also $a^n\cdot(T+T)\subseteqq T$ und infolgedessen auch $\bar{a}^n\cdot(\overline{T}+\overline{T})\subseteqq\overline{T}$. Es ist also $\overline{T}$ auch archimedisch beschränkt, und aus Satz 3 von §2 folgt, daß $\bar{\mathfrak{v}}$ eine Absolutbetragsbewertung von $\overline{K}$ ist. Die durch T selbst definierte kanonische Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ ist also eine Bewertung im weiteren Sinne,

[9]) Auf die von mir zunächst übersehene Notwendigkeit des Beweises dieses Hilfssatzes machte mich Herr P. UCSNAY aufmerksam.

zusammengesetzt aus der durch $\tilde{T} = T_{M^+}$ definierten kanonischen Exponentenbewertung $\tilde{\mathfrak{v}}$ von K und der Absolutbetragsbewertung $\bar{\mathfrak{v}}$ von $\bar{K}$. — b) Es sei $\mathfrak{v}$ eine Bewertung im weiteren Sinne von K mit der zugehörigen totalen Halbgruppe T, die aus einer Exponentenbewertung $\tilde{\mathfrak{v}}$ von K mit der zugehörigen totalen Halbgruppe $\tilde{T}$ und aus einer Absolutbetragsbewertung $\bar{\mathfrak{v}}$ des durch $\tilde{\mathfrak{v}}$ bestimmten Restklassenkörpers $\bar{K}$ mit der zugehörigen totalen Halbgruppe $\bar{T}$ im Sinne von §2 zusammengesetzt ist. Dann wissen wir: Es gibt in T ein Primideal $\tilde{M}$, das gleichzeitig das größte Semi-Primideal von $\tilde{T}$ ist, und für das $\tilde{T} = T_{\tilde{M}}$ im Sinne von §1 gilt. $\bar{T}$ ist eine ausgezeichnete Halbgruppe von $\bar{K} = \tilde{T}/\tilde{M}$, und wir haben $T = \{a \mid a + \tilde{M} \in \bar{T}\}$, so daß wegen $\tilde{M} + \tilde{M} = \tilde{M}$ sicher $T + \tilde{M} = T$ gilt. Ist $\bar{M}$ bzw. M das größte Semi-Primideal von $\bar{T}$ bzw. T, so haben wir $\bar{M} = M/\tilde{M}$. Da $\bar{\mathfrak{v}}$ eine Absolutbetragsbewertung von $\bar{T}$ ist, gibt es nach Satz 3 von §2 zu jedem $\bar{s} = s + \tilde{M} \in \bar{M}$ (also für jedes $s \in M$) ein n derart, daß $\bar{s}^n \cdot (\bar{T} + \bar{T}) \subseteqq \bar{T}$, d.h. $s^n \cdot (T + T) \subseteqq T + \bar{M} = T$. Es ist also T archimedisch beschränkt. — c) In a) (Schluß von „archimedisch beschränkt" auf „Bewertung im weiteren Sinne") und in b) (Schluß von „Bewertung im weiteren Sinne" auf „archimedisch beschränkt") wurden nur die trivialen Fälle ausgelassen, nämlich: „$T + T = T$, also T Bewertungsring einer Exponentenbewertung" bzw. „$\mathfrak{v}$ Exponentenbewertung, also zugehörige Halbgruppe T Bewertungsring". Wir haben daher Satz 4 vollständig bewiesen.

§4. Beliebige Ordnungsfunktionen von Körpern

Hilfssatz 11. *Haben T, M^+, $\sqrt{S}$ die gleiche Bedeutung wie in §3, so gilt stets $T + M^+ \subseteqq T_{\sqrt{S}}$.*

Hilfssatz 11 ist eine einfache Ergänzung zu Hilfssatz 10 von §3. Beweis mit den gleichen Überlegungen, wie sie beim Beweis von Hilfssatz 10 unter b) benutzt wurden. Beachte: Da es in T kein Semi-Primideal P mit $\sqrt{S} > P > M^+$ gibt, folgt $T + M^+ = T_{M^+}$ aus $T + M^+ > T_{\sqrt{S}}$.

Bei einer Oberhalbgruppe T_1 von T sollen stets S_1, $\sqrt{S_1}$, M_1^+ für T_1 die gleiche Bedeutung haben wie S, $\sqrt{S}$, M^+ für T. Bekannt ist bereits, daß $M_1^+ = M^+$ gilt, falls $T_1 < T_{M^+}$. Wir beweisen ergänzend:

Hilfssatz 12. a) *Bei der Oberhalbgruppe T_1 von T ist stets $S_1 \supseteqq S$.* — b) *Ist $T_1 < T_{M^+}$, so folgt aus $S_1 > M^+$ stets $S > M^+$.* — c) *Ist $T_1 < T_{M^+}$, so ist stets $\sqrt{S_1} = \sqrt{S}$.*

Beweis. a) Für $a_1, a_2 \in T_1$ haben wir stets $a_i = c_i \cdot q^{-1}$ $(i = 1, 2)$, wobei $c_i \in T$ und $c \cdot q^{-1} \in T_1$ für alle $c \in T$. Aus $s \cdot (c_1 + c_2) \in T$ für alle $c_1, c_2 \in T$ folgt daher sofort $s \cdot (a_1 + a_2) \in T_1$ für alle $a_1, a_2 \in T_1$. — b) Ist $T_1 < T_{M^+}$, so ist $T_1 = T_P$, wobei P ein Semi-Primideal aus T mit $P > M^+$, und es ist sicher $S_1 < T_1$ und damit $S_1 \subseteqq P$, weil anderenfalls $T_1 + T_1 = T_1$, $P + P = P$ wäre, im Widerspruch zu $P > M^+$. Sind nun c_1, c_2 beliebig aus $T \subseteqq T_1$, so folgt aus $s_1 \in S_1 \subseteqq P$ sofort $s_1 \cdot (c_1 + c_2) = a \in T_1$; $a = c \cdot q^{-1}$ $(c \in T, q \in T - P)$; $s_1^2 \cdot (c_1 + c_2) = c \cdot (s \cdot q^{-1}) \in T$, weil $s \cdot q^{-1} \in T$ nach Hilfssatz 3 von §1. Gibt es also ein $s_1 \in S_1 - M^+$, so gibt es auch ein $s \in S - M^+$, nämlich s_1^2. — Ist $S = M^+ = \sqrt{S}$ bzw. $S_1 = M^+ = \sqrt{S_1}$, so ist auch $S_1 = M^+ = \sqrt{S_1}$ bzw. $S = M^+ = \sqrt{S}$ nach b). Ist aber $S > M^+$, $S_1 > M^+$,

so wissen wir: Sowohl $\sqrt{S}$ als auch $\sqrt{S_1}$ ist ein Semi-Primideal von T nach Hilfssatz 4; und zwar ist $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}=Q$ eindeutig dadurch festgelegt, daß $Q \supset M^+$, daß aber kein Semi-Primideal P_1 mit $Q \supset P_1 \supset M^+$ in T existiert.

Wir betrachten jetzt irgendwelche Ordnungsfunktionen von K. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf *kanonische* Ordnungsfunktionen, so daß Ordnungsfunktionen und totale Unterhalbgruppen von K einander umkehrbar eindeutig entsprechen. Die Worte „Verfeinerung" und „Vergröberung" werden sinngemäß wie in §1 benutzt (vgl. die Bemerkungen bei Hilfssatz 3).

SATZ 5. *Unter allen den Ordnungsfunktionen $\mathfrak{v}'$ von K, die Vergröberung der festen Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ sind und Bewertungen im weiteren Sinne darstellen, gibt es eine feinste Vergröberung $\mathfrak{v}^*$ von $\mathfrak{v}$, „die durch $\mathfrak{v}$ bestimmte Bewertung im weiteren Sinne". Gehört $\mathfrak{v}$ zur Halbgruppe T und haben M^+, $\sqrt{S}$ die gleiche Bedeutung wie bisher, so gehört $\mathfrak{v}^*$ zu $T_{\sqrt{S}}$. Es ist dann und nur dann $\mathfrak{v}^*$ die triviale Bewertung, wenn $\{0\}=S=\sqrt{S}$, d.h. wenn $T+T$ nicht beschränkt ist.*

ZUSATZ. Bei beschränktem $T+T$ haben wir folgende Klassifizierung: $\{0\}=M^+ \subset \sqrt{S}$, $\mathfrak{v}^*$ Absolutbetragsbewertung. — $\{0\} \subset M^+ = \sqrt{S}$, $\mathfrak{v}^*$ Exponentenbewertung. — $\{0\} \subset M^+ \subset \sqrt{S}$, $\mathfrak{v}^*$ „echt zusammengesetzte Bewertung"

Satz 5 und sein Zusatz können nach den bisherigen Betrachtungen als trivial angesehen werden. Man beachte allerdings, daß man Hilfssatz 12 zum Beweise der Zugehörigkeit von $\mathfrak{v}^*$ zu $T_{\sqrt{S}}$ braucht. — Für unsere weiteren Untersuchungen brauchen wir die folgende Definition: Die Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ soll *Ordnungsfunktion mit Restklassenkörper* heißen, wenn $T+M^+=T$ für die zugehörige Halbgruppe T gilt. Zu jeder Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ gibt es eine feinste Vergröberung $\mathfrak{v}_1$, die Ordnungsfunktion mit Restklassenkörper ist. Gehört $\mathfrak{v}$ zu T, so gehört $\mathfrak{v}_1$ zu $T_1=T+M^+$. (Man beachte: $(T+M^+)+M^+=T+M^+$ wegen $M^++M^+=M^+$). — Aus Hilfssatz 11 und Satz 5 folgt sofort, daß $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_1$ die gleiche Bewertung von K bestimmen. Wir dürfen uns daher im folgenden auf die Betrachtung von Ordnungsfunktionen *mit Restklassenkörper* beschränken. Gehört dann T zu $\mathfrak{v}$, so können wir, genau wie in §2 bei den Bewertungen im weiteren Sinne, den Restklassenkörper $\overline{K}=T_M/M^+$ und in $\overline{K}$ die ausgezeichnete Unterhalbgruppe $\overline{T}=\{a+M^+ \mid a \in T\}$ bilden, aus der rückwärts wieder T gewonnen werden kann: $T=\{a \mid a+M^+ \in \overline{T}\}$.

Es läßt sich also die Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ mit Restklassenkörper gewinnen durch Zusammensetzung der zu $T_{M^+}=\widetilde{T}$ gehörigen Exponentenbewertung $\tilde{\mathfrak{v}}$ mit der zu $\overline{T}=T/M^+$ gehörigen Ordnungsfunktion $\bar{\mathfrak{v}}$ des Restklassenkörpers $\overline{K}=\widetilde{T}/M^+$. Dabei haben offenbar $\overline{M}^+=M^+/M^+=\{\bar{0}\}$ bzw. $\overline{S}=S/M^+$ bzw. $\sqrt{\overline{S}}=\sqrt{S}/M^+$ für $\overline{T}$ die gleiche Bedeutung wie M^+ bzw. S bzw. $\sqrt{S}$ für T. Wir diskutieren nun die Frage: *Lohnt es sich, Ordnungsfunktionen (mit Restklassenkörper) systematich zu untersuchen, die keine Bewertungen im weiteren Sinne sind?*

1. Fall. $M^+=\sqrt{S}$; $\overline{M}^+=\overline{S}=\sqrt{\overline{S}}=\{\bar{0}\}$. — Hier ist die durch $\mathfrak{v}$ bestimmte Bewertung im weiteren Sinne $\mathfrak{v}^*$ eine Exponentenbewertung, und wir haben in $\overline{K}$ eine Ordnungsfunktion $\bar{\mathfrak{v}}$ mit $\overline{S}=\{\bar{0}\}$; d.h. unser Problem reduziert sich

auf die einfachere Frage: Lohnt die systematische Entwicklung einer Theorie von solchen totalen Unterhalbgruppen T eines Körpers K, bei denen $T+T$ *nicht* beschränkt ist? Die Antwort dürfte wohl lauten: Höchstens dann, wenn man auf konkrete Beispiele stoßt, an denen zu sehen ist, welche additiven Bedingungen man zweckmäßigerweise einer totalen Unterhalbgruppe T mit nichtbeschränktem $T+T$ auferlegt.

2. Fall. $\sqrt{\overline{S}} > \{\overline{0}\} = \overline{M}^+$. — Wir beschränken die Betrachtung gleich auf $\overline{K}$, d.h. wir betrachten unter Weglassung der Querstriche eine totale Unterhalbgruppe T des Körpers K mit $M^+ = \{0\}$, $\sqrt{S} > \{0\}$. Nach §2 und §3 definiert dann $T_{\sqrt{S}} = T_1$ eine Absolutbetragsbewertung $\mathfrak{v}_1$ von K, und es kann wohl nicht bezweifelt werden, daß es unbedingt zweckmäßig ist, gestützt auf den Satz von OSTROWSKI von vornherein $K \subseteqq \boldsymbol{C}$, $T_1 = \{a \mid |a| \leqq 1\}$ anzunehmen, woraus dann $\sqrt{S} = \{a \mid |a| < 1\}$, $E^* = T_1 - \sqrt{S} = \{a \mid |a| = 1\}$ folgt. Unter dieser Annahme aber erhält die Gruppe E^* eine ganz bestimmte Struktur, nämlich die „zyklische" Struktur einer Untergruppe der Additionsgruppe $\boldsymbol{R}^+(1)$ aller reellen Zahlen modulo 1. Andererseits hat T — in dem hier allein interessierenden Falle $T_1 > T$ — nach Hilfssatz 5 von §1 die Gestalt $T = \sqrt{S} \cup D^*$, wobei D^* eine totale Unterhalbgruppe von E^* ist, d.h.: Die Verfeinerung der Absolutbetragsbewertung $\mathfrak{v}_1$ zur Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ bedeutet nichts anders als eine Vorordnung von E^* durch Auszeichnung einer totalen Unterhalbgruppe D^*, also letzten Endes die Einführung eines Homomorphismus von E^* auf eine total geordnete Gruppe O. Die hinsichtlich ihrer natürlichen Topologie nicht kompakten total geordneten Gruppen und die „zyklisch" geordnete, kompakte Gruppe $\boldsymbol{R}^+(1)$ repräsentieren aber zwei fundamental verschiedene Gruppentypen, und es dürfte kaum zweckmäßig sein, E^* gleichzeitig isomorph in $\boldsymbol{R}^+(1)$ und homomorph auf O abzubilden. — Als Endergebnis im zweiten Fall erhalten wir also:

Es dürfte sich kaum lohnen, solche Ordnungsfunktionen $\mathfrak{v}$ systematisch zu untersuchen, die selbst keine Bewertungen im weiteren Sinne sind und bei denen die durch $\mathfrak{v}$ bestimmte Bewertung im weiteren Sinne $\mathfrak{v}^*$ entweder eine Absolutbetragsbewertung oder auch eine echt zusammengesetzte Bewertung darstellt.

Das Ergebnis ist also noch wesentlich eindeutiger als bei einer Exponentenbewertung $\mathfrak{v}^*$ (Fall 1).

§ 5. Ergänzungsbemerkungen

1. In §3 war in einer beliebigen totalen Unterhalbgruppe T des Körpers K neben dem größten Primideal M^+ das größte Ideal N^+ eingeführt worden, und wir hatten bewiesen: $S \geqq N^+ \geqq M^+$. Wir können jetzt zeigen:

SATZ 6. *Es ist immer* $N^+ = M^+$.

Beweis. Für $S = M^+$ ist die Behauptung trivial. Sei also $S > M^+$ und damit erst recht $\sqrt{S} > M^+$. Wir setzen $T_1 = T_{\sqrt{S}}$, $N_1^+ = \{a \cdot q^{-1} \mid a \in N^+, q \in T - \sqrt{S}\}$. Dann ist N_1^+ (wegen $N^+ + N^+ = N^+$) ein T_1-*Ideal*, und es ist sicher $N^+ = M^+$, wenn sogar $N_1^+ = M^+$. Da nun $T_1 + M^+ = T_1$ nach Hilfssatz 10 ist, stellt $\overline{T}_1 = T_1/M^+$ eine totale Unterhalbgruppe des Körpers $\overline{K} = T_{M^+}/M^+$ dar, und es

ist $\overline{N}_1^+ = N_1^+/M^+$ ein $\overline{T}_1$-Ideal. $\overline{T}_1$ definiert eine Absolutbetragsbewertung von $\overline{K}$, weil $\sqrt{S}/M^+$ in $\overline{T}_1$ das einzige Semi-Primideal $\neq \{\overline{0}\}$ ist. Wir können also $\overline{K}$ so als Unterkörper von $\boldsymbol{C}$ darstellen, daß $\overline{T}_1 = \{\overline{a} \mid |\overline{a}| \leqq 1\}$ wird. An dieser Darstellung aber läßt sich mühelos ablesen, daß es in $\overline{T}_1$ außer $\{\overline{0}\}$ kein Ideal gibt. Wir erhalten also der Reihe nach: $N_1^+/M^+ = \{\overline{0}\}$; $N_1^+ = M^+$; $N^+ = M^+$.

2. Es sei T eine totale Unterhalbgruppe von K, die eine Bewertung $\mathfrak{v}$ im weiteren Sinne definiert. Unter dieser Voraussetzung gilt:

SATZ 7. *Es ist* $S = \{a \mid a \in T,\ a + a \in T\}$.

Beweis. a) Ist $\mathfrak{v}$ eine Exponentenbewertung, so ist $\{a \mid a \in T,\ a + a \in T\} = T$ und $T = S$. — b) Es gehöre zu T eine Absolutbetragsbewertung $\mathfrak{v}$. Dann können wir, analog wie bei Satz 6, von vornherein $K \subseteqq \boldsymbol{C}$, $T = \{a \mid |a| \leqq 1\}$ annehmen. Ist nämlich $\mathfrak{k}$ ein Isomorphismus von K auf den Körper K', der T auf T' abbildet, so hat $\mathfrak{k}S = S'$ für T' die gleiche Bedeutung wie S für T, und es ist $\{a' \mid a' \in T',\ a' + a' \in T'\}$ das Bild von $\{a \mid a \in T,\ a + a \in T\}$. Für $K \subseteqq \boldsymbol{C}$, $T = \{a \mid |a| \leqq 1\}$ verifiziert man aber mühelos die (im übrigen wohlbekannte) Gleichung: $S = \{a \mid a \in T,\ a + a \in T\}$. — c) Im Fall einer echt zusammengesetzten Bewertung $\mathfrak{v}$ können wir auf $\overline{K} = T_{M^+}/M^+$, $\overline{T} = (T + M^+)/M^+ = T/M^+$, $\overline{S} = S/M^+$ die Überlegungen von b) anwenden. Es ergibt sich: $\overline{S} = \{a + M^+ \mid a + M^+ \in \overline{T},\ a + a + M^+ \in \overline{T}\}$, und daraus folgt $S = \{a \mid a \in T,\ a + a \in T\}$ wegen $T + M^+ = T$.

Zusatzbemerkung. Schließen wir den trivialen Fall der Exponentenbewertungen aus, so können wir auch kurz $S = \{a \mid a + a \in T\}$ schreiben. Denn im Fall einer Absolutbetragsbewertung erkennt man durch Einbettung von K in $\boldsymbol{C}$ sofort, daß für jedes $a \in K$ aus $a + a \in T$ stets $a \in T$ folgt, und im Fall einer echt zusammengesetzten Bewertung schließen wir aus $a + a \in T$ zunächst auf $(a + M^+) + (a + M^+) \subseteqq T + M^+$ und dann auf $a \in T$ wegen $T + M^+ = T$. — Wir könnten schließlich statt $S = \{a \mid a + a \in T\}$ auch $S = \frac{1}{2}T$ schreiben, da nach Ausschluß der Exponentenbewertungen bei Satz 7 nur Körper der Charakteristik 0 in Betracht kommen, die wir alle als Oberkörper des Körpers der rationalen Zahlen darstellen können. Doch ordnet sich die Schreibweise $\{a \mid a + a \in T\}$ besser in unseren allgemeinen Rahmen ein, in dem ja Summenbildungen wie $T + T$, $T + M^+$ eine Hauptrolle spielen.

Mathematisches Institut der Universität Bonn

(Eingegangen am 6. Mai 1961)

ATIYAH, M. F., und F. HIRZEBRUCH
Math. Zeitschr. 77, 149–187 (1961)

Cohomologie-Operationen und charakteristische Klassen

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22.9.1961 gewidmet

Von

M. F. ATIYAH und **F. HIRZEBRUCH**

EINLEITUNG. Bereits im Jahre 1950 hat WU WEN-TSUN [25] eine Beziehung zwischen den Steenrodschen Cohomologie-Operationen

$$Sq^i : H^n(X; \mathbf{Z}_2) \to H^{n+i}(X; \mathbf{Z}_2)$$

und den Stiefel-Whitneyschen Klassen $w_i \in H^i(M; \mathbf{Z}_2)$ einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit M hergestellt. Wu definiert Polynome $U_j(w_1, \ldots, w_j)$ vom Gewichte j derart, daß in jeder kompakten differenzierbaren m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M gilt:

(1) $$Sq^i v = U_i \cdot v \quad \text{für alle } v \in H^{m-i}(M; \mathbf{Z}_2).$$

Wu hat seine Resultate auf die Steenrodschen Operationen $\mathscr{P}^r$ in der Cohomologie mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_q$ (q ungerade Primzahl) und Pontrjaginsche Klassen (reduziert mod q) übertragen [26]. Im Jahre 1953 stellte einer der Verfasser einen merkwürdigen Zusammenhang her zwischen den Wuschen Polynomen und den aus der algebraischen Geometrie bekannten Toddschen Polynomen [10]. Die Note [10] enthält keine Beweise. Diese werden in der vorliegenden Arbeit nachgeholt. Die Beziehungen zwischen Wuschen und Toddschen Polynomen (Satz von Riemann-Roch), die in [10] einen recht formalen Charakter hatten, werden vertieft. Die Formel (1) wird auf Abbildungen $f: Y \to X$ von Mannigfaltigkeiten verallgemeinert im gleichen Sinne, wie GROTHENDIECK [6] den Satz von Riemann-Roch [11] verallgemeinert hat. Der Satz von Grothendieck hat ein differenzierbares Analogon [3]. ADAMS hat in [2] gezeigt, wie der Chernsche Charakter eines Vektorraumbündels mit Cohomologie-Operationen zusammenhängt. Dies erlaubt uns, die vorhin erwähnte Beziehung zwischen Wuschen und Toddschen Polynomen besser zu verstehen. Durch die Arbeiten [3, 6] ist es ja klar geworden, daß die totale Toddsche Klasse $\sum_{j=0}^{\infty} T_j(c_1, \ldots, c_j)$ aufgefaßt als Element des rationalen Cohomologieringes des klassifizierenden Raumes der unitären Gruppe nach Anwendung des Thomschen Isomorphismus in den Chernschen Charakter eines „Bündels" über dem universellen Thomschen Komplex übergeht. Wir werden sehen, daß durch Reduktion modulo einer Primzahl der differenzierbare Satz von Riemann-Roch in die für Abbildungen verallgemeinerten Wuschen Formeln übergeht.

Durch die Cobordisme-Arbeit von Thom [22] sind prinzipiell alle Relationen mod 2 zwischen den Stiefel-Whitneyschen Zahlen einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit bekannt. In [8] hat Dold gezeigt, daß die Wuschen Relationen zwischen den Stiefel-Whitneyschen Zahlen vollständig sind. Die Wuschen Relationen erhält man, wenn man in (1) für v Polynome in den w_j einsetzt und $Sq^i v$ auf Grund universeller Formeln, die ebenfalls von Wu stammen, berechnet. Nun hat Milnor in [17] entscheidende Resultate über den Cobordisme-Ring orientierter Mannigfaltigkeiten bewiesen, die es prinzipiell ermöglichen, alle Relationen zwischen den Pontrjaginschen Zahlen, welche ja ganze Zahlen sind, aufzustellen. Es gibt da aber nicht nur Relationen modulo einer Primzahl, sondern auch modulo Potenzen einer Primzahl. Zum Beispiel zeigt der Indexsatz [11], daß für eine M^8 gilt: $7p_2 - p_1^2 \equiv 0\ (45)$. Die Pontrjaginschen Zahlen erfüllen keine Relationen modulo 2. Wir zeigen, daß die analog zum Fall der Stiefel-Whitneyschen Klassen mit Hilfe der Steenrodschen Operationen $\mathscr{P}^r$ gebildeten Wuschen Relationen für eine ungerade Primzahl q wieder vollständig sind, d. h. alle Relationen mod q zwischen Pontrjaginschen Zahlen (natürlich nicht die Relationen modulo Potenzen von q) implizieren. Von Milnor [17] stammt auch ein komplexes Analogon des Cobordisme-Ringes, das es ermöglicht, alle Relationen zwischen den Chernschen Zahlen aufzustellen. (Es ist dabei gleichgültig, ob man nur projektiv-algebraische Mannigfaltigkeiten oder allgemeiner schwach-fastkomplexe Mannigfaltigkeiten betrachtet, vgl. auch den Bericht [12].) Die Relationen modulo einer Primzahl (nicht die modulo der Potenzen einer Primzahl) können wieder mit Hilfe der Wuschen Methode erhalten werden. Aus dem Satz von Riemann-Roch stammende Ganzzahligkeitssätze [3, 5] liefern Relationen für Chernsche Zahlen. Wir vermuten, daß dies alle Relationen sind. Die Vermutung wird dadurch bestärkt, daß diese Riemann-Roch-Relationen modulo einer Primzahl mit den Wuschen Relationen übereinstimmen, also vollständig sind. Zur Aufstellung aller Relationen modulo einer Primzahl benötigt man nur den elementareren Teil der Milnorschen Arbeit [17], nämlich die Existenz gewisser Mannigfaltigkeiten (5.5 i), ii) der vorliegenden Arbeit) und Aussagen über das Operieren der Steenrodschen Algebra auf der Cohomologie des universellen unitären Thomschen Komplexes MU (s. 5.4). Die Vollständigkeit der Wuschen Relationen ist auf Grund dieser Tatsachen sehr einfach einzusehen.

Wir fassen kurz den Inhalt der einzelnen Paragraphen zusammen: In §1 führen wir den Begriff des Cohomologie-Automorphismus ein. Die Milnorsche Arbeit [16] über die Struktur der Steenrodschen Algebra ermöglicht es uns, die Cohomologie-Automorphismen durch gewisse Potenzreihen zu charakterisieren (Satz 1.8). Der nächste Paragraph bringt Beziehungen zwischen Cohomologie-Automorphismen und charakteristischen Klassen von Vektorraumbündeln (s. z. B. Satz 2.7). In §3 beweisen wir für Abbildungen $f: Y \to X$ von Mannigfaltigkeiten und einen beliebigen Cohomologie-Automorphismus den Satz 3.2, der für die konstante Abbildung $Y \to$ Punkt eine Verallgemeinerung der Wuschen Formel (1) ist. Es genügt 3.2 für Einbettungen und Projektionen zu beweisen. Der Beweis verläuft analog zu dem des differenzier-

baren Riemann-Rochschen Satzes [3, 13], nur ist er viel einfacher. Die Diagonalmethode, mit der die Wuschen Formeln häufig hergeleitet werden [1, 10, 15, 25, 26], wird nicht herangezogen. Stattdessen wird benutzt, daß eine differenzierbare Mannigfaltigkeit in eine Sphäre geeigneter Dimension einbettbar ist. In §4 besprechen wir den Satz von ADAMS über den Chernschen Charakter und in §5 die Vollständigkeit der Wuschen Relationen zwischen charakteristischen Zahlen.

§1. Cohomologie-Automorphismen

1.1. In diesem Paragraphen wird die singuläre Cohomologie-Theorie mit Koeffizienten in dem Primkörper $\boldsymbol{Z}_q$ der Charakteristik $q\,(q \neq 0)$ betrachtet. Im allgemeinen wird die Primzahl q festgewählt, so daß wir den Koeffizientenbereich $\boldsymbol{Z}_q$ bei der Anschreibung der Cohomologie-Gruppen weglassen werden, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind. Für einen topologischen Raum X bezeichnet $H^{**}(X)$ das direkte Produkt der $H^i(X)$. Ein Element $z \in H^{**}(X)$ kann auf eine und nur eine Weise als „unendliche Summe"

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} z_i, \qquad z_i \in H^i(X),$$

geschrieben werden. Für eine stetige Abbildung $f: Y \to X$ bezeichnet f^{**} den induzierten Homomorphismus $H^{**}(X) \to H^{**}(Y)$. Für einen Raum X, dessen Cohomologie-Gruppen oberhalb einer gewissen Dimension n_0 alle verschwinden, können $H^*(X)$ und $H^{**}(X)$ identifiziert werden. (Vgl. [5, Teil I, §6.1]; diese Bezeichnungen verwenden wir natürlich auch für andere Koeffizientenbereiche als $\boldsymbol{Z}_q$.)

DEFINITION. *Ein Cohomologie-Automorphismus λ (für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_q$) ist eine Operation, die jedem topologischen Raum X einen Ring-Homomorphismus*

$$\lambda: H^{**}(X) \to H^{**}(X)$$

so zuordnet, daß

(1) $f^{**}\lambda = \lambda f^{**}$ *für jede stetige Abbildung $f: Y \to X$ topologischer Räume Y, X,*

(2) $\lambda =$ *Identität für $X = \boldsymbol{S}^1$ (eindimensionale Sphäre).*

Es wird natürlich nicht verlangt, daß λ die Graduierung erhält. Für eine ungerade Primzahl q ist

$$\mathscr{P} = \sum_{r=0}^{\infty} \mathscr{P}^r$$

ein Cohomologie-Automorphismus, wo

$$\mathscr{P}^r: H^n(X) \to H^{n+2r(q-1)}(X)$$

die r-te Steenrodsche reduzierte Potenz für die Primzahl q ist [20]. Für $q=2$ ist entsprechend

$$Sq = \sum_{i=0}^{\infty} Sq^i$$

ein Cohomologie-Automorphismus, wo

$$Sq^i : H^n(X) \to H^{n+i}(X)$$

das i-te Steenrodsche reduzierte Quadrat ist (vgl. auch [21]). Durch (2) wird z.B. die Operation $\lambda(x) = x^q \left(x \in H^{**}(X; \boldsymbol{Z}_q)\right)$ ausgeschlossen.

Es wird später leicht folgen, daß $\lambda : H^{**}(X) \to H^{**}(X)$ ein Isomorphismus ist. (Deshalb sprechen wir bereits jetzt von Cohomologie-*Automorphismen*.) Wir hätten auch allgemeinere Koeffizientenbereiche als die Primkörper der Charakteristik q für die Untersuchung von Cohomologie-Automorphismen zugrunde legen können. Manche der folgenden Sätze blieben dann erhalten. Aber da das für die Zwecke der vorliegenden Arbeit nicht erforderlich ist, haben wir uns der Bequemlichkeit wegen auf die Primkörper beschränkt. Den Primkörper $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Z}_0$ der Charakteristik 0 haben wir ausgeschlossen, da für ihn jeder Cohomologie-Automorphismus die Identität ist.

1.2. *Ein Cohomologie-Automorphismus λ ist bereits definiert, wenn man ihn für alle CW-Komplexe so definiert hat, daß alle Bedingungen der Definition* 1.1 *im Rahmen der Kategorie der CW-Komplexe* [24] *erfüllt sind.* An Stelle der CW-Komplexe könnte man auch die simplizialen Komplexe wählen. Eine entsprechende Bemerkung über Cohomologie-Operationen findet sich bereits bei Serre [19, §4], der dort den allgemeinen Begriff der Cohomologie-Operation zuerst eingeführt hat. Wir wollen diese Dinge hier nicht näher ausführen. Wir erinnern nur daran, daß die geometrische Realisierung $|K|$ eines semisimplizialen Komplexes K ein CW-Komplex ist [14]. Wenn K insbesondere der singuläre Komplex SX eines topologischen Raumes ist, dann hat man eine kanonische Abbildung $j_X : |SX| \to X$, welche Isomorphismen aller Cohomologie-Gruppen induziert. Für eine stetige Abbildung $f : Y \to X$ hat man eine stetige Abbildung $f' : |SY| \to |SX|$ und das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} |SY| & \xrightarrow{f'} & |SX| \\ {\scriptstyle j_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_X} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array} \tag{3}$$

Wegen der Abbildung j_X weiß man also, wie λ auf $H^{**}(X)$ zu definieren ist, wenn man es auf $H^{**}(|SX|)$ kennt. Man verwendet (3), um zu zeigen, daß der nun für alle topologischen Räume definierte Cohomologie-Automorphismus λ mit Abbildungen vertauschbar ist.

Wir stellen weiter fest, daß *ein Cohomologie-Automorphismus λ sogar bereits definiert ist, wenn er für alle endlichen CW-Komplexe so definiert ist, daß alle Bedingungen der Definition* 1.1 *im Rahmen der Kategorie der endlichen CW-Komplexe erfüllt sind.*

Für jeden CW-Komplex X hat man nämlich die Isomorphie

$$H^{**}(X; \boldsymbol{Z}_q) = \varprojlim H^*(X_\alpha; \boldsymbol{Z}_q), \tag{4}$$

wo X_α alle endlichen Teilkomplexe durchläuft (inverser Limes). Für die Isomorphie (4) wird ausgenutzt, daß der Koeffizientenbereich $\mathbf{Z}_q$ ein Körper ist. (Vgl. hierzu [9, Chap. VIII, Theorem 5.7 und Exercise F 2].)

Die Überlegungen dieses Abschnitts zeigen, daß gewisse im nächsten Abschnitt zu formulierende Eigenschaften von λ nur für endliche CW-Komplexe bewiesen zu werden brauchen.

1.3. Zunächst eine Bemerkung über das Cup-Produkt. Für eine Triade $(X; Y_1, Y_2)$ topologischer Räume $(Y_1 \subset X,\ Y_2 \subset X)$ kann man die singulären (semi-simplizialen) Komplexe $SY_1 \cup SY_2$ und $S(Y_1 \cup Y_2)$ betrachten, welche Unterkomplexe von SX sind. Die Triade $(X; Y_1, Y_2)$ heiße eigentlich, wenn die Inklusion $SY_1 \cup SY_2 \subset S(Y_1 \cup Y_2)$ Isomorphismen der ganzzahligen Homologiegruppen dieser Komplexe und damit auch Isomorphismen aller Homologie- und Cohomologiegruppen mit beliebigen Koeffizienten induziert [9, Chap. VII, §11]. Zum Beispiel ist $(X; Y_1, Y_2)$ dann eigentlich, wenn X ein CW-Komplex ist und Y_1, Y_2 Unterkomplexe sind. Verwendet man einen Ring als Koeffizientenbereich für die singuläre Cohomologie, dann ist für eine eigentliche Triade $(X; Y_1, Y_2)$ das Cup-Produkt definiert: Für $a \in H^n(X, Y_1)$ und $b \in H^m(X, Y_2)$ ist $a \cup b = ab$ ein Element von $H^{n+m}(X, Y_1 \cup Y_2)$. Die übliche Definition des Cup-Produkts liefert ab zunächst nur als Element von $H^{n+m}(SX, SY_1 \cup SY_2)$. Diese Gruppe ist aber bei einer eigentlichen Triade kanonisch isomorph zu $H^{n+m}\big(SX, S(Y_1 \cup Y_2)\big) = H^{n+m}(X, Y_1 \cup Y_2)$. (Man ziehe das Fünfer-Lemma heran.)

Satz. *Ein Cohomologie-Automorphismus λ für die Cohomologie mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_q$ sei gegeben* (1.1). *Er kann dann auf eine und nur eine Weise für beliebige Raumpaare (X, Y) definiert werden,*

$$\lambda : H^{**}(X, Y) \to H^{**}(X, Y),$$

so daß er für $Y = \emptyset$ mit dem gegebenen λ übereinstimmt und daß gilt:

(i) *λ ist additiv.*

(ii) *λ ist mit Abbildungen $(X, Y) \to (X', Y')$ vertauschbar.*

(iii) *Für eine eigentliche Triade $(X; Y_1, Y_2)$, für $a \in H^{**}(X, Y_1)$, $b \in H^{**}(X, Y_2)$ und damit $a \cup b \in H^{**}(X, Y_1 \cup Y_2)$ gilt: $\lambda(a \cup b) = \lambda a \cup \lambda b$.*

(iv) *λ ist stabil.*

(v) *λ ist mit dem Corand-Operator $\delta : H^{**}(Y) \to H^{**}(X, Y)$ vertauschbar.*

Beweis. Für ein Paar (X, Y) endlicher CW-Komplexe (Y Teilkomplex) ist

$$H^*(X, Y) = \tilde{H}^*(X/Y), \tag{5}$$

wo X/Y aus X durch Identifikation von Y zu einem Punkt ensteht, der in X/Y die Rolle des Basispunktes übernimmt. $\tilde{H}^*$ bezeichnet die bezüglich des Basispunktes „reduzierte" Cohomologie ($\tilde{H}^i = H^i$ für $i > 0$). Damit ist klar, wie λ für ein Paar endlicher CW-Komplexe definiert werden muß. Für ein beliebiges Paar (X, Y) von CW-Komplexen (Y Teilkomplex) gilt in Verallgemeinerung

von (4)

$$H^{**}(X, Y) = \lim_{\leftarrow} H^*(X_\alpha, Y \cap X_\alpha), \tag{6}$$

wo X_α die endlichen Teilkomplexe durchläuft. λ wird nach (6) für (X, Y) definiert. Man sieht leicht, daß die Definition nicht davon abhängt, wie der Raum X als CW-Komplex dargestellt wird und daß λ mit Abbildungen innerhalb der Kategorie der Paare von CW-Komplexen vertauschbar ist. (Vgl. die entsprechenden Überlegungen bei M. F. ATIYAH and F. HIRZEBRUCH, Analytic cycles on complex manifolds (erscheint demnächst in „Topology", Pergamon Press), §1). Für ein beliebiges Paar (X, Y) topologischer Räume ist SY Teilkomplex von SX und

$$i_X : (|SX|, |SY|) \to (X, Y) \tag{7}$$

induziert Isomorphismen der Cohomologie-Gruppen. Damit ist λ für ein beliebiges Paar definiert. (ii) folgt unmittelbar aus (3). Nun zum Beweis von (iii). Für Paare (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) endlicher CW-Komplexe betrachten wir die Homomorphismen

$$\begin{cases} H^*(X_1, Y_1) \otimes H^*(X_2, Y_2) \xrightarrow{\alpha} H^*(X_1 \times X_2, Y_1 \times X_2 \cup X_1 \times Y_2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \beta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad H^*((X_1/Y_1) \times (X_2/Y_2)) \end{cases} \tag{8}$$

(Tensorprodukt über $\mathbf{Z}_q$), wobei α und $\beta \circ \alpha$ in bekannter Weise durch das Cup-Produkt gegeben werden, während β durch

$$X_1/Y_1 \times X_2/Y_2 \to (X_1/Y_1 \times X_2/Y_2)(X_1/Y_1 \vee X_2/Y_2) = X_1 \times X_2/(Y_1 \times X_2 \cup X_1 \times Y_2)$$

induziert wird (vgl. [4, §1]). Bezeichnet man mit p_1 und p_2 die Projektionen von $X_1/Y_1 \times X_2/Y_2$ auf X_1/Y_1 bzw. X_2/Y_2, dann ist $(\beta \circ \alpha)(x_1 \otimes x_2) = p_1^* x_1 \cup p_2^* x_2$. Daraus folgt, daß λ mit $\beta \circ \alpha$ vertauschbar ist, wobei wir λ auf dem in (8) vorkommenden Tensorprodukt durch $\lambda(x_1 \otimes x_2) = \lambda x_1 \otimes \lambda x_2$ operieren lassen. Da β injektiv und mit λ vertauschbar ist, ist λ auch mit α vertauschbar. Wir setzen nun $X_1 = X_2 = X$. Die Diagonalbildung von X in $X \times X$ bildet $Y_1 \cup Y_2$ in $Y_1 \times X_2 \cup X_1 \times Y_2$ ab.

$$\Delta : (X, Y_1 \cup Y_2) \to (X \times X, Y_1 \times X \cup X \times Y_2).$$

Die zu beweisende Gleichung (iii) ist nichts anderes als die Vertauschbarkeit von $\Delta^* \circ \alpha$ mit λ, die aber richtig ist, da λ mit α und mit Δ^* vertauschbar ist. Man beweist (iii) in voller Allgemeinheit, indem man (6) und die Realisierungen semi-simplizialer Komplexe verwendet. Die Einzelheiten mögen dem Leser überlassen sein.

Wir kommen nun zum Beweis von (iv). Es sei X ein endlicher CW-Komplex mit Basispunkt. Die 1-Sphäre $\mathbf{S}^1$ werde kanonisch orientiert und sei ebenfalls mit Basispunkt versehen. Unter dem Koeffizienten-Homomorphismus $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_q$ geht das zur Orientierung gehörige erzeugende Element von $H^1(\mathbf{S}^1; \mathbf{Z})$ in ein erzeugendes Element g von $H^1(\mathbf{S}^1; \mathbf{Z}_q)$ über. Die Einhängung von X ist der

CW-Komplex

$$S(X) = S^1 \wedge X = S^1 \times X / S^1 \vee X, \quad \text{vgl. } [4, \S 1].$$

Man hat einen kanonischen Isomorphismus

$$E : \tilde{H}^*(X) \to \tilde{H}^*(S^1 \wedge X),$$

der wie folgt definiert ist. Man setzt in (8) $X_1 = S^1$, $X_2 = X$ und für Y_1, Y_2 den jeweiligen Basispunkt. Dann ist

$$E(x) = \alpha(g \otimes x), \qquad x \in \tilde{H}^*(X) = H^*(X_2, Y_2).$$

Wie wir vorhin bemerkt haben, ist λ mit α vertauschbar. Nach (2) ist $\lambda(g) = g$. Also ist λ mit E vertauschbar. Dies ist gerade die Stabilität.

(v) braucht wegen (6) und (7) nur für ein Paar (X, Y) endlicher CW-Komplexe bewiesen zu werden. In Y werden ein Basispunkt ausgezeichnet. Es genügt dann, die Behauptung für $y \in \tilde{H}^*(Y)$ nachzuweisen. Es sei f die Einbettung von Y in X. Der Abbildungskegel C_f ist ein endlicher CW-Komplex mit Basispunkt und auf kanonische Weise homotopie-äquivalent mit X/Y, vgl. [4, 18]. Es gibt eine Abbildung Qf von C_f in $S^1 \wedge Y$ und δ ist gleich $(Qf)^* \circ E$ gefolgt von dem kanonischen Isomorphismus $\tilde{H}^*(C_f) \cong \tilde{H}^*(X/Y) = H^*(X, Y)$. Die Behauptung (v) folgt nun aus (1) und der vorhin bewiesenen Vertauschbarkeit von λ mit E.

1.4. Ein Cohomologie-Automorphismus λ ist bereits durch sein Operieren auf den Cohomologie-Ringen der endlichen CW-Komplexe bestimmt (1.2). Aus dieser Tatsache und aus 1.3 (iv) folgert man, daß sich λ in der Form

$$\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \tag{9}$$

schreiben läßt, wo $\lambda_j : H^n(X) \to H^{n+j}(X)$, ($X$ beliebiger topologischer Raum, $n = 0, 1, 2, \ldots$), eine stabile Operation ist, die die Dimension um j erhöht. (9) bedeutet, daß für $z \in H^{**}(X)$ mit $z = \sum_{i=0}^{\infty} z_i$ und $z_i \in H^i(X)$

$$\lambda_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_j z_i \tag{10}$$

und

$$\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j z. \tag{11}$$

Auf Grund der Definition von H^{**} sind die unendlichen Summen (10) und (11) sinnvoll.

Auf $H^*(S^n)$ ist λ gleich der Identität ((2) und 1.3 (iv): Vertauschbarkeit mit E, die n-Sphäre S^n ist die $(n-1)$-fache Einhängung von S^1). Für einen endlichen CW-Komplex X, dessen n-Skelett mit X^n bezeichnet werde, ist λ auf $H^*(X^n, X^{n-1})$ die Identität, da X^n/X^{n-1} ein Bukett von Sphären ist.

Wegen der exakten Sequenzen

$$H^n(X^n, X^{n-1}) \to H^n(X^n) \to 0, \qquad 0 \to H^n(X) \to H^n(X^n)$$

ist λ_0 die Identität (und zwar wegen 1.2 für jeden topologischen Raum X).

Lemma. *Für jeden Raum X ist λ ein Automorphismus von $H^{**}(X)$.*

Beweis. Wegen 1.2 genügt es, dies für endliche CW-Komplexe nachzuweisen, da dann die Existenz des inversen Cohomologie-Automorphismus λ^{-1} gesichert ist. In diesem Fall ist die Behauptung klar, da λ wegen (9) und $\lambda_0 =$ Identität injektiv ist und $H^{**}(X) = H^*(X)$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbf{Z}_q$ ist. Man kann auch λ^{-1} sofort explizit angeben. Man setze

$$\lambda = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1 + \mu .$$

Dann ist

$$\lambda^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \mu^j , \tag{12}$$

wo μ^j die j-fache Iteration von μ bedeutet. Es ist klar, daß (12) die j-dimensionale Komponente von λ^{-1} als endliche Summe

$$\sum a_{i_1 \dots i_r} \lambda_{i_1} \circ \cdots \circ \lambda_{i_r} \qquad (i_1 + \cdots + i_r = j,\ a_{i_1 \dots i_r} \in \mathbf{Z}_q)$$

iefert.

Cohomologie-Automorphismen können hintereinander geschaltet werden. Die Cohomologie-Automorphismen (für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_q$) bilden eine Gruppe, die mit $\mathrm{Coh}(\mathbf{Z}_q)$ bezeichnet werde.

1.5. Satz. *Wenn $q \neq 2$, dann sind für einen Cohomologie-Automorphismus λ alle Komponenten λ_i* (vgl. (9)) *mit ungeradem i gleich* 0.

Beweis. $H^{**}(X \times \mathbf{S}^1)$ enthält $H^{**}(X)$ als Unterring und ist ein freier Modul über $H^{**}(X)$ mit einer Basis 1, $g \in H^{**}(X \times \mathbf{S}^1)$, $(g \in H^1,\ gg = 0)$, für die $\lambda(g) = g$. Für $x \in H^m(X)$ ist

$$\lambda(xg) = \lambda x \cdot g = (-1)^m \lambda(gx) = (-1)^m g \cdot \lambda x = (-1)^m \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+m} \lambda_i x \cdot g .$$

Es folgt $\lambda_i = (-1)^i \lambda_i$ und damit die Behauptung.

Der Satz ist für $q = 2$ falsch, wie der Cohomologie-Automorphismus Sq (s. 1.1) zeigt.

1.6. Zusammenfassend können wir sagen, daß ein Cohomologie-Automorphismus λ (für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_q$) eine natürliche Transformation der singulären Theorie in sich ist, welche die multiplikative Struktur und für $q \neq 2$ die $\mathbf{Z}_2$-Graduierung erhält:

$$\begin{cases} H^{**}(X) = H^{ev}(X) + H^{od}(X), \\ H^{ev}(X) = \prod_{m=0}^{\infty} H^{2m}(X), \qquad H^{od}(X) = \prod_{m=0}^{\infty} H^{2m+1}(X), \qquad (\text{vgl. } [4, \S 1.10]). \end{cases} \tag{13}$$

Wir unterscheiden jetzt die beiden Fälle q ungerade und $q = 2$.

a) *q ungerade.*

Der Ring der formalen Potenzreihen in einer Unbestimmten x über $\boldsymbol{Z}_q$ werde mit $\boldsymbol{Z}_q[[x]]$ bezeichnet (entsprechende Bezeichnung für mehrere Unbestimmte). $\boldsymbol{Z}_q[[x]]$ ist isomorph zu $H^{**}(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C}))$, dem Cohomologie-Ring des unendlich-dimensionalen komplexen projektiven Raumes. Wir stiften einen Isomorphismus, indem wir x ein von 0 verschiedenes (und damit erzeugendes) Element von $H^2(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C})) \cong \boldsymbol{Z}_q$ zuordnen. Jetzt ist $\lambda(x)$ wohldefiniert als Element von $\boldsymbol{Z}_q[[x]]$, und zwar ist es wegen $\lambda_0 =$ Identität von der Form

$$\lambda(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j, \quad b_j \in \boldsymbol{Z}_q, \quad b_1 = 1. \tag{14}$$

Da $\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C})$ ein Eilenberg-MacLanescher Raum $K(\boldsymbol{Z}, 2)$ ist, gilt (14), wenn man x durch ein beliebiges Element von $H^2(X, Y)$ ersetzt, welches Reduktion einer *ganzzahligen* 2-dimensionalen Cohomologie-Klasse von (X, Y) ist. Insbesondere trifft das zu für $X = \boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C})$ und $Y = \emptyset$. Nun ist

$$H^{**}(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C})) = \boldsymbol{Z}_q[[x_1, x_2]],$$

wo x_1, x_2 Unbestimmte über $\boldsymbol{Z}_q$ sind, die bei dem Isomophismus 2-dimensionalen Cohomologieklassen entsprechen. Aus der Additivität von λ ergibt sich folgende Gleichung in $\boldsymbol{Z}_q[[x_1, x_2]]$

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j (x_1 + x_2)^j = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_1^j + \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_2^j. \tag{15}$$

Elementare Eigenschaften der Binomialkoeffizienten implizieren, daß $b_j = 0$, wenn j keine Potenz von q ist. Wir setzen

$$\lambda(x) = x + a_1 x^q + a_2 x^{q^2} + \cdots + a_j x^{q^j} + \cdots, \quad a_j \in \boldsymbol{Z}_q. \tag{16}$$

Die Potenzreihe $\lambda(x) \in \boldsymbol{Z}_q[[x]]$ hängt offenbar nicht von der Auswahl des erzeugenden Elementes von $H^2(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C}))$ ab, das wir x zugeordnet haben.

b) $q = 2$.

Der Ring $\boldsymbol{Z}_2[[x]]$ wird jetzt als Cohomologie-Ring $H^{**}(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{R}))$ des unendlich-dimensionalen reellen projektiven Raumes realisiert, indem wir der Unbestimmten x das von 0 verschiedene Element von $H^1(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{R})) \cong \boldsymbol{Z}_2$ zuordnen. Wie in a) erhält man die Potenzreihe

$$\lambda(x) = x + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_j x^{2^j} + \cdots, \quad a_j \in \boldsymbol{Z}_2. \tag{17}$$

Die Gleichung (17) bleibt richtig, wenn man x durch ein beliebiges Element von $H^1(X, Y)$ ersetzt, da $\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{R})$ ein Eilenberg-MacLanescher Raum $K(\boldsymbol{Z}_2, 1)$ ist.

Bei der Definition der Potenzreihe $\lambda(x)$ wurde die Additivität von λ benutzt, aber nicht, daß λ die multiplikative Struktur erhält.

Mit $G(\boldsymbol{Z}_q)$ werde die Gruppe der Potenzreihen der Gestalt (16) bzw. (17) bezüglich des Ineinander-Setzens bezeichnet:

$$f(x) \circ g(x) = f(g(x)).$$

Ordnet man jedem Cohomologie-Automorphismus λ die Potenzreihe $\lambda(x)$ zu, dann erhält man einen Homomorphismus

(18) $\quad \mathrm{Coh}(\boldsymbol{Z}_q) \to G(\boldsymbol{Z}_q), \quad$ (vgl. Schluß von 1.4).

Wir werden in 1.8 sehen, daß (18) bijektiv, also ein Isomorphismus ist. Entscheidend sind dafür die Ergebnisse von Milnor über die Steenrodsche Algebra.

1.7. Über die Steenrodsche Algebra. Wir folgen den Bezeichnungen von Milnor [*16*]. Es sei also S^* die Steenrodsche Algebra für die Primzahl q. Die Algebra S^* ist graduiert, assoziativ und vom endlichen Typ über $\boldsymbol{Z}_q$, d.h.

$$S^* = \sum_{i=0}^{\infty} S^i,$$

und S^i ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\boldsymbol{Z}_q$. (S^0 hat die Dimension 1.) Nach CARTAN und SERRE [*7*, *19*] ist S^i die additive Gruppe der stabilen Operationen von der Cohomologie mit Koeffizienten $\boldsymbol{Z}_q$ in sich, die die Dimension um i erhöhen. Also ist für jeden Cohomologie-Automorphismus λ die Komponente λ_i ein Element von S^i. Jedoch ist λ selbst nicht ein Element von S^*. Wir führen deshalb in Analogie zu 1.1 das direkte Produkt der S^i ein und nennen es S^{**}. Die Cohomologie-Automorphismen entsprechen dann bestimmten Elementen von S^{**}. Es handelt sich nun darum, festzustellen, welche Elemente von S^{**} Cohomologie-Automorphismen sind.

MILNOR definiert in §3 seiner Arbeit [*16*] den Ring-Homomorphismus

$$\psi^* : S^* \to S^* \otimes S^* \quad \text{(Tensorprodukte immer über } \boldsymbol{Z}_q),$$

welcher S^* zu einer Hopfschen Algebra macht. Wir setzen $S^* \otimes S^* = U^*$. Dann ist

$$U^n = \sum_{i+j=n} S^i \otimes S^j$$

und ψ^* bildet S^n in U^n ab. Es ist klar, daß ψ^* auf natürliche Weise einen Homomorphismus

$$\psi^{**} : S^{**} \to U^{**}, \qquad U^{**} = \prod_{n=0}^{\infty} U^n,$$

induziert. Wir nennen nun diejenigen Elemente c von S^{**} *multiplikativ*, welche von 0 verschieden sind und für die

$$\psi^{**} c = c \otimes c,$$

das soll heißen

$$\psi^* c_k = \sum_{i+j=k} c_i \otimes c_j, \qquad \text{(vgl. auch [1])}.$$

Da S^* eine Hopfsche Algebra ist, folgt sofort $c_0 = 1$.

LEMMA. *Für ungerades q ist ein Element von S^{**} dann und nur dann ein Cohomologie-Automorphismus, wenn es multiplikativ ist und wenn seine ungerade-dimensionalen Komponenten verschwinden. Für $q = 2$ ist ein Element von*

S^{**} dann und nur dann ein Cohomologie-Automorphismus, wenn es multiplikativ ist.

Der Beweis ergibt sich sofort aus 1.5 und aus der Definition von ψ^* (s. [*16*, §3, Lemma 1]). Wir hätten den Begriff des Cohomologie-Automorphismus auch so fassen können, daß alle multiplikativen Elemente von S^{**}, auch diejenigen, deren ungerade-dimensionalen Komponenten nicht alle verschwinden, darunterfallen. Aber der Einfachheit wegen haben wir uns für $q \neq 2$ auf die beschränkt, welche die $\mathbf{Z}_2$-Graduierung erhalten (1.6) oder (äquivalent) auf die, welche Ring-Homomorphismen $H^{**}(X) \to H^{**}(X)$ sind.

1.8. Satz. *Der Homomorphismus* $\mathrm{Coh}(\mathbf{Z}_q) \to G(\mathbf{Z}_q)$ *der Gruppe der Cohomologie-Automorphismen in die Gruppe* $G(\mathbf{Z}_q)$ (s. 1.6 (18)) *ist bijektiv.*

Beweis für ungerades q: Milnor [*16*] betrachtet das Dual S_* der Steenrodschen Algebra S^*. Da $S^{**} = \mathrm{Hom}(S_*, \mathbf{Z}_q)$, hat man die Paarung $\langle a, a' \rangle$ zwischen Elementen $a \in S^{**}$ und $a' \in S_*$, die von Milnor nur für $a \in S^*$ betrachtet wird. Für homogen-dimensionale Elemente $a, b \in S^*$ und $a', b' \in S_*$ gilt

$$\langle a \otimes b, a' \otimes b' \rangle = (-1)^{\dim b \cdot \dim a'} \langle a, a' \rangle \cdot \langle b, b' \rangle. \tag{19}$$

Die Homomorphismen

$$\psi^* : S^* \to S^* \otimes S^* \quad \text{und} \quad \psi_* : S_* \otimes S_* \to S_*$$

sind per definitionem dual (ψ_* ist das Produkt im Ringe S_*). Also ist, wie man leicht überlegt,

$$\langle \psi^{**} u, a' \otimes b' \rangle = \langle u, \psi_*(a' \otimes b') \rangle \quad \text{für } u \in S^{**}. \tag{20}$$

Wenn wir für u einen Cohomologie-Automorphismus λ einsetzen, dann folgt (Lemma 1.7 und (19), (20))

$$\langle \lambda, a' b' \rangle = \langle \lambda, a' \rangle \cdot \langle \lambda, b' \rangle, \tag{21}$$

wo $a' b' = \psi_*(a' \otimes b')$ das Produkt in der Algebra S_* bezeichnet. Nach Milnor [*16*] ist S_* das Tensorprodukt der durch Unbestimmte $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ erzeugten Grassmannschen Algebra ($\tau_i \in S_{2q^i-1}$) und dem Polynomring in Unbestimmten $\xi_1, \xi_2, \ldots$ über $\mathbf{Z}_q$, wo $\xi_i \in S_{2q^i-2}$. Wegen $S^{**} = \mathrm{Hom}(S_*, \mathbf{Z}_q)$ und wegen (21) ist ein Cohomologie-Automorphismus durch die Werte $\langle \lambda, \xi_i \rangle$ und $\langle \lambda, \tau_i \rangle$ festgelegt ($\langle \lambda, 1 \rangle = 1$). Nun betrachten wir mit Milnor den Linsenraum $X = \lim_{N \to \infty} \mathbf{S}^{2N+1}/\mathbf{Z}_q$ und die erzeugenden Elemente $\alpha \in H^1(X; \mathbf{Z}_q)$ und $\beta \in H^2(X; \mathbf{Z}_q)$. Dann folgt [*16*, Lemma 4 und 6]

$$\lambda(\alpha) = \alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \langle \lambda, \tau_i \rangle \beta^{q^i} \tag{22}$$

und deshalb $\langle \lambda, \tau_i \rangle = 0$, da $\dim \beta^{q^i} - \dim \alpha$ ungerade ist. Ebenso folgt

$$\lambda(\beta) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle \lambda, \xi_i \rangle \beta^{q^i}, \qquad (\xi_0 = 1). \tag{23}$$

Für die natürliche Projektion

$$\pi : X \to \boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C})$$

ist $\pi^* g = \beta$, wo g ein geeignetes erzeugendes Element von $H^2(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C}); \boldsymbol{Z}_q)$ ist. Da π^{**} injektiv ist, folgt aus (23)

$$\lambda(g) = g + \sum_{i=1}^{\infty} \langle \lambda, \xi_i \rangle g^{q^i}.$$

Der Koeffizient a_j der Potenzreihe $\lambda(x)$ in (16) ist also gleich $\langle \lambda, \xi_j \rangle$. Damit ist bewiesen, daß $\mathrm{Coh}(\boldsymbol{Z}_q) \to G(\boldsymbol{Z}_q)$ injektiv ist.

Es bleibt zu zeigen, daß jede Potenzreihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{q^j} \in G(\boldsymbol{Z}_q), \qquad (a_0 = 1), \tag{24}$$

als Potenzreihe eines Cohomologie-Automorphismus auftritt. Wir definieren eine Element $\lambda \in S^{**}$, indem wir das entsprechende Element $\lambda' \in \mathrm{Hom}(S_*, Z_q)$ angeben. λ' ist durch folgende Angaben bestimmt.

a) $\lambda' : S_* \to \boldsymbol{Z}_q$ ist ein Ring-Homomorphismus,

b) $\lambda'(\tau_i) = \langle \lambda, \tau_i \rangle = 0$, $\lambda'(\xi_j) = \langle \lambda, \xi_j \rangle = a_j$.

In §4 von [*16*] betrachtet Milnor (für endliche CW-Komplexe X) einen Ring-Homomorphismus λ^*, den wir hier mit Λ bezeichnen, um Verwechslungen zu vermeiden:

$$\Lambda : H^*(X) \to H^*(X) \otimes S_*.$$

Man kann Λ ohne weiteres für einen beliebigen Raum X definieren, wenn man $H^*(X)$ durch $H^{**}(X)$ ersetzt. λ'' sei der Ring-Homomorphismus

$$\lambda'' : H^*(X) \otimes S_* \to H^*(X) \quad \text{mit} \quad \lambda''(a \otimes b) = a \cdot \lambda' b.$$

Dann ist nach [*16*, Lemma 4]

$$\lambda = \lambda'' \circ \Lambda.$$

Also ist $\lambda : H^*(X) \to H^*(X)$ auch ein Ring-Homomorphismus und deshalb, wie man leicht sieht, ein Cohomologie-Automorphismus mit der gegebenen Potenzreihe (24).

Der Satz wird für $q = 2$ fast genauso bewiesen (vgl. [*16*, Appendix 1]).

1.9. Für $q = 2$ läßt sich jeder Cohomologie-Automorphismus λ durch die Steenrodschen reduzierten Quadrate Sq^i ausdrücken, d.h. die j-dimensionale Komponente λ_j ($j = 0, 1, 2, \ldots$) ist ein „Polynom" in den Sq^i. Dies ist klar, da die Steenrodsche Algebra durch die Sq^i erzeugt wird. Für ungerades q wird die Steenrodsche Algebra durch die Bocksteinsche Operation δ und die Steenrodschen reduzierten Potenzen $\mathscr{P}^r$ (vgl. 1.1) erzeugt. Es gilt aber auch hier:

Lemma. *Ein Cohomologie-Automorphismus λ für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_q$ (q ungerade Primzahl) läßt sich durch die Steenrodschen reduzierten Potenzen ausdrücken, d.h. λ_j ($j = 0, 1, 2, \ldots$) ist ein Polynom in den $\mathscr{P}^r$, (oder*

anders gesagt: λ_j gehört zu der durch die $\mathscr{P}^r$ erzeugten Unteralgebra St^* von S^*). Insbesondere ist $\lambda_j = 0$, wenn $j \not\equiv 0 \pmod{2(q-1)}$.

BEWEIS. λ nimmt auf allen Elementen von S_*, die dem durch $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ erzeugten Ideal I von S_* angehören, den Wert 0 an (vgl. (22)). Aus (19) und (20) folgt, daß jedes Element von St^* das Ideal I annuliert. Aus [*16*, Lemma 8] folgt umgekehrt, daß ein Element von S^*, das I annuliert, zu St^* gehört.

1.10. Die Steenrodsche Algebra S^* besitzt einen kanonischen Anti-Automorphismus [*16*, §7], der zu einem Anti-Automorphismus von S^{**} erweitert werden kann. Aus seiner Definition folgt unmittelbar, daß er einen Cohomologie-Automorphismus λ in λ^{-1} überführt.

§ 2. Charakteristische Klassen

2.1. Bezeichnungen. Wir betrachten im folgenden reelle Vektorraum-Bündel, von denen wir durchweg voraussetzen, daß sie einen *parakompakten Basisraum* haben. Sie lassen dann die orthogonale Gruppe als Strukturgruppe zu, und es gibt immer Bündelabbildungen in das universelle Bündel [*15*]. In den jeweiligen Abschnitten wird die *singuläre* Cohomologie mit Koeffizienten in einen festen Primkörper der Charakteristik q betrachtet, wobei auch $q = 0$ vorkommen wird. Die Koeffizientenbereiche werden also $\boldsymbol{Z}_q$ ($q \neq 0$) bzw. $\boldsymbol{Q}$, der Körper der rationalen Zahlen sein, der auch mit $\boldsymbol{Z}_0$ bezeichnet werde. Bei der Anschreibung der Cohomologie-Gruppen wird der Koeffizientenbereich häufig weggelassen. Falls $q \neq 2$, wird immer vorausgesetzt, daß die auftretenden Vektorraum-Bündel orientiert sind, also die spezielle orthogonale Gruppe als Strukturgruppe zulassen.

Wir setzen die Theorie der charakteristischen Klassen als bekannt voraus [*5*, *11*, *15*]. Die Stiefel-Whitneyschen Klassen werden nur für $q = 2$ betrachtet. Die Pontrjaginschen Klassen sind ganzzahlige Klassen. Wenn wir für die Cohomologie den Primkörper der Charakteristik q verwenden, dann bezeichnet p_i der Einfachheit wegen das Bild der ganzzahligen $4i$-dimensionalen Pontrjaginschen Klasse unter dem Koeffizienten-Homomorphismus von $\boldsymbol{Z}$ in den Primkörper. Für $q = 2$ ist also $p_i = w_{2i}^2$, wo w_j die j-dimensionale Stiefel-Whitneysche Klasse bezeichnet (vgl. [*5*, Part II, §30.8]).

2.2. Für die Cohomologie wird ein fester Primkörper $\boldsymbol{Z}_q$ (q beliebig) als Koeffizientenbereich verwandt. Gegeben sei ein reelles Vektorraum-Bündel ξ mit Faser $\boldsymbol{R}^n$, Totalraum E_ξ, Basis B_ξ und Projektion π_ξ. (Den Index ξ werden wir häufig weglassen, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind.) Den Verabredungen von 2.1 folgend wird für $q \neq 2$ vorausgesetzt, daß ξ orientiert ist. $E_{\xi,0} = E_0$ bezeichnet wie bei MILNOR [*15*] die Menge der Punkte von E, die nicht gleich der 0 ihrer Faser sind. Es gibt eine kanonische Klasse $U \in H^n(E, E_0)$ (vgl. z.B. [*15*, Chap. VII, Theorem 10, und Chap. VII, Theorem 10′]) und den Thomschen (additiven) Isomorphismus

$$(1)\quad \begin{cases} \Phi : H^i(B) \to H^{i+n}(E, E_0), & \Phi(x) = \pi^* x \cup U, \quad x \in H^i(B), \\ \Phi : H^{**}(B) \to H^{**}(E, E_0), & \Phi(x) = \pi^{**} x \cup U, \quad x \in H^{**}(B). \end{cases}$$

Wenn $q \neq 0$, dann können wir einen Cohomologie-Automorphismus λ betrachten (1.1, 1.3). Wir setzen

$$\underline{\lambda}(\xi) = \Phi^{-1}(\lambda(U)) = \Phi^{-1}\lambda\,\Phi(1) \in H^{**}(B_\xi). \tag{2}$$

Wir haben damit eine Operation $\underline{\lambda}$ definiert, welche jedem Vektorraum-Bündel ein Element des Cohomologie-Ringes H^{**} seiner Basis zuordnet. Um die Eigenschaften von $\underline{\lambda}$ besser formulieren zu können, führen wir folgende Definition ein.

2.3. Für die Cohomologie wird wieder ein fester Primkörper als Koeffizientenbereich verwandt. Wenn die Charakteristik verschieden von 2 ist, werden die Vektorraum-Bündel als orientiert vorausgesetzt.

DEFINITION. *Eine Operation μ, welche jedem Vektorraum-Bündel ξ ein Element $\mu(\xi) \in H^{**}(B_\xi)$ zuordnet, dessen 0-dimensionale Komponente gleich 1 ist, heißt multiplikativer Funktor, wenn gilt*

(i) *μ verhält sich natürlich bei Bündelabbildungen.*

(ii) *Für die Whitneysche Summe $\xi \oplus \eta$ zweier Vektorraum-Bündel ξ, η mit $B_\xi = B_\eta$ ist*

$$\mu(\xi \oplus \eta) = \mu(\xi) \cdot \mu(\eta).$$

Mit $G^{**}(X)$ werde für $q = 2$ die Menge aller Elemente von $H^{**}(X)$ verstanden, deren 0-dimensionale Komponente gleich 1 ist. Für $q \neq 2$ sei $G^{**}(X)$ dagegen die Menge aller Elemente von $H^{**}(X)$, deren 0-dimensionale Komponente gleich 1 ist und deren ungerade-dimensionale Komponenten verschwinden. In beiden Fällen ist $G^{**}(X)$ eine abelsche Gruppe bezüglich des Cüp-Produkts.

Aus der Theorie der klassifizierenden Räume folgt, daß sich $\mu(\xi)$ für $q = 2$ durch die Stiefel-Whitneyschen Klassen und für $q \neq 2$ durch die Pontrjaginschen Klassen und die Eulersche Klasse ausdrücken läßt. Per definitionem ist $\mu(\xi) \in G^{**}(B_\xi)$ für $q = 2$. Aber auch für $q \neq 2$ ist dies richtig. Wie wir später sehen werden (2.5) kommt (für ungerades q) die Eulersche Klasse in Wirklichkeit nicht vor, so daß die von 0 verschiedenen Komponenten von $\mu(\xi)$ sogar durch 4 teilbare Dimension haben.

2.4. In 2.2 hatten wir einen Cohomologie-Automorphismus λ die Operation $\underline{\lambda}$ zugeordnet. Die 0-dimensionale Komponente von $\underline{\lambda}$ ist gleich 1, da λ_0 die Identität ist.

SATZ. *Die Operation $\underline{\lambda}$ ist ein multiplikativer Funktor im Sinne der Definition* 2.3.

Der Beweis geht genauso wie bei MILNOR [*15*, Chap. VII (Verification of axioms)]. Siehe insbesondere Milnors Theorem 11, das die Eigenschaft 2.3 (ii) für den Cohomologie-Automorphismus Sq betrifft. Beim Beweis hat man 1.3 (iii) zu verwenden. Vorzeichenschwierigkeiten treten nicht auf, da $\underline{\lambda}'(\xi)$ mit jedem Element von $H^{**}(B_\xi)$ vertauschbar ist.

2.5. Ein multiplikativer Funktor im Sinne von 2.3 ist für Charakteristik $q=2$ die totale Stiefel-Whitneysche Klasse $w=\sum_{i=0}^{\infty} w_i$ $(w_0=1, w_i\in H^i)$ und für Charakteristik $q\neq 2$ die totale Pontrjaginsche Klasse $p=\sum_{i=0}^{\infty} p_i$ $(p_0=1, p_i\in H^{4i})$, s. [*11*, §4.5]. Es sei $\{K_j(w_1, \ldots, w_j)\}$ eine multiplikative Folge von Polynomen mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_2$ (s. [*11*, §1]). Die w_i werden hier als Unbestimmte über $\boldsymbol{Z}_2$ betrachtet. Ordnet man dann jedem Vektorraum-Bündel ξ das Element

$$\sum_{j=0}^{\infty} K_j\big(w_1(\xi), \ldots, w_j(\xi)\big)\in H^{**}(B_\xi) \tag{3}$$

zu, dann erhält man einen multiplikativen Funktor im Sinne von 2.3.

Ebenso liefert jede multiplikative Folge $\{K_j(p_1, \ldots, p_j)\}$ von Polynomen mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_q$ $(q\neq 2)$ einen multiplikativen Funktor, indem man jedem orientierten Vektorraum-Bündel ξ das Element

$$\sum_{j=0}^{\infty} K_j\big(p_1(\xi), \ldots, p_j(\xi)\big)\in H^{**}(B_\xi) \tag{4}$$

zuordnet.

Wir werden zeigen, daß man auf diese Weise alle multiplikativen Funktoren erhält:

Gegeben sei ein multiplikativer Funktor μ $(q=2)$. Dann gibt es eine und nur eine Potenzreihe $Q(\mu, x)\in \boldsymbol{Z}_2[[x]]$, so daß $\mu(\xi)=Q\big(\mu, w_1(\xi)\big)$ für jedes Vektorraum-Bündel ξ mit Faser $\boldsymbol{R}^1$. Dies ergibt sich mit Hilfe des universellen Bündels (Faser $\boldsymbol{R}^1$) über dem unendlich-dimensionalen reellen projektiven Raum $\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{R})$. Zu dieser Potenzreihe gehört nun eine multiplikative Folge von Polynomen [*1*, §1] und zu dieser nach (3) ein multiplikativer Funktor, der mit μ übereinstimmt. Diese Übereinstimmung ist klar für Vektorraum-Bündel, die Whitneysche Summe von Bündeln mit Faser $\boldsymbol{R}^1$ sind, und deshalb für jedes Bündel ξ, da man zu ξ (Faser $\boldsymbol{R}^n$) einen Raum Y und eine stetige Abbildung $f: Y\to B_\xi$ finden kann, so daß $f^*\xi$ Whitneysche Summe von n Bündeln mit Faser $\boldsymbol{R}^1$ über Y ist und daß $f^{**}: H^{**}(B_\xi)\to H^{**}(Y)$ injektiv ist. Y ist der Totalraum des zu ξ assoziierten Bündels mit $\boldsymbol{O}(n)/(\boldsymbol{Z}_2)^n$ als Faser [*5*, Part I, §9.2]. (Y ist parakompakt als Faserbündel über einem parakompakten Raum mit kompakter Faser.)

Gegeben sei ein multiplikativer Funktor μ $(q\neq 2)$. Dann gibt es eine und nur eine Potenzreihe $Q(\mu, z)\in \boldsymbol{Z}_q[[z]]$ mit $\mu(\xi)=Q\big(\mu, p_1(\xi)\big)$ für jedes orientierte Vektorraum-Bündel ξ mit Faser $\boldsymbol{R}^2$. Dies ergibt sich, indem man beachtet, daß $\mu(\xi)=\mu(\xi\oplus\mathbf{1})$, wo $\mathbf{1}$ das triviale Vektorraum-Bündel mit Faser $\boldsymbol{R}^1$ ist, und daß $H^{**}(B_{\boldsymbol{SO}(3)})=\boldsymbol{Z}_q[[p_1]]$. Zur Potenzreihe $Q(\mu, z)$ gehört eine multiplikative Folge von Polynomen und zu dieser nach (4) ein multiplikativer Funktor, der mit μ übereinstimmt. Diese Übereinstimmung ist zunächst klar für orientierte Vektorraum-Bündel, die Whitneysche Summe von orientierten Bündeln mit Faser $\boldsymbol{R}^2$ sind, und dann für jedes Bündel ξ, da man zu ξ einen

Raum Y und eine stetige Abbildung $f: Y \to B_\xi$ finden kann, so daß $f^*\xi$ Whitneysche Summe von orientierten Vektorraum-Bündeln mit Faser $\boldsymbol{R}^2$ und eventuell einem trivialen Bündel mit Faser $\boldsymbol{R}^1$ ist und daß f^{**} injektiv ist [5, Part I, §9.3].

2.6. Die Überlegungen von 2.5 haben gezeigt:

SATZ. *Ordnet man jedem multiplikativen Funktor μ (s. 2.3) die multiplikative Folge von Polynomen mit der charakteristischen Potenzreihe $Q(\mu, x) \in \boldsymbol{Z}_2[[x]]$ bzw. $Q(\mu, z) = \boldsymbol{Z}_q[[z]]$ $(q \neq 2)$ zu, dann erhält man eine eindeutige Korrespondenz zwischen den multiplikativen Funktoren und den multiplikativen Folgen von Polynomen mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_q$. Die Potenzreihe $Q(\mu, x)$ bzw. $Q(\mu, z)$ ist für $q = 2$ bestimmt durch:*

(5) $\mu(\xi) = Q(\mu, w_1(\xi))$ *für jedes Vektorraum-Bündel ξ mit Faser $\boldsymbol{R}^1$*

und für $q \neq 2$ durch

(6) $\mu(\xi) = Q(\mu, p_1(\xi))$ *für jedes orientierte Vektorraum-Bündel mit Faser $\boldsymbol{R}^2$.*

Schreibt man formal

$$(7)\quad w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + \cdots + w_n(\xi) = \prod_{j=1}^{N} (1 + x_j), \quad (N \text{ groß, } \dim x_j = 1),$$

dann ist für $q = 2$

$$(7')\qquad \mu(\xi) = \prod_{j=1}^{N} Q(\mu, x_j).$$

Schreibt man formal

$$(8)\qquad p(\xi) = \sum_{i=0}^{n} p_i(\xi) = \prod_{j=1}^{N} (1 + x_j^2), \quad (N \text{ groß, } \dim x_j = 2),$$

dann ist für $q \neq 2$

$$(8')\qquad \mu(\xi) = \prod_{j=1}^{N} Q(\mu, x_j^2).$$

Für einen Raum X haben wir in [3] die abelsche Gruppe $K\boldsymbol{O}(X)$ definiert: Man betrachte alle Vektorraum-Bündel mit Basis X. (Die Vektorraum-Bündel brauchen nicht orientierbar zu sein; es wird an dieser Stelle auch zugelassen, daß das Vektorraum-Bündel über verschiedenen Zusammenhangskomponenten von X verschiedene Faserdimensionen hat.) $F(X)$ sei die freie abelsche Gruppe, die von den Isomorphieklassen aller dieser Vektorraum-Bündel erzeugt wird. Für jedes Tripel $t = (\xi, \xi', \xi'')$ von Isomorphieklassen mit $\xi = \xi' \oplus \xi''$ bilden wir das Element $[t] = \xi - \xi' - \xi'' \in F(X)$. Die Gruppe $K\boldsymbol{O}(X)$ ist definiert als die Quotientengruppe von $F(X)$ modulo der Untergruppe, die von allen Elementen der Form $[t]$ erzeugt wird. Für die Definition analoger Grothendieckscher Gruppen im Rahmen der algebraischen Geometrie siehe [6].

LEMMA. *Der Primkörper $\boldsymbol{Z}_q$ diene als Koeffizientenbereich für die Cohomologie. Jeder multiplikative Funktor μ im Sinne von 2.3 induziert auf natürliche Weise einen Homomorphismus*

$$\mu: K\boldsymbol{O}(X) \to G^{**}(X) \subset H^{**}(X).$$

BEWEIS. Für $q=2$ ist dies klar: μ ist auf allen Erzeugenden von $F(X)$ definiert. (Zu jeder Erzeugenden ξ gibt es eine Darstellung von X als disjunkte Vereinigung offener und abgeschlossener Teilmengen X_i, so daß die Beschränkung ξ_i von ξ auf X_i konstante Faserdimension hat. Dann ist $\mu(\xi)\in H^{**}(X)$ gleich dem „direkten Produkt" der $\mu(\xi_i)\in H^{**}(X_i)$.) Da $\mu(\xi)$ in der abelschen Gruppe $G^{**}(X)$ liegt, ist μ auf $F(X)$ wohldefiniert und, da es auf allen Elementen der Form $[t]$ gleich dem Einselement von $G^{**}(X)$ ist, auch auf $KO(X)$.

Für ungerades q ist μ nach den Verabredungen von 2.3 zunächst nur für orientierte Vektorraum-Bündel definiert. Da es sich jedoch durch die Pontrjaginschen Klassen ausdrücken läßt, die für nicht notwendigerweise orientierte Vektorraum-Bündel erklärt sind [*11*, §4.5], ist μ auch für nicht notwendigerweise orientierte Bündel und damit für die Erzeugenden von $F(X)$ definiert. μ ist gleich der 1 von $G^{**}(X)$ auf allen Elementen der Form $[t]\in F(X)$.

Jeder multiplikative Funktor μ ist durch eine multiplikative Folge $\{K_j(w_1,\ldots,w_j)\}$ bzw. $\{K_j(p_1,\ldots,p_j)\}$ bestimmt. Es sei nun $B_O=\lim_{n\to\infty} B_{O(n)}$ der klassifizierende Raum der unendlich orthogonalen Gruppe. Es ist für $q=2$

$$H^{**}(B_O;\mathbf{Z}_2)=\mathbf{Z}_2[[w_1,w_2,\ldots]]$$

und für $q\neq 2$

$$H^{**}(B_O;\mathbf{Z}_q)=\mathbf{Z}_q[[p_1,p_2,\ldots]],$$

wo w_i die universelle Stiefel-Whitneysche Klasse der Dimension i und p_i die universelle Pontrjaginsche Klasse der Dimension $4i$ ist. Der multiplikative Funktor μ ist durch das Element $\sum_{j=0}^{\infty} K_j(w_1,\ldots,w_j)$ bzw. $\sum_{j=0}^{\infty} K_j(p_1,\ldots,p_j)$ von $H^{**}(B_O;\mathbf{Z}_q)$ bestimmt. Wir werden deshalb gelegentlich einen multiplikativen Funktor μ einfach als Element von $H^{**}(B_O;\mathbf{Z}_q)$ ansehen und $\mu\in H^{**}(B_O;\mathbf{Z}_q)$ schreiben. Dieses Element von $H^{**}(B_O;\mathbf{Z}_q)$ ist gewissermaßen der Wert von μ auf dem stabilen universellen reellen Vektorraum-Bündel.

Ein multiplikativer Funktor $\mu: KO(X)\to G^{**}(X)\subset H^{**}(X;\mathbf{Z}_q)$ ordnet auch jedem komplexen Vektorraum-Bündel ξ über X ein Element $\mu(\xi)\in G^{**}(X)$ zu, da ξ als reelles Vektorraum-Bündel aufgefaßt werden kann. Ist $q\neq 2$, also μ gegeben durch eine multiplikative Folge $\{K_j(p_1,\ldots,p_j)\}$, dann ist $\mu(\xi)$ durch eine multiplikative Folge in den Chernschen Klassen von ξ darstellbar, die man erhält, indem man in $K_j(p_1,\ldots,p_j)$ die Pontrjaginschen Klassen durch bekannte Polynome in den Chernschen Klassen ersetzt [*11*, §1.3]:

$$\mu(\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{K}_j(c_1(\xi),\ldots,c_j(\xi))\qquad(\text{mit } \tilde{K}_{2i+1}=0).$$

Es sei nun $B_U=\lim_{n\to\infty} B_{U(n)}$ der klassifizierende Raum der unendlichen unitären Gruppe. Es ist

$$H^{**}(B_U;\mathbf{Z}_q)=\mathbf{Z}_q[[c_1,c_2,\ldots]].$$

Wir können daher μ als Element von $H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)$ auffassen. Auf Grund der natürlichen Inklusion $U \subset O$ hat man den Homomorphismus

$$H^{**}(B_O; Z_q) \to H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q),$$

der (für $q \neq 2$) injektiv ist und bei dem μ (aufgefaßt als Element von $H^{**}(B_O; \mathbf{Z}_q)$) in μ (aufgefaßt als Element von $H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)$) übergeht.

2.7. SATZ. *Gegeben sei ein Cohomologie-Automorphismus λ für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_q$. Zu λ gehört eine Potenzreihe* (s. 1.6., (16), (17)). *Mit Hilfe von λ definiert man für Vektorraum-Bündel den multiplikativen Funktor $\mu = \underline{\lambda}$, der nach (7') bzw. (8') mit Hilfe einer Potenzreihe berechnet werden kann. Es ist*

(9) $Q(\mu, x) = \lambda(x)/x$ *für* $q = 2$ *und* $Q(\mu, x^2) = \lambda(x)/x$ *für* q ungerade.

BEWEIS FÜR UNGERADES q. Die Gleichung (6) ist für ein orientiertes ξ mit Faser $\boldsymbol{R}^2$ nachzuweisen. Nun ist $\Phi^{-1}(U \cup U)$ die Eulersche Klasse $e \in H^2(B_\xi)$. Wir betrachten die Injektion $i: E \to (E, E_0)$ (s. 2.2). Dann ist $i^* U = \pi^* e$ (s. [*15*, Chap. VIII, Theorem 12]) und deshalb

(10) $$\Phi(e^{k-1}) = U^k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Da U Reduktion einer 2-dimensionalen ganzzahligen Klasse ist, wird $\lambda(U)$ durch die Potenzreihe $\lambda(x)$ gegeben, indem man x durch U ersetzt. Also entsteht wegen (10) das Element $\underline{\lambda}(\xi) = \Phi^{-1}\lambda(U)$ aus der Potenzreihe $\lambda(x)/x$, indem man x durch e ersetzt. Da $e^2 = p_1(\xi)$, ist der Beweis beendet. (Für $q = 2$ schließt man ähnlich. Man hat dann Bündel mit Faser $\boldsymbol{R}^1$ zu betrachten. Es gilt wieder eine Gleichung (10) mit $e = w_1(\xi)$.)

2.8. Es sei μ ein multiplikativer Funktor (2.3) und λ ein Cohomologie-Automorphismus. Ordnet man dann jedem Vektorraum-Bündel ξ das Element $\lambda(\mu(\xi)) \in H^{**}(B_\xi)$ zu, dann erhält man den multiplikativen Funktor $\lambda \circ \mu$, der wiederum mit Hilfe einer Potenzreihe berechnet werden kann (2.6.). Es folgt

(11) $$Q(\lambda \circ \mu, x) = Q(\mu, \lambda(x)) \quad \text{für } q = 2$$

und

(11') $$Q(\lambda \circ \mu, x^2) = Q(\mu, \lambda(x)) \quad \text{für ungerades } q.$$

Diese Formeln sind für das Folgende wichtig, wenn μ durch $\underline{\lambda}$ und λ durch λ^{-1} ersetzt wird. Den multiplikativen Funktor $\lambda^{-1} \circ \underline{\lambda}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Wu}(\lambda)$, siehe 2.11 Es gilt dann nach (9), (11) und (11')

(12) $$Q(\lambda^{-1} \circ \underline{\lambda}, x) = x/\lambda^{-1}(x) \quad \text{für } q = 2$$

und

(12') $$Q(\lambda^{-1} \circ \underline{\lambda}, x^2) = x/\lambda^{-1}(x) \quad \text{für ungerades } q.$$

2.9. Es besteht ein Zusammenhang zwischen dem Satz von Riemann-Roch (Toddschen Polynomen) und Cohomologie-Operationen [*10*], den wir in dieser Arbeit genauer untersuchen wollen (vgl. Einleitung). Für diesen Zweck ist

das Verhalten der für die multiplikative Folge der Toddschen Polynome charakteristischen Potenzreihe $x/(1-e^{-x})$ modulo einer Primzahl q von Bedeutung.

LEMMA. *Ersetzt man in der Potenzreihe* $x/(1-e^{-x})$ *die Unbestimmte* x *durch* $f\cdot x$ *mit* $f=q^{1/(q-1)}$ *(q Primzahl), so erhält man eine Potenzreihe in* x, *deren Koeffizienten von der Gestalt* $f^m\cdot r$ *sind, wo* m *ganz und nicht negativ und* r *eine rationale Zahl ist, deren Zähler und Nenner zu* q *teilerfremd sind. Die Reduktion von* $f^m\cdot r$ modulo q *ist per definitionem ein Element von* $\mathbf{Z}_q$, *das verschwindet, wenn* $m>0$. *Also ist die Reduktion* modulo q *der Potenzreihe* $fx/(1-e^{-fx})$ *wohldefiniert. Es gilt mit* $f=q^{1/(q-1)}$

$$(13)\qquad fx/(1-e^{-fx}) \equiv 1+(x-x^q+x^{q^2}-\cdots+(-1)^j x^{q^j}+\cdots)^{q-1} \mod q.$$

BEWEIS. Der Exponent von q in $k!$ ist kleiner oder gleich $\frac{k-1}{q-1}$ (vgl. z.B. [23, p. 99]). Er ist gleich diesem Quotienten dann und nur dann, wenn k eine Potenz von q ist. Wegen des Wilsonschen Satzes ist

$$(q^j)!/q^e \equiv (-1)^e \equiv (-1)^j \mod q, \quad \text{wobei } e=(q^j-1)/(q-1).$$

Daraus folgt

$$(14)\qquad (1-e^{-fx})/fx \equiv \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^{q^j-1} \text{ modulo } q.$$

Bezeichnen wir die rechte Seite von (14) mit $G(x)$, dann bleibt zum Beweis von (13) nur zu zeigen, daß in $\mathbf{Z}_q[[x]]$

$$1/G(x) = 1+\big(x\cdot G(x)\big)^{q-1} \quad \text{oder} \quad x = x\cdot G(x)+\big(x\cdot G(x)\big)^q.$$

Dies ist aber richtig, wegen $(a+b)^q=a^q+b^q$ modulo q.

Für eine *ungerade* Primzahl q betrachteten wir weitere Potenzreihen, die im Sinne des Lemmas nach q reduzierbar sind. Es gilt

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{fx}{\operatorname{tgh} fx} \equiv \dfrac{(fx)/2}{\sinh{(fx)/2}} \equiv fx/(1-e^{-fx}) \text{ modulo } q \\ \qquad (q \text{ ungerade Primzahl, } f=q^{1/(q-1)}). \end{cases}$$

Diese Kongruenzen folgen aus den Gleichungen

$$x+\frac{x}{\operatorname{tgh} x} = e^x\cdot\frac{x}{\sinh x} = 2x/(1-e^{-2x})$$

unter Berücksichtigung von (13) und der Kongruenzen

$$fx \equiv 0 \mod q, \qquad e^{fx} \equiv 1 \mod q, \qquad 2^{q^j-1} \equiv 1 \mod q.$$

2.10. LEMMA. *Es sei* $\{K_j(c_1,\ldots,c_j)\}$ *die multiplikative Folge von Polynomen in den Unbestimmten* c_i *mit Koeffizienten in* $\mathbf{Z}_q$ *und der charakteristischen Potenzreihe* $Q(x)\in\mathbf{Z}_q[[x]]$, *(q beliebige Primzahl). Es sei* a *eine Potenz von* q. *Setzt man in* K_{ja} *die Unbestimmte* c_i *gleich* 0, *wenn* i *nicht durch* a *teilbar ist, dann erhält man ein Polynom* $K'_j(c_a, c_{2a},\ldots,c_{ja})$. *Es ist*

$$K'_j(c_a,c_{2a},\ldots,c_{ja}) = K_j(c_a,c_{2a},\ldots,c_{ja}).$$

BEWEIS. Wir setzen $c_i' = c_{ia}$. Dann ist $\{K_i'\}$ die multiplikative Folge von Polynomen, die zur Potenzreihe $Q'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j'(1, 0, \ldots, 0)\, x^j$ gehört. Es ist [*11*, §1.2]

$$Q'(x^a) = K(1 + x^a) = K\big((1+x)^a\big) = \big(K(1+x)\big)^a = \big(Q(x)\big)^a = Q(x^a).$$

Also ist $Q'(x) = Q(x)$, was zu beweisen war.

2.11. Für einen Cohomologie-Automorphismus λ haben wir den multiplikativen Funktor $\lambda^{-1} \circ \underline{\lambda}$ mit $\mathrm{Wu}(\lambda)$ bezeichnet, da er, wie sich in §3 herausstellen wird, in speziellen Fällen von WU WEN-TSUN betrachtet wurde. Für ein Vektorraum-Bündel ξ schreiben wir statt $\mathrm{Wu}(\lambda)(\xi)$ auch $\mathrm{Wu}(\lambda, \xi)$. Wenn ξ das Tangentialbündel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist, dann setzen wir $\mathrm{Wu}(\lambda, M) = \mathrm{Wu}(\lambda, \xi)$. Wir untersuchen nun zunächst im Falle der Charakteristik $q = 2$ den multiplikativen Funktor $\mathrm{Wu}(Sq)$ (vgl. 1.1) und seinen Zusammenhang mit den Toddschen Polynomen $T_i(c_1, \ldots, c_i)$, vgl. [*11*, §1]. Nach Lemma 2.9 ist $2^i T_i(c_1, \ldots, c_i)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten, deren Nenner den Faktor 2 nicht enthalten. Deshalb definiert $2^i T_i$ bei Reduktion mod 2 ein Polynom mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_2$.

SATZ. *Für ein Vektorraum-Bündel ξ gilt*

$$\mathrm{Wu}(Sq, \xi) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i T_i\big(w_1(\xi), \ldots, w_i(\xi)\big) \bmod 2. \tag{16}$$

Wenn die Stiefel-Whitneyschen Klassen $w_{2j+1}(\xi)$ verschwinden, dann ist

$$\mathrm{Wu}(Sq, \xi) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i T_i\big(w_2(\xi), \ldots, w_{2i}(\xi)\big) \bmod 2. \tag{17}$$

Wenn das Vektorraum-Bündel ξ eine schwache komplexe Struktur zuläßt [*5*, Part III, §2], *dann sind seine Chernschen Klassen $c_i(\xi) \in H^{2i}(B_\xi; \boldsymbol{Z})$ definiert, und es gilt*

$$\mathrm{Wu}(Sq, \xi) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i T_i\big(c_1(\xi), \ldots, c_i(\xi)\big) \bmod 2. \tag{18}$$

BEWEIS. (17) ist wegen Lemma 2.10 (mit $q = a = 2$) eine Folgerung aus (16). Für ein Vektorraum-Bündel ξ mit schwaeher komplexer Struktur verschwinden die $w_{2j+1}(\xi)$ und außerdem ist $c_i(\xi) = w_{2i}(\xi) \bmod 2$. Deshalb ist (18) ein Korollar von (17). Zum Beweis von (16) ist wegen (12) und Lemma 2.9 nur zu zeigen, daß in $\boldsymbol{Z}_2[[x]]$ die Gleichung gilt

$$x / Sq^{-1} x = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} x^{2^j}, \tag{19}$$

wo x als das von 0 verschiedene Element von $H^1\big(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{R}); \boldsymbol{Z}_2\big)$ gedeutet werden kann. Wegen $Sq\, x = x + x^2$ ist

$$x = Sq^{-1} x + (Sq^{-1} x)^2.$$

Macht man für $Sq^{-1}x$ den Ansatz von 1.6 (17), dann folgt aus vorstehender Gleichung, daß

$$Sq^{-1}x = x + x^2 + \cdots + x^{2^j} + \cdots$$

und damit (19).

Wir bemerken noch, daß die ungerade-dimensionalen Komponenten von $\mathrm{Wu}(Sq, \xi)$ verschwinden, wenn $w_1(\xi) = 0$, d.h. wenn ξ orientierbar ist. Das liegt daran, daß das Polynom $T_{2j+1}(c_1, \ldots, c_{2j+1})$ durch c_1 teilbar ist [*11*, §1.7].

2.12. In Analogie zum vorhergehenden Abschnitt befassen wir uns nun für ungerade Charakteristik q mit dem für orientierte Vektorraum-Bündel definierten multiplikativen Funktor $\mathrm{Wu}(\mathscr{P})$. Wir betrachten die multiplikativen Folgen $\{L_j(p_1, \ldots, p_j)\}$ bzw. $\{\hat{A}_j(p_1, \ldots, p_j)\}$ mit den charakteristischen Potenzreihen $z^{\frac{1}{2}}/\mathrm{tgh}\, z^{\frac{1}{2}}$ bzw. $z^{\frac{1}{2}}/(2\sinh(z^{\frac{1}{2}}/2))$, vgl. [*11*, §1]. Das Polynom $\hat{A}_j$ steht zu dem in [*11*, §1.6] definierten Polynom A_j in der Beziehung $A_j = 2^{4j}\hat{A}_j$. Nach Lemma 2.9 und (15) sind $f^{2j}L_j$ und $f^{2j}\hat{A}_j$ (für $f = q^{1/(q-1)}$) Polynome, deren Koeffizienten die Gestalt $f^m \cdot r$ haben (m ganz und nicht negativ; r eine rationale Zahl, deren Zähler und Nenner zu q teilerfremd sind). Die Polynome $f^{2j}L_j$ und $f^{2j}\hat{A}_j$ verschwinden modulo q, wenn $2j$ nicht durch $q-1$ teilbar ist. $q^{[2j/(q-1)]}L_j$ und $q^{[2j/(q-1)]}\hat{A}_j$ sind Polynome mit rationalen Koeffizienten, die ganz sind bezüglich q (d.h. q nicht im Nenner enthalten). Wenn $2j \equiv 0 \bmod q-1$, dann gilt

$$q^{2j/(q-1)}L_j \equiv q^{2j/(q-1)}\hat{A}_j \equiv q^{2j/(q-1)}A_j \bmod q.$$

Satz. *Es sei q eine ungerade Primzahl und $\mathscr{P}$ der Steenrodsche Cohomologie-Automorphismus* (vgl. 1.1) *für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_q$. Es sei $f = q^{1/(q-1)}$. Für ein orientiertes Vektorraum-Bündel ξ gilt*

$$\text{(20)} \qquad \begin{cases} \mathrm{Wu}(\mathscr{P}, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{2j} L_j\big(p_1(\xi), \ldots, p_j(\xi)\big) \\ \qquad\qquad = \sum_{j=0}^{\infty} f^{2j} \hat{A}_j\big(p_1(\xi), \ldots, p_j(\xi)\big) \text{ modulo } q. \end{cases}$$

Die s-dimensionale Komponente von $\mathrm{Wu}(\mathscr{P}, \xi)$ *verschwindet, wenn s nicht durch $2(q-1)$ teilbar ist.*

Beweis. Zum Beweis von (20) ist wegen Lemma 2.9, (12′) und (15) nur zu zeigen, daß in $\mathbf{Z}_q[[x]]$ die Gleichung gilt

$$\text{(21)} \qquad x/\mathscr{P}^{-1}x = 1 + (x - x^q + x^{q^2} - \cdots + (-1)^j x^{q^j} + \cdots)^{q-1},$$

wo x als ein von 0 verschiedenes Element von $H^2(\mathbf{P}_\infty(\boldsymbol{C}); \mathbf{Z}_q)$ gedeutet werden kann. Nun ist $\mathscr{P}x = x + x^q$ und deshalb

$$x = \mathscr{P}^{-1}x + (\mathscr{P}^{-1}x)^q.$$

Macht man für $\mathscr{P}^{-1}x$ den Ansatz von 1.6 (16), dann folgt aus vorstehender Gleichung sofort, daß

$$\mathscr{P}^{-1}x = x - x^q + x^{q^2} + \cdots (-1)^j x^{q^j} + \cdots \tag{21'}$$

und damit (21).

2.13. Es sei q eine beliebige Primzahl und $f = q^{1/(q-1)}$. Nach Lemma 2.9 ist $f^j T_j(c_1, \ldots, c_j)$ ein Polynom, dessen Koeffizienten die Gestalt $f^m \cdot r$ haben (m ganz und nicht negativ; r eine rationale Zahl, deren Zähler und Nenner zu q teilerfremd sind). $f^j T_j$ verschwindet modulo q, wenn j nicht durch $q-1$ teilbar ist. $q^{[j/(q-1)]} T_j$ ist ein Polynom mit rationalen Koeffizienten, die ganz sind bezüglich q. Faßt man $p_1, p_2, p_3, \ldots$ in bekannter Weise als Polynom in den Unbestimmten $c_1, c_2, \ldots$ auf [*11*, §1.3], dann gilt für eine *ungerade* Primzahl q

$$\sum_{j=0}^{\infty} f^j T_j(c_1, \ldots, c_j) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{2j} \hat{A}_j(p_1, \ldots, p_j) \text{ modulo } q. \tag{22}$$

Dies folgt unmittelbar aus der zweiten Kongruenz von (15), vgl. auch [*11*, §1.7 (12)]. Aus (20) und (22) ergibt sich:

SATZ. *Wenn das Vektorraum-Bündel ξ eine schwache komplexe Struktur zuläßt* [*5*, Part III, §2] *und $c_i(\xi) \in H^{2i}(B_\xi; \mathbf{Z})$ die Chernschen Klassen sind, dann gilt für eine ungerade Primzahl q*

$$\mathrm{Wu}(\mathscr{P}, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} f^j \cdot T_j\big(c_1(\xi), \ldots, c_j(\xi)\big) \text{ modulo } q. \tag{23}$$

2.14. Bemerkung. Für ein Vektorraum-Bündel ξ (vgl. 2.2) und einen Cohomologie-Automorphismus λ kann man leicht nachweisen, daß $\underline{\lambda}(\xi) \in H^{**}(B_\xi)$ eine Invariante des stabilen Faser-Homotopie-Typs von ξ ist (vgl. z. B. M. F. ATIYAH, Thom complexes [Proc. Lond. Math. Soc. (3) **11**, 291–310 (1961)]). Für $q = 2$ erhält man mit Hilfe von $\lambda = Sq$, daß die totale Stiefel-Whitneysche Klasse $w(\xi)$ Invariante des stabilen Faser-Homotopie-Typs von ξ ist. Für q ungerade erhält man mit Hilfe von $\lambda = \mathscr{P}$, daß bei Anschreibung von $p(\xi)$ in der Form 2.6 (8) *die elementar-symmetrischen Funktionen in den x_j^{q-1} Invarianten des stabilen Faser-Homotopie-Typs von ξ sind (in der Cohomologie mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_q$)*. Durch Verwendung eines allgemeinen λ kommt man über dieses Resultat nicht hinaus, da $\lambda(x)/x$ eine Potenzreihe in x^{q-1} ist. Auch die Anwendung irgendwelcher stabiler Cohomologie-Operationen auf die besprochenen Invarianten liefert nur Polynome in diesen Invarianten.

2.15. LEMMA. *Wie in 2.2 sei ξ ein reelles Vektorraum-Bündel. λ sei ein Cohomologie-Automorphismus. Für $z \in H^{**}(B_\xi)$ gilt*

$$\Phi\big(\lambda(z) \cup \underline{\lambda}(\xi)\big) = \lambda\, \Phi(z). \tag{24}$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \Phi\big(\lambda(z) \cup \underline{\lambda}(\xi)\big) &= \pi^{**}\lambda(z) \cup \pi^{**}\underline{\lambda}(\xi) \cup U \\ &= \lambda\, \pi^{**}(z) \cup \lambda\, U = \lambda(\pi^{**} z \cup U) = \lambda\, \Phi(z). \end{aligned}$$

Bei dieser Rechnung wurde 1.3 (iii) benutzt.

Wenn ξ ein triviales Bündel ist, dann ist $\underline{\lambda}(\xi)=1$ und λ und Φ sind in diesem Spezialfall vertauschbar. Dies entspricht der Vertauschbarkeit von λ mit E (vgl. 1.3). Im allgemeinen sind λ und Φ nicht vertauschbar. Man hat den „Multiplikator" $\underline{\lambda}(\xi)$, der im nächsten Paragraphen eine wesentliche Rolle spielen wird.

Das Lemma gilt natürlich auch für komplexe Vektorraum-Bündel. Man fasse diese einfach als reelle Bündel auf.

§ 3. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

3.1. Ein Cohomologie-Automorphismus $\lambda: H^{**}(X; \mathbf{Z}_q) \to H^{**}(X; \mathbf{Z}_q)$ kann nach 1.3 angesehen werden als eine natürliche Transformation der singulären Cohomologie-Theorie mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_q$ in sich. λ respektiert die multiplikative Struktur. Die Graduierung wird jedoch vernachlässigt. Die Primzahl q ist im folgenden immer festgewählt. Deshalb wird wieder das Symbol $\mathbf{Z}_q$ bei der Anschreibung der Cohomologie-Gruppen weggelassen. Alle Mannigfaltigkeiten werden als kompakt und differenzierbar vorausgesetzt. Für ungerades q wird überdies angenommen, daß sie orientiert sind.

Es sei X eine Mannigfaltigkeit. Dann hat man den kanonischen Poincaréschen Isomorphismus

$$D_X: H^*(X) \to H_*(X), \tag{1}$$

zu dessen Definition man für ungerades q die Orientierung von X benötigt. Wenn n die Dimension von X ist, dann ist D_X folgendermaßen definiert:

$$D_X(a) = a \cap h, \tag{2}$$

wo $h \in H_n(X)$ für ungerades q durch die Orientierung von X bestimmt ist. Für $q=2$ ist h direkte Summe der h_i, wo h_i das von 0 verschiedene Element von $H^n(X_i)$ ist und X_i die endlich vielen Zusammenhangskomponenten von X durchläuft. Für eine stetige Abbildung $f: Y \to X$ von Mannigfaltigkeiten hat man den Gysinschen Homomorphismus

$$f_*: H^*(Y) \to H^*(X), \qquad f_* = D_X^{-1} \circ f_\# \circ D_Y, \tag{3}$$

wo $f_\#: H_*(Y) \to H_*(X)$ der durch f induzierte Homomorphismus der Homologiegruppen ist. Für $f: Y \to X$ sind also die beiden Homomorphismen

$$f^*: H^*(X) \to H^*(Y), \qquad f_*: H^*(Y) \to H^*(X), \tag{4}$$

definiert. f^* ist ein Ring-Homomorphismus, f_* ein additiver Homomorphismus. Sie genügen folgender Beziehung

$$f_*(f^* x \cup y) = x \cup f_*(y), \qquad x \in H^*(X), \qquad y \in H^*(Y). \tag{5}$$

Faßt man $H^*(X)$ und $H^*(Y)$ (vermöge f^*) als $H^*(X)$-Moduln auf, dann besagt (5), daß f_* ein Homomorphismus von $H^*(X)$-Moduln ist. (5) folgt mit Hilfe von (2) aus der analogen Eigenschaft von $f_\#$: Man beachte, daß $H_*(X)$ und $H_*(Y)$ beide wegen des cap-Produkts $H^*(X)$-Moduln sind. (Für $H_*(Y)$ benutzt man f^*.)

Der Cohomologie-Automorphismus λ ist mit f^* vertauschbar, jedoch im allgemeinen nicht mit f_*. Es gilt aber folgender Satz.

3.2. Satz. *Es sei λ ein Cohomologie-Automorphismus. Für Mannigfaltigkeiten X ist dann das Element* $\mathrm{Wu}(\lambda^{-1}, X) \in H^*(X)$ *wohldefiniert* (2.11). *Es sei $f: Y \to X$ eine stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Dann ist*

$$f_*(\lambda y \cdot \mathrm{Wu}(\lambda^{-1}, Y)) = \lambda f_* y \cdot \mathrm{Wu}(\lambda^{-1}, X) \quad \text{für } y \in H^*(Y). \tag{6}$$

3.3. Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, sei auf seine Ähnlichkeit mit dem differenzierbaren Riemann-Rochschen Satz hingewiesen [3]. An Stelle von λ hat man dort den Chernschen Charakter, der eine natürliche Transformation des Funktors $K^*(X)$ in $H^{**}(X; \boldsymbol{Q})$ liefert [4]. Man hat für eine stetige Abbildung $f: Y \to X$ von orientierten Mannigfaltigkeiten den Homomorphismus $f_*: H^*(Y; \boldsymbol{Q}) \to H^*(X; \boldsymbol{Q})$ und unter besonderen Voraussetzungen den recht schwierig zu definierenden Homomorphismus $f_!: K^*(Y) \to K^*(X)$. Immer wenn man eine natürliche Transformation von einer „Cohomologie-Theorie" (eventuell ohne Dimensionsaxiom) in eine andere hat, kann man nach einem Riemann-Rochschen Satz vom Typ 3.2 fragen. Beide Theorien sollten ein Analogon zur Poincaréschen Dualität erfüllen, damit in beiden Cohomologie-Theorien für stetige Abbildungen von Mannigfaltigkeiten die kovarianten Homomorphismen vorhanden sind, um deren Verträglichkeit (bzw. gerade Nicht-Verträglichkeit) mit der gegebenen natürlichen Transformation es sich ja handelt. Vielleicht werden wir an anderer Stelle auf dieses allgemeine Prinzip eingehen, das uns durch den Satz von Riemann-Roch im Sinne von Grothendieck [6] nahegelegt wurde. Der Satz 3.2 stellt jedenfalls das einfachste Beispiel für Sätze dieses Typs dar, weil es sich um die gewöhnliche Cohomologie-Theorie und eine natürliche Transformation dieser Theorie in sich handelt.

3.4. Beweis von Satz 3.2. Das tangentielle Vektorraum-Bündel von X bzw. Y werde mit ξ bzw. η bezeichnet. Für $f: Y \to X$ betrachten wir das Element $\eta - f^*\xi \in K\boldsymbol{O}(Y)$ (s. 2.6), bezeichnen es mit tf oder $t(f)$ und nennen es das Tangentialbündel von f. Wenn f die Abbildung von Y auf einen Punkt $X = \{x_0\}$ ist, dann ist das Tangentialbündel von f gleich dem Tangentialbündel von Y (aufgefaßt als Element von $K\boldsymbol{O}(Y)$). $\mathrm{Wu}(\lambda^{-1})$ ist ein multiplikativer Funktor im Sinne von 2.3, den wir für die Dauer des Beweises mit μ bezeichnen wollen. Die zu beweisende Gleichung (6) kann wegen (5) auch so geschrieben werden:

$$f_*(\lambda y \cdot \mu(tf)) = \lambda f_* y, \quad y \in H^*(Y). \tag{7}$$

Es gilt nämlich

$$f_*(\lambda y \cdot \mu(\eta)) \cdot \mu(\xi)^{-1} = f_*(\lambda y \cdot \mu(\eta) \cdot \mu(f^*\xi)^{-1}) = f_*(\lambda y \cdot \mu(tf)).$$

Für Abbildungen $g: Z \to Y$, $f: Y \to X$ von Mannigfaltigkeiten Z, Y, X, deren Tangentialbündel mit ζ, η, ξ bezeichnet werden sollen, ist

$$t(f \circ g) = \zeta - (f \circ g)^*\xi = g^*(\eta - f^*\xi) + \zeta - g^*(\eta) = g^* t(f) + t(g). \tag{8}$$

LEMMA. *Wenn (7) für f und g richtig ist, dann auch für $f \circ g$.*

BEWEIS. Es sei $z \in H^*(Z)$. Dann gilt nach (8)

$$(f \circ g)_* (\lambda z \cdot \mu(t(f \circ g))) = f_* g_* (\lambda z \cdot g^* \mu(t f) \cdot \mu(t g)).$$

Aus (5) und der Gleichung (7) für g folgt

$$f_* g_* (\lambda z \cdot g^* \mu(t f) \cdot \mu(t g)) = f_* (g_* (\lambda z \cdot \mu(t g)) \cdot \mu(t f)) = f_* (\lambda g_* z \cdot \mu(t f)).$$

Gleichung (7) für f ergibt: $f_* (\lambda g_* z \cdot \mu(t f)) = \lambda f_* g_* z = \lambda (f \circ g)_* z$ und damit

$$(f \circ g)_* (\lambda z \cdot \mu(t(f \circ g))) = \lambda (f \circ g)_* z, \qquad \text{d.h. (7) für } f \circ g.$$

Als nächstes bemerken wir, daß es genügt (7) für differenzierbare Abbildungen zu beweisen, da jede stetige Abbildung $f: Y \to X$ einer differenzierbaren homotop ist. Jede differenzierbare Abbildung $f: Y \to X$ läßt sich in eine differenzierbare Einbettung und eine Projektion mit einer Sphäre als Faser aufspalten: Es sei i eine Einbettung von Y in eine Sphäre $\boldsymbol{S}^m$ geeigneter Dimension m. Dann ist (f, i) eine Einbettung j von Y in $X \times \boldsymbol{S}^m$:

$$j = (f, i) : Y \to X \times \boldsymbol{S}^m, \qquad j(y) = (f(y), i(y)).$$

π_1 sei die Projektion von $X \times \boldsymbol{S}^m$ auf X, dann ist $f = \pi_1 \circ j$. Wegen des Lemmas braucht (7) nur für Einbettungen und für die Projektion $\pi_1: X \times \boldsymbol{S}^m \to X$ bewiesen zu werden. Wir untersuchen zunächst den Fall der Projektion. Es sei π_2 die Projektion von $X \times \boldsymbol{S}^m \to \boldsymbol{S}^m$, ferner σ das Tangentialbündel von $\boldsymbol{S}^m$ und ξ das von X. Es ist

$$t(\pi_1) = \pi_1^* \xi + \pi_2^* \sigma - \pi_1^* \xi = \pi_2^* \sigma. \tag{9}$$

Nun repräsentiert σ in $K\boldsymbol{O}(\boldsymbol{S}^m)$ das Element $m \cdot 1$. Deshalb ist $\mu(\sigma) = 1$ und ebenfalls $\mu(t(\pi_1)) = 1$. Also besagt (7) für $f = \pi_1$

$$(\pi_1)_* \lambda y = \lambda (\pi_1)_* y, \qquad y \in H^*(X \times \boldsymbol{S}^m). \tag{10}$$

Es sei g das zur Orientierung von $\boldsymbol{S}^m$ gehörige erzeugende Element von $H^m(\boldsymbol{S}^m)$. Jedes Element y von $H^*(X \times \boldsymbol{S}^m)$ läßt sich dann auf eine und nur eine Weise in der Form $\pi_1^* a + (\pi_1^* b) \cdot (\pi_2^* g)$ schreiben $(a, b \in H^*(X))$ und es ist $(\pi_1)_* y = b$. Da $\lambda y = \pi_1^* \lambda a + (\pi_1^* \lambda b)(\pi_2^* g)$ wegen $\lambda g = g$, folgt sofort (10). — Wir kommen nun zum Beweis von (7) für den Fall einer Einbettung. Y sei also eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von X und $f: Y \to X$ die Injektion. Es sei ν das Normalbündel von Y in X, dann gilt in $K\boldsymbol{O}(Y)$

$$t(f) = -\nu. \tag{11}$$

Es sei E der Totalraum des Vektorraum-Bündels ν. Mit Hilfe einer schlauchartigen Umgebung von Y in X (tubular neighborhood), die zu einer Umgebung des Nullschnittes von ν in E homöomorph ist, konstruiert man durch geeignete Ausschneidung einen Isomorphismus

$$\varepsilon: H^*(E, E_0) \to H^*(X, X - Y).$$

Ferner hat man den kanonischen Homomorphismus

$$\varrho : H^*(X, X - Y) \to H^*(X).$$

In 2.2 wurde der Homomorphismus Φ betrachtet:

$$\Phi : H^*(Y) \to H^*(E, E_0),$$

der im Falle ungerader Charakteristik erst definiert ist, nachdem man dem Normalbündel eine Orientierung gegeben hat. Man kann bekanntlich ν so orientieren, daß

$$f_* = \varrho \circ \varepsilon \circ \Phi. \tag{12}$$

Da der Cohomologie-Automorphismus λ mit ϱ und ε vertauschbar ist, ergibt sich

$$\lambda f_* y = \varrho\, \varepsilon\, \lambda\, \Phi\, y, \qquad y \in H^*(Y). \tag{13}$$

Aus 2.15 folgt nun unter Verwendung von (11) und (12), daß

$$\lambda f_* y = \varrho\, \varepsilon\, \Phi(\lambda y \cdot \underline{\lambda} \nu) = f_*\big(\lambda y \cdot (\underline{\lambda}(t f))^{-1}\big). \tag{14}$$

Bisher wurde im Beweis nicht verwendet, daß μ in (7) gleich $\mathrm{Wu}(\lambda^{-1})$. Damit (14) in (7) übergeht, muß dies jetzt verwendet werden. Nun ist aber $\mathrm{Wu}(\lambda^{-1})$ der multiplikative Funktor, welcher jedem Vektorraum-Bündel ξ die Cohomologie-Klasse $(\underline{\lambda}\xi)^{-1}$ zuordnet, da $(\lambda x/x)^{-1} = x/(\lambda^{-1})^{-1} x$ (vgl. 2.7 (9) und 2.8 (12), (12')).

Der Beweis des Satzes 3.2 verlief analog zum Beweis des differenzierbaren Riemann-Rochschen Satzes [*13*].

3.5. Wir wollen Satz 3.2 jetzt auf den Fall anwenden, daß X der einpunktige Raum $X = \{x_0\}$ und f die konstante Abbildung ist. In diesem Fall ist natürlich $\mathrm{Wu}(\lambda^{-1}, X) = 1$. Da λ auf der Cohomologie des Punktes die Identität ist, geht die rechte Seite von (6) in $f_* y$ über. Für jedes $y \in H^*(Y)$ ist aber

$$f_* y = y[Y] \cdot 1, \qquad 1 \in H^0(X), \tag{15}$$

wo $y[Y]$ den Wert von y auf dem (eventuell orientierten) Grundzyklus von Y andeutet. Dabei nehmen alle Komponenten von y, deren Dimension nicht gleich der von Y ist, den Wert 0 an. Satz 3.2 geht also in dem von uns betrachteten Spezialfall über in

$$\big(\lambda y \cdot \mathrm{Wu}(\lambda^{-1}, Y)\big)[Y] = y[Y]. \tag{16}$$

Ersetzt man in (16) zunächst λ durch λ^{-1} und dann y durch λy, dann folgt

$$(\lambda y)[Y] = \big(y \cdot \mathrm{Wu}(\lambda, Y)\big)[Y], \qquad y \in H^*(Y). \tag{17}$$

Die Formel (17) motiviert, warum wir den multiplikativen Funktor $\lambda^{-1} \circ \underline{\lambda}$ mit $\mathrm{Wu}(\lambda)$ bezeichnet haben (2.11). Die Formel (17) stammt nämlich für $\lambda = Sq$ oder $\lambda = \mathscr{P}$ von Wu Wen-Tsun [*25*, *26*], der sie allerdings mit der Diagonalmethode bewiesen hat, auf die auch Adams [*1*] zurückgreift und auf

die ebenfalls in [10] Bezug genommen wurde, während wir die differenzierbare Einbettung von Y in eine Sphäre und das entsprechende Normalbündel benutzt haben. Die Cohomologie-Klasse $\mathrm{Wu}(\lambda, Y)$ läßt sich mit Hilfe der Stiefel-Whitneyschen bzw. der Pontrjaginschen Klassen von Y ausdrücken (Satz 2.6 und 2.8 (12), (12')). Für $\lambda = Sq$ oder $\lambda = \mathscr{P}$ steht $\mathrm{Wu}(\lambda, Y)$ in enger Beziehung zu den Toddschen Polynomen $T_i(w_1(Y), \ldots, w_i(Y))$ bzw. den L-Polynomen $L_j(p_1(Y), \ldots, p_j(Y))$. Die Einzelheiten sind aus den Sätzen 2.11, 2.12, 2.13 zu entnehmen. Die in [10] ohne ausführlichen Beweis angegebenen Theoreme 2.1 bis 2.4 sind also in der vorliegenden Arbeit vollständig bewiesen.

3.6. Aus (17) folgen Relationen zwischen den Stiefel-Whitneyschen bzw. den Pontrjaginschen Zahlen einer Mannigfaltigkeit, wenn man für λ beliebige Cohomologie-Automorphismen einsetzt und y Polynome in den Stiefel-Whitneyschen bzw. den Pontrjaginschen Klassen der Mannigfaltigkeit durchläuft. In §5 werden wir sehen, daß sich diese Relationen bereits erhalten lassen, wenn man (17) nur für $\lambda = Sq$ bzw. $\lambda = \mathscr{P}$ anwendet. Für die praktische Rechnung ist es jedoch bequemer, beliebige Cohomologie-Automorphismen heranzuziehen. Setzt man in (17) für y das Einselement von $H^*(Y)$, dann ergibt sich

Satz. *Es sei λ ein Cohomologie-Automorphismus für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_q$ (q beliebige Primzahl). Dann gilt für eine kompakte differenzierbare positiv-dimensionale Mannigfaltigkeit Y, die für ungerades q unseren Verabredungen gemäß als orientiert vorausgesetzt wird,*

$$\mathrm{Wu}(\lambda, Y)\,[Y] = 0. \tag{18}$$

Für eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit M der Dimension $4k$ spielt in der Cobordisme-Theorie die ganze Zahl $s(M)$ eine Rolle (vgl. z. B. [11, §6.3]). Schreibt man die *ganzzahligen* Pontrjaginschen Klassen $p_i(M)$ formal in der Gestalt 2.6 (8), dann ist

$$s(M) = \Big(\sum_{j=1}^{N} x_j^{2k}\Big)\,[M].$$

Wir geben nun einen direkten Beweis für einen Satz von Milnor [17], den Milnor auf dem Wege über Untersuchungen der Cobordisme-Algebra erhalten hat.

Satz. *Es sei M eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $4k$. Wenn $2k+1$ eine Potenz der Primzahl q ist, dann ist $s(M)$ durch q teilbar.*

Beweis. Wir setzen für den Moment $a = 2k+1$. Die Zahl a ist eine Potenz der ungeraden Primzahl q. Nach Satz 1.8 gibt es einen Cohomologie-Automorphismus λ für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_q$, für den $\lambda^{-1}x = x - x^a$. Dann ist

$$x/\lambda^{-1}x = 1 + x^{a-1} + \cdots + x^{j(a-1)} + \cdots.$$

Schreibt man nun in der Cohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_q$ die Pontrjaginsche Klasse formal in der Gestalt 2.6 (8), dann gilt (2.8 (12'))

$$\mathrm{Wu}(\lambda, M) = \prod_{j=1}^{N} x_j / \lambda^{-1} x_j .$$

Da $a-1 = 2k = \dim(M)/2$, ist $\mathrm{Wu}(\lambda, M)[M] = s(M) \bmod q$. Das beendet den Beweis wegen (18).

3.7. In [*11*, §1.7] wurde ohne Beweis folgendes Lemma angegeben.

LEMMA. *Das Toddsche Polynom kann in eindeutiger Weise als Polynom mit ganzzahligen teilerfremden Koeffizienten dividiert durch eine positive ganze Zahl $\mu(T_k)$ geschrieben werden. Man hat*

(19) $\mu(T_k) = \prod q^{[k/(q-1)]}$ (Produkt über alle Primzahlen q mit $2 \leqq q \leqq k+1$).

Wir tragen den Beweis hier nach. Abgesehen von der expliziten Formel (19) ist die Behauptung klar, da T_k für $c_i = \binom{k+1}{i}$ den Wert 1 annimmt. Man beweist zunächst, daß $\mu(T_{k+1})$ ein Vielfaches von $\mu(T_k)$ ist. Dazu betrachtet man den Ring $\boldsymbol{Q}[c_1, d_1, c_2, c_3, \ldots]$ modulo dem von d_1^2 und den Monomen in den c_i vom Gewichte größer als k erzeugten Ideal J. Definiert man c_i' durch

$$1 + c_1' x + c_2' x^2 + \cdots = (1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)(1 + 2 d_1 x),$$

dann ist wegen der Multiplikativität der Folge $\{T_j\}$ und wegen $T_1(c_1) = \frac{c_1}{2}$

$$T_{k+1}(c_1', \ldots, c_{k+1}') \equiv d_1 \cdot T_k(c_1, \ldots, c_k) \text{ modulo } J .$$

Daraus folgt in der Tat $\mu(T_{k+1}) \equiv 0 \bmod \mu(T_k)$. Nach den Bemerkungen über $f^j T_j$ zu Anfang von 2.13 genügt es zum Beweis von (19) zu zeigen, daß $f^j T_j \not\equiv 0 \bmod q$ für $j \equiv 0 \bmod q-1$. Es sei $j = r(q-1)$. Im komplexen projektiven Raum $\boldsymbol{P}_{rq}(\boldsymbol{C})$ mit $x \in H^2(\boldsymbol{P}_{rq}(\boldsymbol{C}); \mathbf{Z}_q)$ und $x \neq 0$ ist $\mathscr{P}(x^r) = x^r (1 + x^{q-1})^r$ und deshalb

$$\mathscr{P}(x^r)\,[\boldsymbol{P}_{qr}(\boldsymbol{C})] \neq 0 .$$

(Für $q = 2$ setze man $\mathscr{P} = Sq$). Also ist die $2r(q-1)$-dimensionale Komponente von $\mathrm{Wu}(\mathscr{P}, \boldsymbol{P}_{qr}(\boldsymbol{C}))$ nicht null (3.5 (17)) und deshalb ist $q^r T_{r(q-1)} \not\equiv 0 \bmod q$ (s. 2.13 (23) und 2.11 (18)). Ebenso beweist man entsprechende Aussagen über die Polynome L_k und A_k (s. [*11*, §1.5 und 1.6]).

3.8. Wir beschließen diesen Paragraphen mit Bemerkungen über kompakte nicht notwendigerweise differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Sei M eine solche Mannigfaltigkeit. λ sei ein Cohomologie-Automorphismus für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_2$. Wegen des Poincaréschen Dualitätssatzes gibt es dann genau ein Element u von $H^*(M)$, so daß

(20) $$(\lambda y)[M] = (y \cdot u)[M] \quad \text{für alle } y \in H^*(M).$$

Wir bezeichnen u mit $\mathrm{Wu}(\lambda, M)$. Wegen 3.5 (17) stimmt dies mit unseren für differenzierbare Mannigfaltigkeiten eingeführten Bezeichnungen überein.

FRAGE. *Gilt unter der oben angegebenen Definition von* $\mathrm{Wu}(\lambda, M)$ *der Satz* 3.2 *für stetige Abbildungen* $Y \to X$ *kompakter nicht notwendigerweise differenzierbarer Mannigfaltigkeiten?*

Für die Cohomologie mit Koeffizienten $\boldsymbol{Z}_q$ (q ungerade Primzahl) und für *orientierte* Mannigfaltigkeiten kann man ebenso die Klasse $\mathrm{Wu}(\lambda, M)$ einführen und die analoge Frage stellen.

Wir stellen noch fest, daß $\mathrm{Wu}(\lambda, M)$ per definitionem (20) eine Invariante des Homotopietyps von M ist, ebenso natürlich $\lambda\big(\mathrm{Wu}(\lambda, M)\big)$. Für differenzierbares X ist $\lambda\big(\mathrm{Wu}(\lambda, X)\big) = \underline{\lambda}(\xi)$, wo ξ das Tangentialbündel von X ist. Die Homotopieinvarianz von $\underline{\lambda}(\xi)$ (oder gleichwertig von $\mathrm{Wu}(\lambda, X)$) innerhalb der Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten folgt auch aus 2.14 und der Tatsache, daß homotopie-äquivalente differenzierbare Mannigfaltigkeiten Tangentialbündel haben, die vom gleichen stabilen Faser-Homotopie-Typ sind (M. F. ATIYAH, Thom complexes (loc. cit. in 2.14), Theorem 3.6).

Legen wir nochmals $\boldsymbol{Z}_2$ als Koeffizientenbereich zugrunde. Für eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit X ist $Sq\big(\mathrm{Wu}(Sq, X)\big)$ gleich der totalen Stiefel-Whitneyschen Klasse von X. Für eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit M kann die Stiefel-Whitneysche Klasse $w_i(M)$ durch die Gleichung

$$w(M) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(M) = Sq\big((\mathrm{Wu}(Sq, M)\big)$$

definiert werden. $w_i(M)$ ist eine Homotopieinvariante. Für eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit X ist $\mathrm{Wu}(\lambda, X)$ nach 2.8 ein gewisses Polynom in den $w_i(X)$. Es entsteht die Frage, ob sich $\mathrm{Wu}(\lambda, M)$ für eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit M durch das gleiche Polynom mittels der $w_i(M)$ ausdrücken läßt. Diese Frage wurde von ADAMS [1] bejaht.

Analoges gilt für ungerades q. Statt Sq wählt man $\mathscr{P}$, und an Stelle der Stiefel-Whitneyschen Klassen treten die elementar-symmetrischen Funktionen in den x_j^{q-1} (s. 2.14).

§ 4. Der Satz von Adams

4.1. Es sei X ein endlicher CW-Komplex, *dessen ganzzahlige Cohomologie keine Torsion habe.* $H^*(X; \boldsymbol{Z})$ läßt sich dann vermöge des Koeffizienten-Homomorphismus $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Q}$ als Unterring von $H^*(X; \boldsymbol{Q})$ auffassen. Ein Element von $H^*(X; \boldsymbol{Q})$ heißt ganz, wenn es zu $H^*(X; \boldsymbol{Z})$ gehört. Ein Element a von $H^*(X; \boldsymbol{Q})$ heißt ganz bezüglich der Primzahl q, wenn es eine ganze zu q teilerfremde Zahl m gibt, so daß ma ganz ist. Der Homomorphismus

$$\varrho_q : H^*(X; \boldsymbol{Z}) \to H^*(X; \boldsymbol{Z}_q)$$

sei induziert durch $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}_q$. Dieser Homomorphismus kann erweitert werden auf den Unterring der bezüglich q ganzen Elemente von $H^*(X; \boldsymbol{Q})$: Für $a \in H^*(X; \boldsymbol{Q})$, das ganz bezüglich q ist, definiert man $\varrho_q(a) \in H^*(X; \boldsymbol{Q})$ durch

die Gleichung

$$\varrho_q(a) = m^{-1} \cdot \varrho_q(m\,a), \qquad (m, q) = 1, \quad m\,a \text{ ganz.} \tag{1}$$

$\varrho_q(a)$ hängt nicht von der Wahl von m ab. (In (1) ist m^{-1} natürlich im Körper $\boldsymbol{Z}_q$ zu berechnen.)

Für X ist der Ring $K^*(X)$ definiert [4], der über $\boldsymbol{Z}_2$ graduiert ist:

$$K^*(X) = K^0(X) + K^1(X). \tag{2}$$

$K^0(X) = K(X)$ wird mit Hilfe der komplexen Vektorraum-Bündel mit der Basis X auf die Weise eingeführt, an die wir für reelle Vektorraum-Bündel in 2.6 erinnert hatten. Der Chernsche Charakter ist ein Ring-Homomorphismus

$$ch: K^*(X) \to H^*(X; \boldsymbol{Q}), \quad \text{s. [4].}$$

Wegen unserer Voraussetzung, daß X torsionsfrei ist, existiert zu jedem Element $a \in H^n(X; \boldsymbol{Z})$ ein Element $\xi \in K^*(X)$, dessen Chernscher Charakter mit a beginnt, d.h.

$$ch(\xi) = a + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+2k}, \qquad a_{n+2k} \in H^{n+2k}(X; \boldsymbol{Q}). \tag{3}$$

Die Elemente a_{n+2k} hängen im allgemeinen nicht nur von a sondern auch von der Wahl von ξ ab. Der folgende Satz von Adams [2] zeigt, daß in gewisser Weise die Reduktion der a_{n+2k} modulo q invariant ist.

4.2. Satz (Adams). *Es sei X ein endlicher CW-Komplex, dessen ganzzahlige Cohomologie keine Torsion habe. ξ sei Element von $K^*(X)$, dessen Chernscher Charakter von der Form (3) ist $\left(a \in H^n(X; \boldsymbol{Z})\right)$. Dann ist $a_{n+2k} \cdot q^{[k/(q-1)]}$ (für eine beliebige Primzahl q) ganz bezüglich q. Wenn k nicht durch $q-1$ teilbar ist, und also $k/(q-1) > [k/(q-1)]$ ist, dann werde das Element $a_{n+2k} \cdot q^{k/(q-1)}$ von $H^{n+2k}(X; \boldsymbol{R})$ betrachtet und ϱ_q von diesem Element gleich 0 gesetzt. Damit ist $\varrho_q(a_{n+2k} \cdot q^{k/(q-1)})$ für jedes k definiert. Es gilt*

$$\begin{cases} \varrho_q\left(a + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+2k} \cdot q^{k/(q-1)}\right) = \mathscr{P}^{-1}(\varrho_q\, a), & \text{wenn } q \text{ ungerade,} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = Sq^{-1}(\varrho_q\, a), & \text{wenn } q = 2. \end{cases} \tag{4}$$

Dieser Satz ist spezieller als das Theorem 2 von Adams [2], da wir uns auf torsionsfreie CW-Komplexe X eingeschränkt haben. Adams betrachtet nur $K^0(X)$, aber das genügt, um den Satz für $K^*(X)$ zu bekommen: Unter Verwendung der Bezeichnungen von [4] hat man nämlich die kanonischen „Einhängungs"-Isomorphismen

$$K^1(X) = \tilde{K}^0\left(\boldsymbol{S}(X^+)\right), \qquad H^*(X; A) = \tilde{H}^*\left(\boldsymbol{S}(X^+); A\right) \tag{5}$$

(A beliebiger Koeffizientenbereich).

Sowohl der Chernsche Charakter als auch der Cohomologie-Automorphismus $\mathscr{P}^{-1}$ (bzw. Sq^{-1}) ist mit der „Einhängung" vertauschbar.

In der Formulierung des Satzes bei ADAMS kommt der kanonische Anti-Automorphismus der Steenrodschen Algebra vor. Bei Beachtung von 1.10 folgt unsere Formulierung . Es sei auch noch erwähnt, daß in einem torsionsfreien Raum $Sq = \sum_{i=0}^{\infty} Sq^{2i}$ da $Sq^{2i+1} = Sq^1 Sq^{2i}$ und Sq^1 der Bocksteinsche Operator ist, der in einem Raum ohne 2-Torsion verschwindet.

Ein Beispiel möge den Satz von ADAMS illustrieren. Für Elemente $x_1, \ldots, x_s \in H^2(X; \mathbf{Z})$ gibt es genau ein $\xi \in K^0(X)$ mit

$$ch(\xi) = x_1 \ldots x_s \cdot \prod_{j=1}^{s} (1 - e^{-x_j})/x_j. \tag{6}$$

Für dieses ξ mit $a = x_1 \ldots x_s$ folgt die Formel (4) leicht aus 2.9 (14) und aus

$$\mathscr{P}^{-1}(x_j) = x_j - x_j^q + x_j^{q^2} - \cdots \qquad \text{(s. 2.12 (21'))}. \tag{7}$$

(Die Formel (7) bleibt bestehen, wenn $q = 2$ ist und $\mathscr{P}$ durch Sq ersetzt wird.)

4.3. Wir möchten in diesem Abschnitt mit Hilfe des Satzes von ADAMS (4.2) zeigen, daß der Satz 3.2 im Falle torsionsfreier Mannigfaltigkeiten für $\lambda = \mathscr{P}^{-1}$ aus dem „differenzierbaren Riemann-Rochschen Satze" [3] folgt.

Die in diesem Abschnitt vorkommenden Mannigfaltigkeiten sollen *kompakt, orientiert, differenzierbar sein und ihre ganzzahlige Cohomologie soll keine Torsion besitzen.* X sei eine solche Mannigfaltigkeit und $w_2(X) \in H^2(X; \mathbf{Z}_2)$ ihre zweite Stiefel-Whitneysche Klasse. Da X torsionsfrei ist, kann jedes Element von $H^2(X; \mathbf{Z}_2)$ durch Reduktion mod 2 aus einer ganzzahligen Klasse gewonnen werden. $c_1(X) \in H^2(X; \mathbf{Z})$ sei für jede der in diesem Abschnitt zugelassenen Mannigfaltigkeiten X festgewählt, und zwar so, daß die Reduktion mod 2 von $c_1(X)$ gleich $w_2(X)$ ist.

Die totale Toddsche Klasse $\mathscr{T}(X) \in H^*(X; \mathbf{Q})$ wird dann mit Hilfe von $c_1(X)$ und der Pontrjaginschen Klassen $p_i(X)$ wie folgt definiert:

$$\mathscr{T}(X) = e^{c_1(X)/2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j\big(p_1(X), \ldots, p_j(X)\big). \tag{8}$$

Für eine stetige Abbildung $g: Y \to X$ zulässiger Mannigfaltigkeiten und für $\eta \in K^*(Y)$ gilt:

$$g_*\big(ch(\eta) \cdot \mathscr{T}(Y)\big) = ch(g_!\eta) \cdot \mathscr{T}(X), \qquad g_!\eta \in K^*(X). \tag{9}$$

Das ist der differenzierbare Riemann-Rochsche Satz [3, 13]. Das Element $g_!\eta$ von $K^*(X)$ ist durch (9) eindeutig bestimmt, da X nach Voraussetzung keine Torsion hat [4].

Es sei q eine ungerade Primzahl und $f = q^{1/(q-1)}$. Wir nehmen nun an, daß $ch(\eta)$ von der Gestalt (3) ist, also mit $a \in H^n(X; \mathbf{Z})$ beginnt. Dann ist $ch(g_!\eta) = g_* a +$ höhere Glieder. Wir setzen

$$m = \dim g_* a = n + \dim X - \dim Y.$$

Es werde nun in (9) die $2k$-dimensionale Komponente von $\mathscr{T}(Y)$ durch ihr Vielfaches mit f^k ersetzt, ebenso für $\mathscr{T}(X)$. Die $(n+2k)$-dimensionale Komponente von $ch(\eta)$ werde durch ihr Vielfaches mit f^k ersetzt, ebenso werde die $(m+2k)$-dimensionale Komponente von $ch(g_!\eta)$ durch ihr Vielfaches mit f^k ersetzt. Nachdem diese Ersetzungen geschehen sind, werde mod q reduziert. Man erhält auf diese Weise

$$(10) \qquad g_*\big(\mathscr{P}^{-1}(\varrho_q a)\,\mathrm{Wu}(\mathscr{P}, Y)\big) = \mathscr{P}^{-1}\big(g_*(\varrho_q a)\big)\,\mathrm{Wu}(\mathscr{P}, X).$$

Man wendet hierzu (4) auf η und $g_!\eta$ an, beachtet, daß $e^{f c_1(X)/2} \equiv 1 \pmod q$, und benutzt 2.12 (20). Da Y nach Voraussetzung keine Torsion hat, läßt sich jedes Element $y \in H^n(Y; \mathbf{Z}_q)$ als $\varrho_q a$ mit $a \in H^n(Y; \mathbf{Z})$ schreiben und jedes $a \in H^n(Y; \mathbf{Z})$ tritt als Anfangsterm des Chernschen Charakters eines Elementes $\eta \in K^*(Y)$ auf [4]. Also liefert (10) den Satz 3.2 für alle $y \in H^*(Y; \mathbf{Z}_q)$ im Falle des Cohomologie-Automorphismus $\lambda = \mathscr{P}^{-1}$.

§ 5. Über die Relationen zwischen den charakteristischen Zahlen

5.1. Wir wollen zunächst die Relationen zwischen den Chernschen Zahlen untersuchen. Vgl. dazu den Bericht [12]. Eine schwache fastkomplexe Struktur auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine schwache komplexe Struktur des Tangentialbündels von M, d.h. ein komplexes Vektorraum-Bündel über M, das als reelles Bündel isomorph zum Tangentialbündel von M plus (Whitneysche Summe) einem trivialen reellen Vektorraum-Bündel ist [5, III, §2.1]. Eine schwach-fastkomplexe Mannigfaltigkeit ist kanonisch orientiert, hat also einen orientierten Grundzyklus $[M]$. Die Chernschen Klassen $c_i(M)$ sind per definitionem die des komplexen Vektorraum-Bündels, welches die schwache fastkomplexe Struktur bestimmt. Die Dimension von M sei gerade ($\dim M = 2n$). Für jede Partition $\pi = (i_1, \ldots, i_r)$ von n bilde man das Monom $c_{i_1} \ldots c_{i_r} \in H^{2n}(M; \mathbf{Z})$. Der Wert dieses Monoms auf $[M]$ werde mit $c_\pi(M)$ bezeichnet. Die $c_\pi(M)$ sind ganze Zahlen und werden Chernsche Zahlen von M genannt.

Es sei B_U der klassifizierende Raum der unendlichen unitären Gruppe. ($B_U = \lim\limits_{n\to\infty} B_{U(n)}$). Dann ist

$$(1) \qquad H^{**}(B_U; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[[c_1, c_2, \ldots]],$$

wo c_i die „universelle" $2i$-dimensionale Chernsche Klasse ist. Man hat einen Homomorphismus

$$(2) \qquad \alpha(M): H^{2n}(B_U; \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z},$$

wobei $\alpha(M)(c_{i_1} \ldots c_{i_r}) = c_\pi(M)$, $\big(\pi = (i_1, \ldots, i_r),\ i_1 + \cdots + i_r = n\big)$.

Es sei q eine Primzahl. Nach Reduktion mod q kann die Chernsche Klasse c_i als Element von $H^{2i}(B_U; \mathbf{Z}_q)$ aufgefaßt werden. Es ist dann

$$(3) \qquad H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q) = \mathbf{Z}_q[[c_1, c_2, \ldots]],$$

und wir haben vermöge (2) einen Homomorphismus

$$\alpha(M)_q\colon H^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q) \to \mathbf{Z}_q. \tag{4}$$

Man nennt ein Element a von $H^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q)$ eine „Relation zwischen Chernschen Zahlen mod q", wenn a für alle kompakten differenzierbaren schwach-fastkomplexen Mannigfaltigkeiten M der reellen Dimension $2n$ zum Kern von $\alpha(M)_q$ gehört. Diese Relationen bilden eine Untergruppe von $H^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q)$, die wir mit $R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q)$ bezeichnen. $R^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)$ sei die Untergruppe derjenigen Elemente von $H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)$, deren $2n$-dimensionale Komponente für jedes n zu $R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q)$ gehört.

5.2. In $H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)$ liegt die universelle totale Chernsche Klasse $c = 1 + c_1 + c_2 + \cdots$. Mit $(c^{-1})_i$ werde die $2i$-dimensionale Komponente von c^{-1} bezeichnet. Durch die Festsetzungen

$$c_i \to (c^{-1})_i \tag{5}$$

erhält man einen multiplikativen gradtreuen involutorischen Automorphismus D von $H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)$, vgl. [8]. Für eine multiplikative Folge

$$\sum_{j=0}^{\infty} K_j(c_1, \ldots, c_j) \in H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)$$

ist

$$D\Big(\sum_{j=0}^{\infty} K_j(c_1, \ldots, c_j)\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(D\,c_1, \ldots, D\,c_j) = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} K_j(c_1, \ldots, c_j)\Big)^{-1}. \tag{6}$$

D ist mit jedem Cohomologie-Automorphismus λ vertauschbar, da $\lambda(c) \in H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)$ eine multiplikative Folge ist (mit der charakteristischen Potenzreihe $1 + \lambda x$).

Der Automorphismus D entspricht dem Übergang von einem Bündel ξ zu dem inversen Bündel η von ξ. ($[\xi] + [\eta] = 0$, s. [5, III, §1.3].) Der Automorphismus D wird also durch eine „Abbildung" $B_U \to B_U$ induziert. Man kann D auffassen als den kanonischen Anti-Automorphismus der Hopfschen Algebra $H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)$, vgl. [1].

5.3. Für einen Cohomologie-Automorphismus λ ist $\mathrm{Wu}(\lambda)$ ein multiplikativer Funktor, zu dem eine multiplikative Folge $\{K_j(c_1, \ldots, c_j)\}$ gehört (s. 2.6). Das Element $\sum_{j=0}^{\infty} K_j(c_1, \ldots, c_j) \in H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)$ soll ebenfalls mit $\mathrm{Wu}(\lambda)$ bezeichnet werden. Dann gilt

$$\lambda\, y - y \cdot \mathrm{Wu}(\lambda) \in R^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q) \quad \text{für alle } y \in H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q). \tag{7}$$

Die Aussage (7) ist eine Konsequenz der Formel 3.5 (17), wenn man diese auf eine beliebige schwach-fastkomplexe Mannigfaltigkeit M anwendet, wobei das y von 3.5 (17) alle Polynome in den Chernschen Klassen von M durchlauft.

Ordnet man jedem $y \in H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)$ die $2n$-dimensionale Komponente von (7) zu, dann erhält man einen additiven Homomorphismus von $H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)$

in $R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q)$, dessen Bild mit $R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q; \lambda)$ bezeichnet werde. Die m-dimensionale Komponente einer Cohomologie-Klasse a werde gelegentlich durch a_m angedeutet, (obwohl das mit den Bezeichnungen der Chernschen und Pontrjaginschen Klassen nicht übereinstimmt). Die Untergruppe $R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q; \lambda)$ von $R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q)$ läßt sich auf verschiedene Weisen beschreiben:

LEMMA. $R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q; \lambda) =$

(i) $\{(\lambda y \cdot \mathrm{Wu}(\lambda^{-1}) - y)_{2n} \mid y \in H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)\} =$

(ii) $\{(\lambda^{-1} y \cdot \mathrm{Wu}(\lambda) - y)_{2n} \mid y \in H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)\} = R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q; \lambda^{-1}) =$

(iii) $\{D(\lambda y \cdot \underline{\lambda} - y)_{2n} \mid y \in H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)\}.$

BEWEIS. Zu (i) gelangt man, indem man in (7) y durch $y \cdot \mathrm{Wu}(\lambda)^{-1}$ ersetzt und beachtet, daß $\lambda(\mathrm{Wu}(\lambda)^{-1}) = \mathrm{Wu}(\lambda^{-1})$, s. 2.8. Man bekommt (ii) aus (7) dadurch, daß man y durch $\lambda^{-1} y$ ersetzt. Im Falle (iii) werde zunächst an den Funktor $\underline{\lambda}$ erinnert, der eine multiplikative Folge von Polynomen bestimmt und damit ein Element von $H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)$, s. 2.6. Nun folgt (iii) aus (i) wegen der Vertauschbarkeit von D mit λ und da $D\,\underline{\lambda} = (\underline{\lambda})^{-1} = \mathrm{Wu}(\lambda^{-1})$.

5.4. MILNOR führt in [17] das stabile Objekt MU ein (stabiler universeller Thomscher Raum für die unitäre Gruppe). Man hat den Thomschen Isomorphismus

$$\Phi : H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q) \to H^{**}(MU; \mathbf{Z}_q), \tag{8}$$

welcher per definitionem im hier betrachteten stabilen Fall die Graduierung erhält. Zu einem Cohomologie-Automorphismus λ gehört der multiplikative Funktor $\underline{\lambda}$, welcher in üblicher Weise als Element von $H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q)$ aufzufassen ist (2.6). Die Steenrodsche Algebra S^{**} (für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_q$) operiert auf $H^{**}(MU; \mathbf{Z}_q)$. Für den Cohomologie-Automorphismus $\lambda \in S^{**}$ gilt:

$$\lambda(\Phi y) = \Phi(\lambda y \cdot \underline{\lambda}) \quad \text{für } y \in H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q). \tag{9}$$

Die Formel (9) ist das stabile Gegenstück zu 2.15 (24). Aus 5.3 (iii) folgt sofort

$$\begin{cases} \Phi D R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q; \lambda) = \{(\lambda y - y)_{2n} \mid y \in H^{**}(MU; \mathbf{Z}_q)\} \\ \qquad\qquad = \left\{(\lambda y)_{2n} \mid y \in \sum_{i=0}^{n-1} H^{2i}(MU; \mathbf{Z}_q)\right\}. \end{cases} \tag{10}$$

Nun hat MILNOR in [17] gezeigt, daß die Algebra $S^*/(\delta)$ frei auf $H^*(MU; \mathbf{Z}_q)$ operiert. Hierbei ist S^* die Steenrodsche Algebra und (δ) das von dem Bocksteinschen Operator δ erzeugte Ideal ($\delta = Sq^1$ für $q = 2$). Man wähle eine Basis von $H^*(MU; \mathbf{Z}_q)$ über $S^*/(\delta)$ aus homogen-dimensionalen Elementen. Die Anzahl der Basis-Elemente der Dimension $2n$ ist unabhängig von der Wahl der Basis und werde mit $b(n; q)$ bezeichnet. Wählt man in (10) für λ den Steenrodschen Cohomologie-Automorphismus $\mathscr{P}$ (bzw. Sq), dann folgt

unmittelbar

$$(11)\qquad \begin{cases} \dim_{\mathbf{Z}_q} R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q; \lambda) = \dim_{\mathbf{Z}_q} H^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q) - b(n; q) \\ \qquad\qquad \text{für} \quad \lambda = \mathscr{P} \quad \text{bzw.} \quad \lambda = Sq. \end{cases}$$

5.5. Schreibt man die *ganzzahligen* Chernschen Klassen c_i formal als elementar-symmetrische Funktionen in Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ (N groß) vom Grade 2, dann kann man für jede Partition $\pi = (i_1, \ldots, i_r)$ von n das Element

$$s(\pi) = \sum x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r} \in H^{2n}(B_U; \mathbf{Z})$$

einführen. $s(\pi)$ ist die Summe aller paarweise verschiedenen Monome, die aus $x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r}$ durch Permutationen der N Variablen entstehen (s. z.B. [*11*, §1.4]). Für eine schwach-fastkomplexe Mannigfaltigkeit M der reellen Dimension $2n$ definieren wir die ganze Zahl $s_\pi(M)$ als Wert von $s(\pi)$ auf dem orientierten Grundzyklus von M. Für die Partition $\pi = (n)$ setzen wir $s(M) = s_\pi(M)$. Wenn $n = 2k$, dann stimmt $s(M)$ mit der in 3.6 definierten ganzen Zahl $s(M)$ überein. Genau wie in 3.6 können wir für eine schwach-fastkomplexe M der reellen Dimension $2n$ nachweisen, daß $s(M)$ durch q teilbar ist, wenn $n+1$ eine Potenz der Primzahl q ist.

MILNOR hat in [*17*] eine Folge $M_1, M_2, M_3, \ldots$ von projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeiten der komplexen Dimension 1, 2, 3, ... usw. angegeben, für die gilt:

i) $s(M_n) = 1$, wenn $n+1$ keine Primzahlpotenz ist,

ii) $s(M_n) = q$, wenn $n+1$ eine Potenz der Primzahl q ist.

Aus der Existenz dieser Mannigfaltigkeiten schließt man, daß

$$(12)\qquad \dim_{\mathbf{Z}_q} H^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q)/\dim_{\mathbf{Z}_q} R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q) \geqq a(n; q),$$

wo $a(n; q)$ die Anzahl der Partitionen von n ist, die keinen Summanden der Form $q^i - 1$ enthalten. Man benutzt dazu die Thomsche Formel

$$(13)\qquad s_\omega(M) = \sum_{(\omega_1, \omega_2)} s_{\omega_1}(M') \cdot s_{\omega_2}(M''),$$

wo M, M', M'' schwach-fastkomplexe Mannigfaltigkeiten der reellen Dimensionen $2n, 2r, 2s$ sind, $M = M' \times M''$, $n = r + s$, und wo ω eine Partition von n ist und (ω_1, ω_2) alle möglichen Zerlegungen von ω in eine Partition ω_1 von r und eine Partition ω_2 von s durchläuft. (Die Formel (13) wird in [*22*, Chap. IV, §7] in einem etwas anderen Fall bewiesen.)

Nach MILNOR [*17*] ist $a(n; q) = b(n; q)$. Aus (11) und (12) folgt für $\lambda = \mathscr{P}$ bzw. $\lambda = Sq$, daß $R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q; \lambda) = R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q)$. Wir fassen das Resultat in folgendem Satz zusammen.

5.6. SATZ. *Für eine gegebene Primzahl q sei $R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q)$ die Gruppe der Relationen* mod q, *die zwischen den Chernschen Zahlen schwach-fastkomplexer Mannigfaltigkeiten der reellen Dimension $2n$ bestehen. $R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q; \lambda)$ sei die Untergruppe derjenigen Relationen, die sich mit Hilfe der Wuschen Methode* (7)

und des Cohomologie-Automorphismus λ (für die Cohomologie mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_q$) erhalten lassen. Im allgemeinen ist $R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q; \lambda)$ eine echte Untergruppe von $R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q)$. Wählt man jedoch den Steenrodschen Cohomologie-Automorphismus $\mathscr{P}$ (q ungerade) bzw. Sq (für $q=2$), dann gilt

$$R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q; \mathscr{P}) = R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q) \quad \text{bzw.} \quad R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_2; Sq) = R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_2).$$

Die Wuschen Relationen sind also vollständig. Die Dimension von $R^{2n}(B_U; \mathbf{Z}_q)$ über $\mathbf{Z}_q$ ist gleich der Anzahl der Partitionen von n, die wenigstens einen Summanden der Form $q^i - 1$ enthalten.

5.7. In 5.1 (2) haben wir den Homomorphismus $\alpha(M): H^{2n}(B_U; \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$ eingeführt. $\mathrm{Hom}(H^{2n}(B_U; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) = H_{2n}(B_U; \mathbf{Z})$ ist eine freie abelsche Gruppe, deren Rang gleich der Anzahl der Partitionen von n ist. Die Menge der $\alpha(M)$, wo M alle schwach-fastkomplexen Mannigfaltigkeiten der reellen Dimension $2n$ durchläuft, bildet eine Untergruppe von $H_{2n}(B_U; \mathbf{Z})$ von endlichem Index. Diese Untergruppe kann durch Kongruenzen zwischen den Chernschen Zahlen angegeben werden. Diese Kongruenzen sind im Prinzip berechenbar (MILNOR [17, Part II]). Für eine vollständige Liste der Kongruenzen für $n \leqq 4$ s. [12]. Der Homomorphismus $\alpha(M): H^{2n}(B_U; \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$ induziert einen Homomorphismus

$$\alpha(M)_{\mathbf{Q}}: H^{2n}(B_U; \mathbf{Q}) \to \mathbf{Q}.$$

Es sei $R^{2n}(B_U; \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ die Untergruppe derjenigen Elemente von $H^{2n}(B_U; \mathbf{Q})$, auf denen $\alpha(M)_{\mathbf{Q}}$ für jede schwach-fastkomplexe M der reellen Dimension $2n$ ganzzahlige Werte annimmt. $R^{2n}(B_U; \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ ist die Gruppe der Kongruenzen zwischen den Chernschen Zahlen schwach-fastkomplexer Mannigfaltigkeiten der reellen Dimension $2n$. Es sei $R^{**}(B_U; \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ die Gruppe der Elemente von $H^{**}(B_U; \mathbf{Q})$, deren $2n$-dimensionale Komponenten für jedes n zu $R^{2n}(B_U; \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ gehören.

Schreibt man die ganzzahligen Chernschen Klassen wieder formal als elementar-symmetrische Funktionen in den Variablen $x_1, \ldots, x_N$ (N groß) vom Grade 2, dann kann man die elementar-symmetrischen Funktionen $e_1, e_2, \ldots$ in den $1 - e^{-x_i}$ einführen. Das sind wohldefinierte Elemente von $H^{**}(B_U; \mathbf{Q})$. Den von $e_0 = 1, e_1, e_2, \ldots$ über $\mathbf{Z}$ erzeugten Unterring von $H^{**}(B_U; \mathbf{Q})$ bezeichnen wir mit $ch(B_U)$. Es sei $\mathscr{T}$ die universelle Toddsche Klasse

$$\mathscr{T} = \sum_{j=0}^{\infty} T_j(c_1, \ldots, c_j) \in H^{**}(B_U; \mathbf{Q}).$$

SATZ. *Für jedes $z \in ch(B_U)$ gehört $z \cdot \mathscr{T}$ zu $R^{**}(B_U; \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.*

Der Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus bekannten Ganzzahligkeitssätzen im Zusammenhang mit dem Satz von Riemann-Roch (s. [5, Part III, Theorem 3.6] oder [3]). Man hat zu beachten, daß $z \in ch(B_U)$ für jede schwach-fastkomplexe M ein Element von $chK(M)$ liefert, (das zum komplexen Tangentialbündel vermöge einer Darstellung der unitären Gruppe assoziiert ist).

VERMUTUNG. $R^{2n}(B_U; \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}) = \{(z \cdot \mathscr{T})_{2n} | z \in ch(B_U)\}$, *wo* $(z \cdot \mathscr{T})_{2n}$ *die* $2n$-*dimensionale Komponente von* $z \cdot \mathscr{T}$ *bezeichnet.*

Wir können diese Vermutung nicht beweisen. Jedoch werden wir zeigen, daß die $(z \cdot \mathscr{T})_{2n}$ für jede Primzahl q alle Relationen mod q liefern. *Die ungelöste Frage ist dann die nach den Relationen modulo den Potenzen einer Primzahl.* Wir betrachten ein Monom $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_r}$, wo $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ eine Partition einer Zahl $k < n$ ist. Für $k = 0$ haben wir nur das Monom 1. Das Monom $e_{i_1} \dots e_{i_r}$ ist ein Element von $H^{**}(B_U; \boldsymbol{Q})$, das mit $c_{i_1} \dots c_{i_r}$ beginnt. Ersetzt man in $e_{i_1} \dots e_{i_r}$ die Komponente der Dimension $2k + 2j$ durch ihr Vielfaches mit f^j, wo $f = q^{1/(q-1)}$ und reduziert modulo q, dann geht $e_{i_1} \dots e_{i_r}$ in $\mathscr{P}^{-1}(c_{i_1} \dots c_{i_r})$ über. Das ist eine rein formale Tatsache im Zusammenhang mit dem Satz von Adams (s. 4.2 (6)). (Für $q = 2$ ist $\mathscr{P}$ durch Sq zu ersetzen.) Ersetzt man ferner in $\mathscr{T}$ die $2j$-dimensionale Komponente durch ihr Vielfaches mit f^j, dann geht $\mathscr{T}$ in $\mathrm{Wu}(\mathscr{P})$ bzw. $\mathrm{Wu}(Sq)$ durch Reduktion mod q über. (Siehe 2.9, 2.11, 2.13.) Aus 5.3 (ii) und 5.6 folgt unmittelbar

SATZ. *Die Riemann-Roch-Kongruenzen* $z \cdot \mathscr{T} \in R^{**}(B_U; \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z})$, $z \in ch(B_U)$, *implizieren alle Relationen* mod q *zwischen den Chernschen Zahlen.*

5.8. Für die Pontrjaginschen Zahlen einer orientierten kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit M gelten ähnliche Resultate, wie wir sie für die Chernschen Zahlen besprochen haben. Es sei B_O der klassifizierende Raum für die unendliche orthogonale Gruppe. Ist q eine ungerade Primzahl, dann gilt

$$H^{**}(B_O; \boldsymbol{Z}_q) = \boldsymbol{Z}_q[[p_1, p_2, \dots]],$$

wo $p_i \in H^{4i}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)$ die Reduktion mod q der universellen ganzzahligen Pontrjaginschen Klasse der Dimension $4i$ ist. Für jede orientierte kompakte differenzierbare M sind die Pontrjaginschen Zahlen definiert. Das sind ganze Zahlen. Reduktion mod q der Pontrjaginschen Zahlen liefert einen Homomorphismus

$$\alpha(M)_q \colon H^{4k}(B_O; \boldsymbol{Z}_q) \to \boldsymbol{Z}_q, \qquad \dim M = 4k.$$

$R^{4k}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)$ sei die Untergruppe der Elemente von $H^{4k}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)$, welche für jede $4k$-dimensionale orientierte kompakte differenzierbare M zum Kern von $\alpha(M)_q$ gehören. $R^{4k}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)$ ist die Gruppe der Relationen mod q zwischen den Pontrjaginschen Zahlen in der Dimension $4k$.

SATZ. *Es sei* $\mathscr{P}$ *der Steenrodsche Cohomologie-Automorphismus für die Cohomologie mit Koeffizienten in* $\boldsymbol{Z}_q$ *(q ungerade Primzahl). Der multiplikative Funktor* $\mathrm{Wu}(\mathscr{P})$ *ist ein Element von* $H^{**}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)$. *Es gilt*

$$R^{4k}(B_O; \boldsymbol{Z}_q) = \{(\mathscr{P} y - y \cdot \mathrm{Wu}(\mathscr{P}))_{4k} | y \in H^{**}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)\}.$$

Die Relationen, die sich mit Hilfe der Wuschen Methode gewinnen lassen (3.5 (17)), *liefern also ganz* $R^{4k}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)$. *Die Dimension von* $R^{4k}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)$ *ist gleich der Anzahl der Partitionen von* $2k$, *die nur gerade Summanden enthalten und für die wenigstens ein Summand von der Form* $q^i - 1$ *ist.*

Der Beweis erfolgt analog wie im Fall der Chernschen Zahlen unter wesentlicher Benutzung der Arbeit [17] von Milnor. Man kann wie in 5.7 die Gruppe $R^{4k}(B_O; \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R})$ aller Kongruenzen zwischen den Pontrjaginschen Zahlen einführen, eine analoge Vermutung formulieren und auch eine dem letzten Satz von 5.7 entsprechende Behauptung beweisen.

5.9. Schließlich gelten ähnliche Überlegungen für die Stiefel-Whitneyschen Zahlen von nicht notwendigerweise orientierbaren Mannigfaltigkeiten. Diese Zahlen sind Elemente von $\boldsymbol{Z}_2$. Auch hier gilt die Vollständigkeit der Wuschen Relationen, was von Dold bewiesen wurde [8], dessen Beweismethode wir im §5 der vorliegenden Arbeit ganz entscheidend benutzt haben.

Literatur

[1] Adams, J. F.: On formulae of Thom and Wu. (erscheint demnächst).

[2] — On Chern characters and the structure of the unitary group. Proc. Cambr. Phil. Soc. **57**, 189—199 (1961).

[3] Atiyah, M. F., and F. Hirzebruch: Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. **65**, 276—281 (1959).

[4] —, and F. Hirzebruch: Vector bundles and homogeneous spaces. Differential Geometry. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 3, American Mathematical Society 1961.

[5] Borel, A., and F. Hirzebruch: Characteristic classes and homogeneous spaces I, II, III. Amer J. Math. **80**, 458—538 (1958); **81**, 315—382 (1959); **82**, 491—504 (1960).

[6] —, et J. P. Serre: Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck). Bull. Soc. Math. France **86**, 97—136 (1958).

[7] Cartan, H.: Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane, I et II. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40**, 467—471 und 704—707 (1954).

[8] Dold, A.: Vollständigkeit der Wuschen Relationen zwischen den Stiefel-Whitneyschen Zahlen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **65**, 200—206 (1956).

[9] Eilenberg, S., and N. Steenrod: Foundations of algebraic topology. Princeton Mathematical Series 15, Princeton University Press 1952.

[10] Hirzebruch, F.: On Steenrod's reduced powers, the index of inertia, and the Todd genus. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 951—956 (1953).

[11] — Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Ergebnisse der Mathematik. Neue Folge, Heft 9. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

[12] — Komplexe Mannigfaltigkeiten. Proc. of the Intern. Congr. of Math. 1958, Cambridge University Press 1960, pp. 119—136.

[13] — A Riemann-Roch theorem for differentiable manifolds. Séminaire Bourbaki, Exp. 177, Février 1959.

[14] Milnor, J.: The geometric realization of a semi-simplicial complex. Ann. Math. (2) **65**, 357—362 (1957).

[15] — Lectures on characteristic classes. Mimeographed notes. Princeton 1957.

[16] — The Steenrod algebra and its dual. Ann. Math. **67**, 150—171 (1958).

[17] — On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, Part I. Amer. J. Math. **82**, 505—521 (1960). Part II erscheint demnächst.

[18] Puppe, D.: Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I. Math Z. **69**, 299—344 (1958).

[19] Serre, J. P.: Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane. Comm. Math. Helv. **27**, 198—232 (1953).

[20] Steenrod, N.: Homology groups of symmetric groups and reduced power operations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 213—223 (1953).

[21] — Cohomology operations and obstructions to extending continuous functions. Colloquium lectures. Mimeographed notes. Princeton 1957.
[22] THOM, R.: Quelques propriétés globales des variétés différentiables Comm. Math. Helv. **28**, 17–86 (1954).
[23] USPENSKY, J. V., and M. A. HEASLET: Elementary Number Theory. New York 1939.
[24] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial homotopy I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213–245 (1949).
[25] WU WEN-TSUN: Classes caractéristiques et i-carrés d'une variété. C. R. Acad. Sci., Paris **230**, 508–511 (1950).
[26] — Sur les puissances de Steenrod. Colloque de Topologie de Strasbourg 1951 (vervielfältigt).

Mathematisches Institut der Universität, Bonn

Pembroke College, Cambridge

Mathematical Institute, Oxford

(Eingegangen am 10. April 1961)

KNESER, M.
Math. Zeitschr. 77, 188–194 (1961)

Darstellungsmaße indefiniter quadratischer Formen

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

MARTIN KNESER

1. Einleitung. Der Satz von MINKOWSKI und SIEGEL über definite quadratische Formen [*8*, I] gestattet es, einen Mittelwert der Darstellungsanzahlen einer Zahl a durch die verschiedenen nichtäquivalenten Formen f_i eines Geschlechts durch Lösungsanzahlen entsprechender Kongruenzen auszudrücken. Für indefinite Formen werden die Darstellungsanzahlen im allgemeinen unendlich; an ihre Stelle treten die Darstellungsmaße von a durch f_i [*8*, II], [*3*]. SIEGEL [*9*] zeigte später mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln, daß im Fall indefiniter Formen f_i in $n \geqq 4$ Veränderlichen schon das Darstellungsmaß durch jede einzelne Form f_i sich so berechnen läßt, und EICHLER [*4*] erreichte dasselbe (allerdings unter etwas schärferen Voraussetzungen, vgl. weiter unten Nr. 4) mit arithmetischen Mitteln, indem er unter diesen Voraussetzungen eine schärfere Aussage bewies, aus der abzulesen ist, daß die Darstellungsmaße für alle Formen eines Geschlechts übereinstimmen. Eine einfache Folgerung aus diesen Ergebnissen ist die Aussage, daß eine Zahl a durch alle Formen f_i dargestellt wird, wenn sie von einer einzigen dargestellt wird, wenn also die notwendigen Kongruenzbedingungen für die Darstellung durch Formen des Geschlechts erfüllt sind. Für diese einfachere Aussage hat WATSON [*11*] (vgl. auch [*10*], Thm. 53) einen ganz elementaren Beweis gegeben, und nach JONES und WATSON [*5*] gilt sie auch noch für indefinite Formen in drei Veränderlichen, wenn man endlich viele genau angebbare Quadratklassen für a ausschließt. Im folgenden wird gezeigt, daß auch bei ternären Formen in der Regel die Gleichheit der Darstellungsmaße gilt und daß über die von EICHLER [*4*] behandelten Fälle hinaus allgemein arithmetische Methoden anwendbar sind. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die schon in [*4*] benützten Hilfsmittel, nur in etwas anderer Sprache, nämlich der der Adele [*12*].

2. Darstellungsmaße. Wir verwenden die geometrische Sprechweise wie in [*3*]. Es seien

k ein algebraischer Zahlkörper,
$\mathfrak{o}$ der Ring der ganzen Zahlen aus k,
V ein Vektorraum der endlichen Dimension n über k mit einer nicht ausgearteten quadratischen Form $f(x)$,
M ein Gitter in V, d.h. ein endlich erzeugter $\mathfrak{o}$-Modul vom Rang n,
$O(V)$ die orthogonale Gruppe von V bezüglich f,
$O(M)$ die Untergruppe der Einheiten von M,

$O(V, x)$ für irgendeinen Vektor $x \neq 0$ aus V die Fixgruppe von x in $O(V)$, $O(M, x) = O(V, x) \cap O(M)$.

Ist $\mathfrak{p}$ eine — endliche oder unendliche — Primstelle von k, so bezeichnen wir durch einen Index $\mathfrak{p}$ jeweils die entsprechende Erweiterung auf die vollständige Hülle $k_\mathfrak{p}$ von k bzw., wenn $\mathfrak{p}$ endlich ist, auf den Ring $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ der ganz $\mathfrak{p}$-dische Zahlen.

Eine Darstellung (x, M) der Zahl a durch das Gitter M wird gegeben durch einen Vektor $x \in M$ mit $f(x) = a$. Zwei Darstellungen (x, M) und (y, N) nennen wir äquivalent, wenn es ein $u \in O(V)$ gibt mit $ux = y$, $uM = N$; insbesondere sind zwei Darstellungen (x, M) und (y, M) äquivalent, wenn $ux = y$ mit $u \in O(M)$ ist, und zwei Darstellungen (x, M) und (x, N), wenn $N = uM$ ist mit $u \in O(V, x)$. Nach dem Wittschen Isomorphiesatz gibt es bei gegebenem Vektor $x \in V$ mit $f(x) = a$ zu jeder Darstellung (y, N) von a eine äquivalente (x, M) mit einem geeigneten Gitter M; wir können uns also auf Darstellungen mit vorgegebenem x beschränken. (x, M) und (y, N) heißen verwandt, wenn es zu jedem $\mathfrak{p}$ ein $u_\mathfrak{p} \in O(V_\mathfrak{p})$ gibt mit $u_\mathfrak{p} x = y$, $u_\mathfrak{p} M_\mathfrak{p} = N_\mathfrak{p}$. Äquivalente Darstellungen fassen wir zu einer Klasse, verwandte zu einem Geschlecht von Darstellungen zusammen.

Das Produkt der Gruppen $O(V_\mathfrak{p}, x)$ über alle unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}$ von k bezeichnen wir mit $O_\infty(V, x)$. Die Gruppe $O(M, x)$ ist in jedem Faktor $O(V_\mathfrak{p}, x)$ als diskrete Untergruppe enthalten; sie operiert daher auch durch Linksmultiplikation als diskrete Transformationsgruppe auf $O_\infty(V, x)$. Da das Haarsche Maß μ_∞ auf $O_\infty(V, x)$ links- und rechtsinvariant ist, induziert es ein invariantes Maß auf dem homogenen Raum $O_\infty(V, x)/O(M, x)$, das wir auch mit μ_∞ bezeichnen. $\mu_\infty\big(O_\infty(V, x)/O(M, x)\big)$ heißt das Darstellungsmaß von (x, M); es ist natürlich erst dann eindeutig bestimmt, wenn die in μ_∞ noch freie Konstante festgelegt ist. Da wir hier nur verschiedene Maße miteinander vergleichen wollen, kommt es uns darauf nicht an. Die einzige Eigenschaft, die wir brauchen, ist, daß die Normierung so vorgenommen werden kann, daß unter einer orthogonalen Transformation u von V das Maß auf $O_\infty(V, x)$ in das auf $O_\infty(V, ux)$ übergeht. Dann stimmt das Darstellungsmaß für äquivalente Darstellungen überein und wird als Darstellungsmaß der Klasse bezeichnet [3, 8]. Summiert man diese Maße bei festem M über ein volles System nicht äquivalenter Darstellungen von a durch M, so erhält man das Darstellungsmaß von a durch M. Entsprechend werden die Darstellungsmaße von a durch ein Spinorgeschlecht [3, 6] oder ein Geschlecht definiert.

3. *Adele* (vgl. [12]). Die Adelgruppe $O_A(V)$ ist das eingeschränkte direkte Produkt der Gruppen $O(V_\mathfrak{p})$ bezüglich der Untergruppen $O(M_\mathfrak{p})$, d.h. die Vereinigung der Gruppen $O_S(V) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} O(V_\mathfrak{p}) \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} O(M_\mathfrak{p})$, wo S alle endlichen, sämtliche unendlichen Primstellen enthaltenden Mengen von Primstellen durchläuft. $O_A(V)$ besitzt eine Topologie, in der die $O_S(V)$ offen sind und die auf $O_S(V)$ induzierte Topologie gerade die Produkttopologie der einzelnen

Faktoren ist. $O_A(V)$ ist lokalkompakt und enthält $O(V)$ als diskrete Untergruppe, wenn man das Element $u \in O(V)$ mit dem Adel identifiziert, dessen Komponenten $u_\mathfrak{p}$ alle gleich u sind. Entsprechend definiert man die Adelgruppe $O_A(V, x)$ von $O(V, x)$.

Ist M ein Gitter in V und $u = \{u_\mathfrak{p}\} \in O_A(V)$, so gibt es genau ein Gitter N mit $N_\mathfrak{p} = u_\mathfrak{p} M_\mathfrak{p}$ für alle endlichen $\mathfrak{p}$; wir schreiben $N = uM$. Die Untergruppe $O_\infty(V) \times \prod_{\mathfrak{p}\,\text{endl.}} O(M_\mathfrak{p})$ der $u \in O_A(V)$ mit $uM = M$ bezeichnen wir mit $O_A(M)$ und setzen $O_A(M) \cap O_A(V, x) = O_A(M, x)$. Ist (x, M) eine Darstellung von a durch M und $u \in O_A(V, x)$, so gehört (x, uM) zum selben Geschlecht von Darstellungen, und jede Darstellung (x, N) aus diesem Geschlecht erhält man auf diese Weise. (x, uM) und (x, vM) stimmen genau dann überein, wenn u und v zur selben Restklasse $uO_A(M, x)$ gehören; sie sind genau dann äquivalent, wenn u und v zur selben zweiseitigen Klasse $O(V, x)\, uO_A(M, x)$ gehören. Die Darstellungsklassen des Geschlechts von (x, M) entsprechen also umkehrbar eindeutig diesen zweiseitigen Restklassen.

Es sei nun μ ein Haarsches Maß auf $O_A(V, x)$, dargestellt als Produkt der Maße μ_∞ auf $O_\infty(V, x)$ und μ_0 auf dem komplementären Faktor $O_0(V, x)$ derjenigen $u \in O_A(V, x)$, deren Komponenten $u_\mathfrak{p} = 1$ sind für alle unendlichen $\mathfrak{p}$. Wir berechnen das Maß

$$\mu\big(O(V, x)\, uO_A(M, x)/O(V, x)\big). \tag{1}$$

Es ist, abgesehen von zwei Ausnahmefällen, endlich, da das Maß des ganzen homogenen Raumes $O_A(V, x)/O(V, x)$ endlich ist [12]. Die Ausnahmen sind $n = 3$, $a \neq 0$ und der zu x orthogonale Teilraum von V ist isotrop, sowie $n = 4$, $a = 0$ und f hat quadratische Diskriminante. Wegen der Invarianz von μ können wir in (1) von rechts mit u^{-1} multiplizieren und dann $uO_A(M, x)\, u^{-1} = O_A(uM, x)$ beachten. Wir erhalten

$$\mu\big(O(V, x)\, O_A(uM, x)/O(V, x)\big),$$

und das ist, da $O(V, x)$ eine diskrete, $O_A(uM, x)$ eine offene Untergruppe von $O_A(V, x)$ ist, gleich

$$\mu\big(O_A(uM, x)/O_A(uM, x) \cap O(V, x)\big) = \mu\big(O_A(uM, x)/O(uM, x)\big).$$

Ist nun F ein Fundamentalbereich für $O_\infty(V, x)$ modulo $O(uM, x)$, so ist $F \times \big(O_0(V, x) \cap O_A(uM, x)\big)$ einer für $O_A(uM, x) = O_\infty(V, x) \times \big(O_0(V, x) \cap O_A(uM, x)\big)$ modulo $O(uM, x)$. Daraus ergibt sich das gesuchte Maß zu

$$\mu_\infty\big(O_\infty(V, x)/O(uM, x)\big)\, \mu_0\big(O_0(V, x) \cap O_A(uM, x)\big).$$

Hier ist schließlich $O_A(uM, x) = uO_A(M, x)\, u^{-1}$ und wegen der beiderseitigen Invarianz von μ_0 daher

$$\left\{\begin{aligned} &\mu\big(O(V, x)\, uO_A(M, x)/O(V, x)\big) \\ &\qquad = \mu_\infty\big(O_\infty(V, x)/O(uM, x)\big)\, \mu_0\big(O_0(V, x) \cap O_A(M, x)\big). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

In Worten: Das Maß (1) ist bis auf den von u unabhängigen Faktor $c = \mu_0\big(O_0(V,x) \cap O_A(M,x)\big)$ gleich dem Darstellungsmaß von (x, uM)[1]).

4. Spinorgeschlechter. Die verschiedenen Klassen aus einem Geschlecht von Darstellungen verteilen sich auf die verschiedenen Klassen von Gittern und damit auch auf die verschiedenen Spinorgeschlechter. Jedes Geschlecht von Darstellungen von a liefert also gewisse Beiträge zum Darstellungsmaß von a durch die einzelnen Spinorgeschlechter; diese Beiträge wollen wir jetzt miteinander vergleichen. Dazu betrachten wir die Untergruppe $O'_A(V)$ derjenigen Adele $u = \{u_\mathfrak{p}\}$ aus $O_A(V)$, bei denen $u_\mathfrak{p}$ ein eigentlicher Automorphismus von $V_\mathfrak{p}$ mit der Spinornorm 1 ist für alle $\mathfrak{p}$. Wir zählen M und N zum selben Spinorgeschlecht, wenn $N = vwM$ ist mit $v \in O(V)$ und $w \in O'_A(V)$[2]). Die Spinorgeschlechter aus dem Geschlecht von M entsprechen also umkehrbar eindeutig den Doppelklassen $O(V)O'_A(V)uO_A(M)$, und der Beitrag des Geschlechts von (x, M) zum Darstellungsmaß von a durch das Spinorgeschlecht von uM ist

$$c^{-1}\mu\big(O_A(V,x) \cap O(V)\,O'_A(V)\,u\,O_A(M)/O(V,x)\big). \tag{3}$$

Da $O'_A(V)$ die Kommutatorgruppe von $O_A(V)$ umfaßt, kann man den Faktor u rechts herausziehen. Wenn außerdem u in $O_A(V,x)$ liegt, so kann man $O_A(V,x)u$ statt $O_A(V,x)$ schreiben, so daß sich wegen der Translationsinvarianz von μ die Größe (3) als von u unabhängig erweist. Um zu entscheiden, wann u in $O_A(V,x)$ gewählt werden kann, erreichen wir zunächst durch Multiplikation mit einem Faktor aus $O_A(M)$, daß alle Komponenten $u_\mathfrak{p}$ von u die Determinante $+1$ haben; das geht, da es in $O(M_\mathfrak{p})$ stets Elemente der Determinante -1 gibt ([3], Satz 10.5). Ist nun $n \geqq 5$ oder $n = 4$ und $a \neq 0$, enthält also V einen zu x orthogonalen dreidimensionalen, bezüglich f nicht ausgearteten Teilraum W und $O_A(V,x)$ daher die Untergruppe $O_A(W)$, so gibt es nach der Schlußweise von [6], p. 327 ein v in $O_A(W)$, das sich von u nur um einen Faktor aus $O'_A(V)$ unterscheidet, so daß u durch v ersetzt werden kann. Damit haben wir den

SATZ 1. *Ist $n \geqq 5$ oder $n = 4$ und $a \neq 0$, so ist der Beitrag eines festen Geschlechts von Darstellungen von a zum Darstellungsmaß von a durch ein*

[1]) Dieser Faktor stellt sich als das Inverse des Produkts von $\mathfrak{p}$-adischen Darstellungsdichten heraus. Summiert man über die verschiedenen Doppelrestklassen, so erhält man links $\mu(O_A(V,x)/O(V,x))$. Dividiert man durch den Faktor c und summiert noch über die sämtlichen zu dem Geschlecht des Gitters M gehörigen Geschlechter von Darstellungen, so erhält man SIEGELS Satz [3, 8], vorausgesetzt, daß man μ geeignet normiert und das Maß $\mu(O_A(V,x)/O(V,x))$ berechnet hat; vgl. dazu [12]. Ersetzt man im Falle definiter Formen mit rationalen Koeffizienten $O_A(M,x)$ durch die Gruppe derjenigen $u \in O_A(V,x)$, die nicht nur M, sondern mit einer beliebigen aber festen Zahl v alle Restklassen von M mod vM festlassen, so erhält man die Verallgemeinerung von VAN DER BLIJ [1].

[2]) In [6] wurde verlangt, daß v in der kleineren Gruppe $O^+(V)$ der eigentlichen Automorphismen von V liegt. Das ergibt u. U. eine engere Einteilung, entsprechend der Unterscheidung zwischen eigentlich und uneigentlich äquivalenten quadratischen Formen. Alle Ergebnisse lassen sich ohne weiteres auf diese engere Einteilung übertragen, indem man überall $O(V)$ durch $O^+(V)$ ersetzt.

Spinorgeschlecht von Gittern für alle Spinorgeschlechter eines Geschlechts der gleiche.

Ist f indefinit, so fallen die Spinorgeschlechter mit den Klassen zusammen. Summiert man über die verschiedenen Geschlechter von Darstellungen, so erhält man die Gleichheit der Darstellungsmaße von a durch die verschiedenen Klassen des Geschlechts, also mit Hilfe von [8] das Ergebnis von [9], abgesehen von dem Fall $n=4$, $a=0$, der im nächsten Abschnitt behandelt wird[3]).

Ist über die bisherigen Voraussetzungen hinaus $a \neq 0$ und der zu x orthogonale Teilraum von V indefinit, so liegt $O(V, x)O_\infty(V, x)$ dicht in $O(V, x)$ $O_\infty(V, x)O'_A(V, x)$ nach [6], p. 325. Da $O_A(M, x)$ offen ist und $O_\infty(V, x)$ enthält, und da $O'_A(V, x)$ die Kommutatorgruppe von $O_A(V, x)$ enthält, gilt

$$O(V, x)\, u\, O_A(M, x) = O(V, x)\, O'_A(V, x)\, O_A(M, x)\, u,$$

so daß Rechtsmultiplikation mit einem Element aus $O_A(V, x)$ diese Doppelklassen untereinander permutiert. Das ergibt sofort das schärfere Ergebnis von EICHLER [3], Satz 6; im übrigen ist dieser Beweis im Grunde nichts anderes als der aus [3].

5. Die Fälle $n=3$, $a\neq 0$ und $n=4$, $a=0$. Es sei zunächst $n=3$, $a\neq 0$, W der zu x orthogonale Teilraum der Dimension 2 mit der Diskriminante $d\neq 0$. Wir fragen uns, wann ein gegebenes u in (3) durch ein Element aus $O_A(V, x)$ ersetzt werden kann. Das ist genau dann der Fall, wenn u in

$$O'_A(V)\, O(V)\, O_A(V, x)\, O_A(M) \tag{4}$$

liegt. Wir wählen wieder $u \in O^+_A(V)$ und fragen wann u in der kleineren Gruppe

$$O'_A(V)\, O^+(V)\, O^+_A(V, x)\, O^+_A(M)$$

liegt, wo das Pluszeichen jeweils die Beschränkung auf eigentliche Automorphismen andeutet. Bilden wir die Spinornorm $\Theta(u)$ eines Adels u komponentenweise, so besteht $O'_A(V)$ gerade aus den Adelen der Spinornorm 1, und unsere Bedingung lautet

$$\Theta(u) \in \Theta\big(O^+(V)\big)\, \Theta\big(O^+_A(V, x)\big)\, \Theta\big(O^+_A(M)\big). \tag{5}$$

Der Einfachheit halber beschränken wir uns jetzt auf den Fall, daß f total indefinit ist, d.h. daß f an allen unendlichen Primstellen die Null darstellt; dann ist, wenn wir jeweils modulo Quadraten rechnen, $\Theta\big(O^+(V)\big) = k^\times$ nach [7], Satz A, und $\Theta\big(O^+(V_\mathfrak{p}, x)\big) = \Theta\big(O^+(W_\mathfrak{p})\big) = N_{K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}}(K_\mathfrak{P})$, wo $K = k\big(\sqrt{d}\big)$ und $\mathfrak{P}$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{p}$ ist ([3], §5.1). Also ist $\Theta\big(O^+(V)\big)\Theta\big(O^+_A(V, x)\big)$ gerade die der quadratischen Erweiterung K/k zugeordnete Untergruppe vom Index 2

[3]) In [9] werden auch noch Darstellungen durch inhomogene Gitter $M+z$ betrachtet, wo z in V, aber nicht in M liegt. Da die Gruppe $O_A(V)$ die inhomogenen Gitter genauso wie die homogenen Gitter permutiert, kann man die ganzen Überlegungen auch für inhomogene Gitter durchführen; nur muß man dann von Anfang an nur mit eigentlichen orthogonalen Transformationen arbeiten, da der Satz 10.5 aus [3] kein Analogon für inhomogene Gitter hat.

(oder 1, wenn d ein Quadrat ist; diesen Fall schließen wir nachher aus, da dann die Darstellungsmaße unendlich werden) der Idelgruppe von k [2]. Es kann also höchstens dann ein u geben, das der Bedingung (5) nicht genügt, wenn $\Theta\left(O_A^+(M)\right)$ in dieser Untergruppe liegt, d.h. wenn $\Theta\left(O^+(M_\mathfrak{p})\right)$ darin liegt für jedes $\mathfrak{p}$, und das bedeutet $\Theta\left(O^+(M_\mathfrak{p})\right) \subseteqq N_{K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}}(K_\mathfrak{P}^\times)$ für alle endlichen $\mathfrak{p}$ und $k_\mathfrak{p} \subseteqq N_{K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}}(K_\mathfrak{P}^+)$ für die unendlichen $\mathfrak{p}$; die letzte Bediugung bedeutet aber, daß d an allen reellen Primstellen von k positiv sein muß.

Wenn nun alle diese Bedingungen erfüllt sind und es tatsächlich Elemente u gibt, die nicht in (4) liegen, so zeigen unsere Überlegungen, daß die Gruppe (4) in $O_A(V)$ den Index 2 hat und daß sie zudem bei festem V nicht von M und x, sondern nur von d, also von a abhängt. Da die Spinorgeschlechter aus dem Geschlecht von M den Restklassen $O'_A(V)O(V)O_A(M)u$ entsprechen [6], verteilen sie sich auf zwei „Halbgeschlechter", die beide gleichviel, nämlich

$$\left[O'_A(V)\,O(V)\,O_A(V,x)\,O_A(M) : O'_A(V)\,O(V)\,O_A(M)\right]$$

Spinorgeschlechter enthalten, derart, daß das Darstellungsgeschlecht (x, M) zum Darstellungsmaß von a durch zwei Spinorgeschlechter den gleichen Beitrag liefert, wenn diese zum selben Halbgeschlecht gehören. Da wir es mit indefiniten Formen zu tun haben, können wir statt Spinorgeschlecht auch Klasse sagen; und da die Einteilung in Halbgeschlechter nur von a abhängt, können wir über die verschiedenen Darstellungsgeschlechter summieren und erhalten den

Satz 2. *Ist mit den oben erklärten Bezeichnungen $n=3$, $a \neq 0$, d kein Quadrat und f total indefinit, so ist entweder das Darstellungsmaß von a durch alle Formen aus dem Geschlecht von f das gleiche, oder aber das Geschlecht enthält eine gerade Anzahl $2r$ von Klassen, die sich auf zwei Halbgeschlechter von je r Klassen verteilen, derart, daß zwei Formen aus demselben Halbgeschlecht das gleiche Darstellungsmaß liefern. Der zweite Fall kann nur dann eintreten, wenn d für alle reellen Primstellen positiv und*

$$\Theta\left(O^+(M_\mathfrak{p})\right) \subseteqq N_{K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}}(K_\mathfrak{P}^\times) \tag{6}$$

für alle endlichen $\mathfrak{p}$ ist.

Dieser Satz hängt eng mit Theorem 2 aus [5] zusammen. Dort wird nur behauptet, daß a entweder von allen Formen des Geschlechts oder von keiner, oder aber von genau der Hälfte dargestellt wird, und es werden notwendige Bedingungen (i) bis (iv) für das Eintreten des letzten Falles angegeben. Die dortige Bedingung (i) besagt in unserer Bezeichnung gerade $d > 0$ (k ist der rationale Zahlkörper) und d ist kein Quadrat; (ii) und (iii) stimmen mit (6) für diejenigen $\mathfrak{p}$, die nicht in der Diskriminante von M aufgehen, überein, da in diesem Fall $\Theta\left(O^+(M_\mathfrak{p})\right)$ alle Einheiten von $k_\mathfrak{p}$ enthält, $\mathfrak{p}$ also in K unverzweigt sein muß; diese Bedingung läßt für d, also auch für a, nur endlich viele Quadratklassen zu; zu (iv) haben wir kein Analogon, da es bei Nichterfülltsein dieser Bedingung vermutlich vorkommen kann, daß die Darstellungsmaße zwei verschiedene positive Werte annehmen (nicht aber, nach [5], einen positiven und den Wert 0).

Ist schließlich $n=4$, $a=0$, so kann man V in einen zweidimensionalen, isotropen, den Vektor x enthaltenden und einen anderen zweidimensionalen Teilraum W orthogonal zerlegen. Die Diskriminante d von W stimmt mit der von V überein. Schließlich ist $\Theta(O^+(W))$ in $\Theta(\tilde{O}^+(V,x))$ enthalten[4]). Man kann nun genauso weiterschließen wie im vorigen Fall und erhält ein zu Satz 2 analoges Ergebnis. Aus der Bedingung (6) kann man hier noch eine spezielle Folgerung ziehen: $M_{\mathfrak{p}}$ hat nämlich als eigentlichen Automorphismus die Multiplikation mit -1 mit der Spinornorm d. Es folgt also $d \in N_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}}(K_{\mathfrak{P}}^{\times})$ für alle $\mathfrak{p}$, also $d \in N_{K/k}(K^{\times})$, also wegen $-d = N_{K/k}(\sqrt{d})$ auch $-1 \in N_{K/k}(K^{\times})$. Umgekehrt muß daher d Norm aus dem Körper $k(\sqrt{-1})$, d.h. Summe zweier Quadrate aus k sein. Daß der Ausnahmefall überhaupt nicht auftreten kann, wie es den Resultaten von [9] entsprechen würde, scheint sich hier nicht zu ergeben.

[4]) Man kann sogar zeigen, daß die beiden Gruppen gleich sind.

Literatur

[1] BLIJ, F. VAN DER: On the theory of quadratic forms. Ann. Math. **50**, 875–883 (1949).

[2] CHEVALLEY, C.: La théorie du corps de classes. Ann. Math. **41**, 394–418 (1960).

[3] EICHLER, M.: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.

[4] – Die Ähnlichkeitsklassen indefiniter Gitter. Math. Z. **55**, 216–252 (1952).

[5] JONES, B. W., and G. L. WATSON: On indefinite ternary quadratic forms. Canad. J. Math. **8**, 592–608 (1956).

[6] KNESER, M.: Klassenzahlen indefiniter quadratischer Formen in drei oder mehr Veränderlichen. Arch. Math. **7**, 323–332 (1956).

[7] – Orthogonale Gruppen über algebraischen Zahlkörpern. J. reine angew. Math. **196**, 213–220 (1956).

[8] SIEGEL, C. L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, I, II, III. Ann. Math. **36**, 527–606 (1935); **37**, 230–263 (1936); **38**, 212–291 (1937).

[9] – Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie, I, II. Math. Ann. **124**, 17–54, 366–387 (1951).

[10] WATSON, G. L.: Integral quadratic forms. Cambridge 1960.

[11] – Representation of integers by indefinite quadratic forms. Mathematika **2**, 32–38 (1955).

[12] WEIL, A.: Adeles and algebraic groups. Lecture notes. Princeton 1961.

München, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 18. April 1961)

RIBENBOIM, P.
Math. Zeitschr. 77, 195–206 (1961)

Fonctions modulo un antifiltre

Dédié à M. FRIEDRICH KARL SCHMIDT à l'occasion de son 60ème anniversaire

Par

PAULO RIBENBOIM

Soit G un ensemble de fonctions définies sur l'ensemble X et à valeurs dans l'ensemble Y. Supposons donné un antifiltre A de l'algèbre de Boole $\mathscr{B}(X)$ des parties de X, c'est-à-dire, un ensemble A de parties de X, tel que: 1. $\emptyset \in A$, 2. si $M, N \in A$ alors $M \cup N \in A$, 3. si $M \in A$, $N \subset M$ alors $N \in A$. Comme il est bien connu, si on considère sur $\mathscr{B}(X)$ la structure d'anneau de Boole associée, alors les antifiltres sont exactement les idéaux de l'anneau de Boole. Pour écarter le cas trivial, nous supposerons, sauf mention du contraire, que $X \notin A$, pour tout antifiltre A.

Si $M, N \subset X$ posons $M \equiv N(A)$ lorsque la différence symétrique $M \ominus N = (M \cup N) - (M \cap N) \in A$; c'est une relation d'équivalence dont les classes forment l'algèbre de Boole quotient $\overline{\mathscr{B}(X)}$ (qui correspond à l'anneau de Boole quotient de $\mathscr{B}(X)$ par l'idéal A); notons $\varphi: \mathscr{B}(X) \to \overline{\mathscr{B}(X)}$ l'application canonique de passage au quotient.

Si $f, g \in G$ posons $f \equiv g(A)$ lorsque l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \in A$. C'est une relation d'équivalence, dont l'ensemble de classes sera noté $\overline{G}$ et la classe de $f \in G$ sera notée $\bar{f}$.

Pour chaque $f \in G$ considérons l'homomorphisme $f^{-1}: \mathscr{B}(Y) \to \mathscr{B}(X)$, défini par $f^{-1}(Q) = \{x \in X \mid f(x) \in Q\}$.

LEMME 1. *Si $f \equiv g(A)$ alors pour toute partie Q de Y on a $f^{-1}(Q) \equiv g^{-1}(Q)$ (A).*

En effet, soit $X_0 = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \in A$. Si $M = f^{-1}(Q)$, $N = g^{-1}(Q)$ alors $M \ominus N = [(M \ominus N) \cap X_0] \cup [(M \ominus N) \cap \mathscr{C} X_0] \in A$ car $(M \ominus N) \cap \mathscr{C} X_0 = \emptyset$.

Ainsi, à chaque classe $\bar{f} \in \overline{G}$ nous associons l'homomorphisme $\theta_{\bar{f}}: \mathscr{B}(Y) \to \overline{\mathscr{B}(X)}$, défini par $\theta_{\bar{f}} = \varphi \circ f^{-1}$ (où f est une fonction quelconque de la classe $\bar{f}$).

QUESTION: trouver des conditions sur l'antifiltre A, sur les ensembles X, Y et G qui soient suffisantes pour que l'application $\theta: \bar{f} \to \theta_{\bar{f}}$ soit biunivoque.

Tout d'abord, au n° 1, nous obtenons des résultats généraux qui ne présupposent aucune structure sur les ensembles X, Y et sur la nature des fonctions de G:

1. si A est un antifiltre principal, alors θ est biunivoque (en particulier, c'est le cas lorsque X est fini)

2. si Y est fini, alors θ est biunivoque, quel que soit l'antifiltre A

3. si A est l'antifiltre de toutes les parties finies de X alors θ est biunivoque

4. plus généralement, si $\text{pot}(Y)=\aleph$ (nombre cardinal arbitraire $\aleph \geqq \aleph_0$), si A est contenu dans l'antifiltre de toutes les parties de X ayant puissance strictement inférience à $\aleph$, alors θ est biunivoque

5. si $\text{pot}\, Y=\aleph$ (nombre cardinal arbitraire $\aleph \geqq \aleph_0$), si A est un $\aleph$-antifiltre (p. 198) de X, alors θ est biunivoque.

Remarquons d'ailleurs qu'on peut toujours se ramener au cas où $\text{pot}(X) \geqq \text{pot}(Y)$.

Nous sommes inclinés à croire que l'application θ ne soit pas *toujours* biunivoque; néanmoins, nous ne connaissons aucun exemple où cela se produise.

Au n° 2, nous considérons une question analogue, en faisant plus d'hypothèses, et nous obtenons les résultats qui suivent.

Soit X un ensemble, $\mathscr{L}(X)$ une σ-algèbre de Boole, sous-algèbre de celle de toutes les parties de X, avec $\emptyset, X \in \mathscr{L}(X)$. Soit Y un groupe abélien additif métrique, soit $\mathscr{L}(Y)=\{V(y, 1/n) \mid y \in Y, n>0\}$ où $V(y, 1/n)=\{y' \in Y \mid d(y, y')<1/n\}$. Supposons que pour tout $n>0$ il existe une famille dénombrable $\{y_1^{(n)}, \ldots, y_m^{(n)}, \ldots\}$ d'éléments de Y, de façon que $Y=\bigcup_{i=1}^{\infty} V(y_i^{(n)}, 1/n)$. Soit G un groupe abélien additif de fonctions de X à valeurs dans Y et supposons que si $f \in G$, $Q \in \mathscr{L}(Y)$ alors $f^{-1}(Q) \in \mathscr{L}(X)$. Soit A un $\aleph_0$-antifiltre de $\mathscr{L}(X)$. Si $M, N \in \mathscr{L}(X)$ posons $M \equiv N(A)$ lorsque $M \ominus N \in A$. Si $f, g \in G$ posons $f \equiv g(A)$ lorsque $X_0=\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \in A$. Alors:

1. si $f \equiv g(A)$ alors pour toute partie $Q \in \mathscr{L}(Y)$ on a $f^{-1}(Q) \equiv g^{-1}(Q)\ (A)$

2. si $f \not\equiv g(A)$ alors il existe $Q \in \mathscr{L}(Y)$ tel que $f^{-1}(Q) \not\equiv g^{-1}(Q)\ (A)$.

Si θ est l'application qui à chaque classe $\bar{f}$ de fonctions de G associe $\theta_{\bar{f}}=\varphi \circ f^{-1}$, homomorphisme de $\mathscr{L}(Y)$ dans $\mathscr{L}(X)/A$ (où φ: $\mathscr{L}(X) \to \mathscr{L}(X)/A$ désigne l'application canonique), ces résultats signifient que θ est biunivoque.

Un corollaire intéressant est le suivant:

Soit G l'ensemble des fonctions mésurables (au sens de Lebesgue), définies sur la droite réelle $X=R$ et à valeurs dans la droite réelle $Y=R$. Soit $\mathscr{L}(X)$ la σ-algèbre de Boole des ensembles mésurables de X, soit $\mathscr{L}(Y)$ la σ-algèbre de Boole des sous-ensembles de Y engendrés par les intervalles semi-ouverts à droite. Soit A le $\aleph_0$-antifiltre des ensembles de $\mathscr{L}(Y)$ ayant mésure nulle. Alors:

1. si $f \equiv g(A)$ alors pour toute partie $Q \in \mathscr{L}(Y)$ on a $f^{-1}(Q) \equiv g^{-1}(Q)\ (A)$

2. si $f \not\equiv g(A)$ alors il existe une partie $Q \in \mathscr{L}(Y)$ telle que $f^{-1}(Q) \not\equiv g^{-1}(Q)\ (A)$.

Au n° 3, nous considérons une question distincte. Etant donnés des ensembles X, Y et un homomorphisme θ de $\mathscr{B}(Y)$ dans $\mathscr{B}(X)$ tel que $\theta(Y)=X$ et $\theta(\emptyset)=\emptyset$, est-ce qu'il existe une application f: $X \to Y$ telle que $\theta=f^{-1}$? Nous démontrons que pour cela il faut et il suffit que θ préserve des intersections arbitraires. Ceci est obtenu comme corollaire d'un théorème.

Ensuite, nous considérons ce problème: données des sous-algèbres de Boole $\mathscr{A}(X)$, $\mathscr{A}(Y)$ de $\mathscr{B}(X)$, $\mathscr{B}(Y)$ respectivement, où Y est un groupe abélien

additif, et donné un ensemble G d'applications de X dans Y telles que $f^{-1}(Q)\in\mathscr{V}(X)$ lorsque $Q\in\mathscr{V}(Y)$, trouver des conditions suffisantes pour que G soit un sous-groupe de celui de toutes les applications de X dans Y.

Enfin, si X est un espace topologique, si Y est un espace topologique compact, si $\mathscr{V}(X)$, $\mathscr{V}(Y)$ désignent les réticulés des ensembles fermés de X, Y, resp., si $f\colon X\to Y$ est une fonction continue, telle que $f(X)=Y$, alors l'application $\theta=f^{-1}\colon \mathscr{V}(Y)\to\mathscr{V}(X)$ satisfait: 1. $\theta^{-1}(Q)=\emptyset$ si et seulement si $Q=\emptyset$ (où $Q\in\mathscr{V}(Y)$), 2. $\theta^{-1}(Y)=X$, 3. si $x\in\theta(Q)$, où $Q\in\mathscr{V}(Y)$, il existe $Q'\in\mathscr{V}(Y)$ tel que $x\in\theta(Q')$ et $\theta(Q)\cap\theta(Q')=\emptyset$.

Réciproquement, si on suppose en outre que Y est totalement discontinu et si $\theta\colon \mathscr{V}(Y)\to\mathscr{V}(X)$ est un homomorphisme de réticulé, satisfaisant les conditions 1, 2, 3, ci-dessus, alors il existe une fonction continue $f\colon X\to Y$ telle que $\theta(Q)=f^{-1}(Q)$ pour toute partie $Q\in\mathscr{V}(Y)$.

Les problèmes considérés dans cette note ont été suggerés par l'article de KRULL „Über geordnete Gruppen von reellen Funktionen", Math. Z. **64**, 10–40 (1956).

Nous voulons remercier notre collègue ALEX HELLER. Il nous a fait remarquer que le résultat (4) du n° 1 s'obtenait du troisième, avec démonstration analogue. De même, la démonstration ici présentée du corollaire au théorème 5 est dûe à lui.

1.

Commençons avec une remarque.

Soient X, Y des ensembles quelconques, G un ensemble de fonctions de X dans Y, A un antifiltre de parties de X ($X\notin A$) et soit θ l'application qui à chaque classe de fonctions $\bar{f}$ associe $\theta_{\bar{f}}=\varphi\circ f^{-1}\colon \mathscr{B}(Y)\to\overline{\mathscr{B}(X)}$ (cf. ces définitions et notations à l'Introduction). S'il s'agit de montrer que θ est biunivoque, c.a.d. si $f\not\equiv g(A)$ il existe $Q\subset Y$ telle que $f^{-1}(Q)\ominus g^{-1}(Q)\notin A$, nous pouvons nous restreindre sans perte de généralité au cas où $f(x)\neq g(x)$ pour tout $x\in X$.

En effet, soit $X_0=\{x\in X\mid f(x)\neq g(x)\}\notin A$, soit $A_0=\{M\cap X_0\mid M\in A\}$ donc A_0 est un antifiltre de parties de X_0; soient f_0, g_0 les restrictions de f, g à X_0; alors $f_0\not\equiv g_0(A_0)$ $f_0(x)\neq g_0(x)$ pour tout $x\in X_0$. Ainsi, il existerait $Q\subset Y$ telle que $f_0^{-1}(Q)\ominus g_0^{-1}(Q)\notin A_0$; or, de $f_0^{-1}(Q)=X_0\cap f^{-1}(Q)$, $g_0^{-1}(Q)=X_0\cap g^{-1}(Q)$ vient $X_0\cap[f^{-1}(Q)\ominus g^{-1}(Q)]=f_0^{-1}(Q)\ominus g_0^{-1}(Q)\notin A_0$ donc $f^{-1}(Q)\ominus g^{-1}(Q)\notin A$.

THÉORÈME 1. *Si A est un antifiltre principal, $A=\{N\in\mathscr{B}(X)\mid N\subset M\}$ (où $M\subset X$, $M\neq X$) alors l'application θ est biunivoque.*

DÉMONSTRATION: Soient $f, g\in G$ telles que $f(x)\neq g(x)$ pour tout $x\in X$. Soit $x_0\in X$, $x_0\notin M$ et $y_0=f(x_0)$; alors $f^{-1}(y_0)\ominus g^{-1}(y_0)=f^{-1}(y_0)\cup g^{-1}(y_0)\notin A$ car $x_0\in f^{-1}(y_0)$, $x_0\notin M$, et $f^{-1}(y_0)\cap g^{-1}(y_0)=\emptyset$.

THÉORÈME 2. *Si Y est fini, l'application θ est biunivoque, quel que soit l'antifiltre A.*

DÉMONSTRATION: Soient $f, g\in G$ telles que $f(x)\neq g(x)$ pour tout $x\in X$. Il existe $y_0\in Y$ tel que $f^{-1}(y_0)\notin A$, sinon on aurait $X=\bigcup_{y\in Y} f^{-1}(y)\in A$, car Y

est fini, ce qui est absurde. Ceci étant, $f^{-1}(y_0) \ominus g^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0) \cup g^{-1}(y_0) \notin A$, car $f^{-1}(y_0) \notin A$ et $f^{-1}(y_0) \cap g^{-1}(y_0) = \emptyset$.

THÉORÈME 3. *Si* $\mathrm{pot}(Y) = \aleph$ $(\aleph \geqq \aleph_0)$ *et si* A *est un antifiltre contenu dans l'antifiltre de toutes les parties de* X *ayant puissance strictement inférieure à* $\aleph$, *alors l'application* θ *est biunivoque.*

DÉMONSTRATION: Si $X \in A$ alors $f \equiv g(A)$ quels que soient $f, g \in G$ et l'affirmation du théorème est vide. Ainsi, nous pouvons supposer $X \notin A$. Par la remarque faite au début, si $f, g \in G$, $f \not\equiv g(A)$, on peut supposer sans perte de généralité que $f(x) \neq g(x)$ pour tout $x \in X$.

Pour tout $y \in Y$ on a $f^{-1}(y) \ominus g^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y) \in A$ sinon le théorème serait déjà vrai pour une partie $Q = \{y_0\}$; remarquons qu' on a aussi $f^{-1}(y) \cap g^{-1}(y) = \emptyset$ pour tout $y \in Y$.

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties Q de Y telles que $f^{-1}(Q) \cap g^{-1}(Q) = \emptyset$; donc $\mathscr{F}$ n'est pas vide. Ordonné par inclusion, $\mathscr{F}$ est inductif, car si $(Q_\alpha)_\alpha$ est une famille totalement ordonnée, $Q_\alpha \in \mathscr{F}$, si $Q' = \bigcup_\alpha Q_\alpha$, alors $f^{-1}(Q') \cap g^{-1}(Q') = \emptyset$, puisque si $f(x)$, $g(x) \in Q'$ il existerait α tel que $f(x)$, $g(x) \in Q_\alpha$, ce qui serait absurde.

Par le lemme de Zorn, il existe un élément maximal Q de $\mathscr{F}$; alors $f^{-1}(Q) \ominus g^{-1}(Q) = f^{-1}(Q) \cup g^{-1}(Q)$ puisque $f^{-1}(Q) \cap g^{-1}(Q) = \emptyset$. Si c'était $f^{-1}(Q) \ominus g^{-1}(Q) \notin A$ le théorème serait vrai. Ainsi, supposons que $f^{-1}(Q) \ominus g^{-1}(Q) \in A$, donc par hypothese $\mathrm{pot}\,(f^{-1}(Q) \cup g^{-1}(Q)) < \aleph$. Soit $\widetilde{Q} = f(f^{-1}(Q) \cup g^{-1}(Q)) \cup g(f^{-1}(Q) \cup g^{-1}(Q))$ donc $\mathrm{pot}\,(\widetilde{Q}) < \aleph = \mathrm{pot}\,(Y)$ et il existe $y_0 \in Y$, $y_0 \notin \widetilde{Q}$. Soit $Q' = Q \cup \{y_0\}$. Alors $f^{-1}(Q') \cap g^{-1}(Q') = [f^{-1}(Q) \cup f^{-1}(y_0)] \cap [g^{-1}(Q) \cup g^{-1}(y_0)] = [f^{-1}(Q) \cap g^{-1}(Q)] \cup [f^{-1}(Q) \cap g^{-1}(y_0)] \cup [f^{-1}(y_0) \cap g^{-1}(Q)] \cup [f^{-1}(y_0) \cap g^{-1}(y_0)] = \emptyset$, car si $x \in f^{-1}(Q)$ alors $g(x) \in \widetilde{Q}$ donc $g(x) \neq y_0$, et de même $f^{-1}(y_0) \cap g^{-1}(Q) = \emptyset$. Ainsi $Q' \in \mathscr{F}$, $Q \subset Q'$, $Q \neq Q'$, ce qui contradit la maximalité de Q. Ainsi, ce dernier cas ne peut pas se produire, et le théorème est vrai.

COROLLAIRE. *Si* A *est l'antifiltre de toutes les parties finies de* X *alors l'application* θ *est biunivoque.*

En effet, si Y est fini, c'est le théorème 2, si Y est infini alors $\mathrm{pot}\,(Y) \geqq \aleph_0$ et on est réduit au théorème 3.

Remarquons qu'on peut obtenir une démonstration de ce corollaire directement sans utiliser le lemme de Zorn. Nous laissons au lecteur le soin de le faire.

DÉFINITION. Un *antifiltre* A de parties d'un ensemble X est dit un $\aleph$-antifiltre (où $\aleph$ est un nombre cardinal infini) lorsque: si $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille de parties $X_\alpha \in A$ et $\mathrm{pot}\,(I) \leqq \aleph$ alors $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \in A$.

Tout antifiltre principal est un $\aleph$-antifiltre, quel que soit le nombre cardinal $\aleph$.

Si X est un ensemble ayant puissance au plus égale à $\aleph$, alors tout $\aleph$-antifiltre A de parties de X est nécessairement principal.

En effet, soit $X_0 = \{x \in X \mid \{x\} \in A\}$. De $\mathrm{pot}\,(X_0) \leqq \mathrm{pot}\,(X) \leqq \aleph$ il résulte que $X_0 \in A$ et il est clair que tout élément de A est alors une partie de X_0.

Par contre, si $\aleph < \text{pot}(X)$, on peut toujours trouver des $\aleph$-antifiltres de parties de X qui ne sont pas principaux. Par exemple, la famille des parties de X ayant puissance au plus égale à $\aleph$ est un antifiltre non principal de parties de X.

THÉORÈME 4. *Si* $\text{pot}(Y) = \aleph \geqq \aleph_0$ *et si* A *est un* $\aleph$*-antifiltre de parties de* X *alors l'application* θ *est biunivoque.*

DÉMONSTRATION: Si $\text{pot}(X) \leqq \aleph$ alors A est un antifiltre principal et le théorème est vrai. Supposons donc $\text{pot}(X) \geqq \text{pot}(Y)$. Soient $f, g \in G$, $f(x) \neq g(x)$ pour tout $x \in X$ (car si $X \in A$ l'affirmation serait vide).

Pour chaque $M_\alpha \subset X$ ayant complémentaire $\mathcal{C}M_\alpha \in A$ (donc $M_\alpha \notin A$) soit $\mathcal{E}_{M_\alpha}$ l'ensemble des parties *non vides* Q de Y telles que:

$$\text{(E)} \qquad \emptyset \neq [f^{-1}(Q) \cup g^{-1}(Q)] \cap M_\alpha \in A_{M_\alpha} = \{N \cap M_\alpha \mid N \in A\}.$$

Il est clair que $Y \notin \mathcal{E}_{M_\alpha}$, car $M_\alpha \notin A$.

Premier Cas. Supposons qu'il existe $M \subset X$, ayant complémentaire $\mathcal{C}M \in A$ et tel que $\mathcal{E}_{M_\alpha} = \emptyset$.

Soit $y \in f(M) \cup g(M)$. On a $f^{-1}(y) \cap g^{-1}(y) = \emptyset$, car $f(x) \neq g(x)$ pour tout $x \in X$. On a aussi $[f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y)] \cap M \neq \emptyset$. De $\mathcal{E}_M = \emptyset$ il résulte que $[f^{-1}(y) \ominus g^{-1}(y)] \cap M = [f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y)] \cap M \in A_M$, donc $f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y) \notin A$ et le théorème est vrai, avec $Q = \{y\}$.

Second Cas. Supposons que pour toute partie M_α de X ayant complémentaire $\mathcal{C}M_\alpha \in A$ on ait $\mathcal{E}_{M_\alpha} \neq \emptyset$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples $\Phi = (\mathcal{M}, \mathcal{Q})$ où:

$\mathcal{M}$ est un ensemble de parties M_α de X telles que:

(M 1) $\mathcal{C}M_\alpha \in A$ (donc $M_\alpha \notin A$)

(M 2) $\mathcal{M}$ est un ensemble totalement ordonné, strictement décroissant, bien ordonné;

$\mathcal{Q}$ est un ensemble de parties de Y telles que:

(Q 1) à chaque $M_\alpha \in \mathcal{M}$ correspond biunivoquement un ensemble $Q_\alpha \in \mathcal{E}_{M_\alpha}$

(Q 2) les ensembles $Q_\alpha \in \mathcal{Q}$ forment un ensemble totalement ordonné strictement croissant bien ordonné

(Q 3) pour tout $M_\alpha \in \mathcal{M}$, distinct du dernier élément de $\mathcal{M}$ (s'il en existe) on a $M_{\alpha+1} = M_\alpha - \{[f^{-1}(Q_\alpha) \cup g^{-1}(Q_\alpha)] \cap M_\alpha\}$ (donc $M_{\alpha+1} \neq M_\alpha$ car $Q_\alpha \in \mathcal{E}_{M_\alpha}$ donc $[f^{-1}(Q_\alpha) \cup g^{-1}(Q_\alpha)] \cap M_\alpha \neq \emptyset$)

(Q 4) si $Q = \bigcup_{Q_\alpha \in \mathcal{Q}} Q_\alpha$ alors $f^{-1}(Q) \ominus g^{-1}(Q) \in A$.

$\mathcal{F}$ n'est pas vide. En effet, soit $\mathcal{M}_0 = \{X\}$, $\mathcal{Q}_0 = \{Q\}$ où $Q \in \mathcal{E}_X$ (car $\mathcal{E}_X \neq \emptyset$). Alors $(\mathcal{M}_0, \mathcal{Q}_0) \in \mathcal{F}$.

Ordonnons $\mathcal{F}$, en posant $(\mathcal{M}, \mathcal{Q}) \leqq (\mathcal{M}', \mathcal{Q}')$ lorsque: $\mathcal{M}$ est un segment initial de $\mathcal{M}'$, $\mathcal{Q}$ est un segment initial de $\mathcal{Q}'$ et la correspondance biunivoque entre les ensembles de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{Q}$ est la restriction de la correspondance biunivoque entre les ensembles de $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{Q}'$.

Soit $(\Phi_\sigma)_\sigma$, $\Phi_\sigma=(\mathscr{M}_\sigma, \mathscr{Q}_\sigma)\in\mathscr{F}$, une famille totalement ordonnée croissante d'éléments de $\mathscr{F}$; soit $\Phi=(\mathscr{M}, \mathscr{Q})$ où $\mathscr{M}=\bigcup_\sigma \mathscr{M}_\sigma$, $\mathscr{Q}=\bigcup_\sigma \mathscr{Q}_\sigma$. Alors Φ satisfait les conditions $(M\,1)$, $(M\,2)$, $(Q\,1)$, $(Q\,2)$, $(Q\,3)$, comme on le vérifie aisément.

Si Φ ne satisfait pas la condition $(Q\,4)$, soit $Q=\bigcup_{Q_\alpha\in\mathscr{Q}} Q_\alpha$, donc $f^{-1}(Q)\circ g^{-1}(Q)\notin A$ et le théorème est démontré.

Ainsi, nous pouvons supposer que pour toute famille totalement ordonnée croissante $(\Phi_\sigma)_\sigma$ le couple Φ (défini ci-dessus) satisfait aussi la condition $(Q\,4)$; alors $\Phi\in\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}$ est donc un ensemble ordonné inductif, car Φ est la borne supérieure de la famille $(\Phi_\sigma)_\sigma$. Par le lemme de Zorn, $\mathscr{F}$ possède au moins un élément maximal, qui nous noterons $\Phi=(\mathscr{M}, \mathscr{Q})$.

Deux cas sont alors possibles.

A) Supposons qu'il existe M_β, le plus petit élément de $\mathscr{M}$ (donc $M_\beta\notin A$ et alors $M_\beta\neq\emptyset$).

Soit $Q'=Q_\beta\in\mathscr{C}_{M_\beta}$ (donc $Q'\neq Y$) correspondant à M_β (par $(Q\,1)$) et considérons $\widetilde{M}=M_\beta-\{[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap M_\beta\}$. On a $\emptyset\neq[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap M_\beta\in A_{M_\beta}\subset A$ donc $\widetilde{M}\subset M_\beta$, $\widetilde{M}\neq M_\beta$ et ainsi $\widetilde{M}\notin\mathscr{M}$.

De même, $\mathscr{C}\widetilde{M}=\mathscr{C}M_\beta\cup\{[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap M_\beta\}\in A$ car $\mathscr{C}M_\beta\in A$; donc $\widetilde{M}\notin A$ et ainsi $\widetilde{M}\neq\emptyset$.

Notons $\widetilde{Y}=\mathscr{C}Q'=\mathscr{C}\left(\bigcup_{Q_\alpha\in\mathscr{Q}} Q_\alpha\right)$; alors $Q'\neq Y$ entraîne $\widetilde{Y}\neq\emptyset$ et on a $f(\widetilde{M})\cup g(\widetilde{M})\subset\widetilde{Y}$, car $[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap\widetilde{M}=\emptyset$.

B) Supposons que $\mathscr{M}$ ne contient pas un plus petit élément.

Par $(Q\,2)$ l'ensemble $\mathscr{Q}=(Q_\alpha)_\alpha$ étant totalement ordonné strictement croissant, bien ordonné, il a une puissance au plus égale à $\mathrm{pot}(Y)=\aleph$; donc, par $(Q\,1)$, il en est de même pour l'ensemble $\mathscr{M}=(M_\alpha)_\alpha$. Or, A étant un $\aleph$-antifiltre et $\mathscr{C}M_\alpha\in A$ alors $\bigcup_{M_\alpha\in\mathscr{M}}\mathscr{C}M_\alpha=\mathscr{C}\left(\bigcap_{M_\alpha\in\mathscr{M}} M_\alpha\right)\in A$, c'est-à-dire, l'ensemble $\widetilde{M}=\bigcap_\alpha M_\alpha\notin\mathscr{M}$ a un complémentaire $\mathscr{C}\widetilde{M}\in A$, donc $\widetilde{M}\notin A$ et ainsi $\widetilde{M}\neq\emptyset$. Soit $Q'=\bigcup_\alpha Q_\alpha$.

On a $Q'\neq Y$ car $[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap\widetilde{M}=\emptyset$; en effet, si $x\in\widetilde{M}=\bigcup_\alpha M_\alpha$ et par exemple $f(x)\in Q'=\bigcup_\alpha Q_\alpha$, il existe α tel que $f(x)\in Q_\alpha$; or, M_α n'étant pas le dernier élément de $\mathscr{M}$, alors $x\in M_{\alpha+1}$ donc $x\in M_{\alpha+1}\cap[f^{-1}(Q_\alpha)\cup g^{-1}(Q_\alpha)]\cap M_\alpha$, ce qui est contraire à $(Q\,3)$.

Notons $\widetilde{Y}=\mathscr{C}Q'$ donc $\widetilde{Y}\neq\emptyset$ (car $Q'\neq Y$); enfin, $f(\widetilde{M})\cup g(\widetilde{M})\subset\widetilde{Y}$, car $[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap\widetilde{M}=\emptyset$.

Ainsi, nous venons de montrer dans les cas (A), (B) l'existence de $\widetilde{M}\subset X$, tel que $\widetilde{M}\notin\mathscr{M}$, $\widetilde{M}\subset M_\alpha$ pour tout $M_\alpha\in\mathscr{M}$, $\mathscr{C}\widetilde{M}\in A$, $\widetilde{M}\neq\emptyset$ et $f(\widetilde{M})\cup g(\widetilde{M})\subset\widetilde{Y}\neq\emptyset$, où $\widetilde{Y}=\mathscr{C}Q'$ et $Q'=\bigcup_{Q_\alpha\in\mathscr{Q}} Q_\alpha$.

Soit $\mathscr{E}_{\widetilde{M}}$ l'ensemble des parties *non vides* Q de $\widetilde{Y}$ telles que:

$$(\widetilde{E})\qquad \emptyset\neq[f^{-1}(Q)\cup g^{-1}(Q)]\cap\widetilde{M}\in A_{\widetilde{M}}=\{N\cap\widetilde{M}\mid N\in A\}.$$

Si $\tilde{\mathscr{E}}_{\tilde{M}}=\emptyset$, soit $y\in f(\tilde{M})\cup g(\tilde{M})$; de $f^{-1}(y)\cap g^{-1}(y)=\emptyset$ et $[f^{-1}(y)\cup g^{-1}(y)]\cap \tilde{M}\neq\emptyset$ résulte que $[f^{-1}(y)\ominus g^{-1}(y)]\cap\tilde{M}=[f^{-1}(y)\cup g^{-1}(y)]\cap\tilde{M}\notin A_{\tilde{M}}$ et ainsi nécessairement $f^{-1}(y)\ominus g^{-1}(y)\notin A$; le théorème est donc démontré.

Si, par contre, $\tilde{\mathscr{E}}_{\tilde{M}}\neq\emptyset$, soit $Q''\in\tilde{\mathscr{E}}_{\tilde{M}}$ (donc $\emptyset\neq Q''\subset\tilde{Y}$) et soit $\tilde{Q}=Q'\cup Q''$; de $Q''\subset\tilde{Y}$ vient $Q'\cap Q''=\emptyset$, donc $Q'\subset\tilde{Q}$, $Q'\neq\tilde{Q}$.

Posons $\tilde{\Phi}=(\tilde{\mathscr{M}},\tilde{\mathscr{Q}})$, où $\tilde{\mathscr{M}}=\mathscr{M}\cup\{\tilde{M}\}$, $\tilde{\mathscr{Q}}=\mathscr{Q}\cup\{\tilde{Q}\}$. Alors $\tilde{\Phi}$ satisfait $(M\,1)$, $(M\,2)$, $(Q\,1)$, $(Q\,2)$, $(Q\,3)$. Les seules vérifications qui méritent un peu d'attention sont celles de $(Q\,1)$ et $(Q\,3)$.

Pour vérifier $(Q\,1)$ il suffit de montrer que $\tilde{Q}\neq\emptyset$ satisfait

$$\emptyset\neq[f^{-1}(\tilde{Q})\cup g^{-1}(\tilde{Q})]\cap\tilde{M}\in A_{\tilde{M}}.$$

Or,

$$[f^{-1}(\tilde{Q})\cup g^{-1}(\tilde{Q})]\cap\tilde{M}=\{[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap\tilde{M}\}\cup\{[f^{-1}(Q'')\cup g^{-1}(Q'')]\cap\tilde{M}\}$$
$$=[f^{-1}(Q'')\cup g^{-1}(Q'')]\cap\tilde{M}$$

(par construction de Q') et ce dernier ensemble est non vide et appartient à $A_{\tilde{M}}$, car $Q''\in\tilde{\mathscr{E}}_{\tilde{M}}$.

Pour vérifier $(Q\,3)$, il suffit de le faire dans le cas (A), en montrant que $\tilde{M}=M_\beta-\{[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap M_\beta\}$ ce qui est vrai par définition de $\tilde{M}$.

Puisque $\Phi<\tilde{\Phi}$ strictement (car $\tilde{M}\notin\mathscr{M}$, $\tilde{Q}\notin\mathscr{Q}$) alors $\tilde{\Phi}$ ne satisfait pas $(Q\,4)$, en vertu de la maximalité de Φ.

Ainsi $f^{-1}(\tilde{Q})\ominus g^{-1}(\tilde{Q})\notin A$ et le théorème est démontré.

2.

Soit X un ensemble (supposé infini, pour écarter le cas trivial), soit $\mathscr{L}(X)$ une σ-algèbre de Boole de parties de X, qui soit une sous-algèbre de $\mathscr{B}(X)$ et telle que $\emptyset$, $X\in\mathscr{L}(X)$.

Soit Y un groupe abélien additif métrique, muni de la distance d. Pour tout $y\in Y$ et entier $n>0$ soit $V(y,1/n)=\{y'\in Y\mid d(y,y')<1/n\}$ et soit $\mathscr{L}(Y)=\{V(y,1/n)\mid y\in Y,\ n>0\}$.

Supposons que pour tout entier $n>0$ il existe une famille dénombrable $\{y_1^{(n)},\ldots,y_m^{(n)},\ldots\}$ d'éléments de Y tels que $Y=\bigcup_{i=1}^{\infty}V(y_i^{(n)},1/n)$.

Il résulte que $V(0,1/m)$ est la réunion (dénombrable) de tous les $V(y_i^{(n)},1/n)$ qui soient contenus dans $V(0,1/m)$.

En effet, $V(0,1/m)$ contient une telle réunion. Réciproquement, soit $y\in V(0,1/m)$, c'est-à-dire $d(y,0)<1/m$, soit n un entier assez grand tel que $2/n<1/m-d(y,0)$. Par l'hypothèse, il existe $y_i^{(n)}$ tel que $y\in V(y_i^{(n)},1/n)$, c'est-à-dire $d(y_i^{(n)},y)<1/n$; montrons que $V(y_i^{(n)},1/n)\subset V(0,1/m)$; si $y'\in V(y_i^{(n)},1/n)$ alors $d(y',y_i^{(n)})<1/n$ donc $d(y',0)\leq d(y',y_i^{(n)})+d(y_i^{(n)},y)+d(y,0)<1/n+1/n+d(y,0)<1/m$.

Soit G un groupe abélien additif de fonctions de X à valeurs dans Y et telles que si $f\in G$, $Q\in\mathscr{L}(Y)$ alors $f^{-1}(Q)\in\mathscr{L}(X)$.

Remarquons que si $f, g \in G$, si $X_0 = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ alors $X_0 \in \mathscr{L}(X)$. En effet, on a

$$X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{y_i^{(n)}} [\{x \in X \mid d(f(x), y_i^{(n)}) \geqq 1/n\} \cap \{x \in X \mid d(y_i^{(n)}, g(x)) < 1/n\}],$$

car si $f(x) \neq g(x)$ il existe n tel que $d(f(x), g(x)) > 2/n$; soit $y_i^{(n)}$ tel que $d(y_i^{(n)}, g(x)) < 1/n$ alors $d(f(x), y_i^{(n)}) \geqq 1/n$; réciproquement, s'il existe n et $y_i^{(n)} \in Y$ tels que $d(f(x), y_i^{(n)}) \geqq 1/n$, $d(y_i^{(n)}, g(x)) < 1/n$ alors nécessairement $f(x) \neq g(x)$.

Remarquons maintenant que pour tout $y \in Y$ on a $\{x \in X \mid d(f(x), y) \geqq 1/n\} = \mathscr{C} f^{-1}(V(y, 1/n)) \in \mathscr{L}(X)$ et $\{x \in X \mid d(y, g(x)) < 1/n\} = g^{-1}(V(y, 1/n)) \in \mathscr{L}(X)$; $\mathscr{L}(X)$ étant une σ-sous-algèbre de Boole de $\mathscr{B}(X)$, il résulte que $X_0 \in \mathscr{L}(X)$.

Soit maintenant A un $\aleph_0$-antifiltre de $\mathscr{L}(X)$, c.a.d. un sous-ensemble de $\mathscr{L}(X)$ tel que: 1. $\emptyset \in A$; 2. si $M, N \in \mathscr{L}(X)$, $M \subset N \in A$ alors $M \in A$; 3. si $(M_i)_i$ est une suite dénombrable de parties $M_i \in A$ alors $\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i \in A$.

Si $M, N \in \mathscr{L}(X)$ alors $M \ominus N = (M \cap \mathscr{C} N) \cup (\mathscr{C} M \cap N) \in \mathscr{L}(X)$. Posons $M \equiv N$ (A) lorsque $M \ominus N \in A$.

De même, si $f, g \in G$ posons $f \equiv g(A)$ lorsque $X_0 = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \in A$ (on a vu que X_0 appartient à $\mathscr{L}(X)$).

On vérifie aussitôt que ces relations sont des équivalences dans $\mathscr{L}(X)$ et G respectivement.

De même, comme au lemme 1, on démontre:

Si $f \equiv g(A)$ alors pour toute partie $Q \in \mathscr{L}(Y)$ on a $f^{-1}(Q) \equiv g^{-1}(Q)$ (A).

THÉORÈME 5. *Avec ces hypothèses et notations, si $f, g \in G$, $f \not\equiv g(A)$ il existe $Q \in \mathscr{L}(Y)$ tel que $f^{-1}(Q) \not\equiv g^{-1}(Q)$ (A).*

DÉMONSTRATION: Soient $f, g \in A$, $f \not\equiv g(A)$, donc $X_0 = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \in \mathscr{L}(X)$, mais $X_0 \notin A$.

Soit $M_n = \{x \in X \mid d(f(x), g(x)) \geqq 1/n\} = \{x \in X \mid d(h(x), 0) \geqq 1/n\}$, où $h = f - g \in G$; alors $\mathscr{C} M_n = h^{-1}(V(0, 1/n))$, donc de $h \in G$ vient $\mathscr{C} M_n \in \mathscr{L}(X)$ et alors $M_n \in \mathscr{L}(X)$ pour tout $n > 0$.

On a $X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, donc il existe un entier m tel que $M_m \notin A$ (car A est un $\aleph_0$-antifiltre). Soit n assez grand, tel que $2/n < 1/m$.

Pour cet entier n on a $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} V(y_i^{(n)}, 1/n)$ donc $X = f^{-1}(Y) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(V(y_i^{(n)}, 1/n))$ et alors $M_m = \bigcup_{i=1}^{\infty} [f^{-1}(V(y_i^{(n)}, 1/n)) \cap M_m]$; or, chaque $f^{-1}(V(y_i^{(n)}, 1/n)) \in \mathscr{L}(X)$ et aussi $M_m \in \mathscr{L}(X)$, donc A étant un $\aleph_0$-antifiltre, de $M_m \notin A$ il résulte l'existence de $j \geqq 1$ tel que $M_m \cap f^{-1}(V(y_j^{(n)}, 1/n)) \notin A$.

Or, $M_m \cap f^{-1}(V(y_j^{(n)}, 1/n)) \cap g^{-1}(V(y_j^{(n)}, 1/n)) = \emptyset$ car si $d(f(x), y_j^{(n)}) < 1/n$, $d(g(x), y_j^{(n)}) < 1/n$ alors $d(f(x), g(x)) < 2/n < 1/m$, donc $x \notin M_m$. Ainsi, $M_m \cap f^{-1}(V(y_j^{(n)}, 1/n)) \subset f^{-1}(V(y_j^{(n)}, 1/n)) \ominus g^{-1}(V(y_j^{(n)}, 1/n))$ et cette dernière différence symétrique n'est pas dans A, ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE. *Soit G l'ensemble des fonctions mésurables (au sens de Lebesgue) définies sur la droite réelle $X=R$ et à valeurs réelles, $Y=R$. Soit $\mathscr{L}(X)$ la σ-algèbre de Boole des ensembles mésurables de X, soit $\mathscr{L}(Y)$ la σ-algèbre de Boole de sous-ensembles de Y, engendrée par les intervalles semi-ouverts à droite. Soit A le $\aleph_0$-antifiltre des ensembles de $\mathscr{L}(X)$ ayant mesure nulle. Alors: 1. si $f, g\in G$ et $f\equiv g(A)$ alors $f^{-1}(Q)\equiv g^{-1}(Q)$ pour tout $Q\in\mathscr{L}(Y)$; 2. si $f, g\in G$ et $f\not\equiv g(A)$ alors il existe $Q\in\mathscr{L}(Y)$ tel que $f^{-1}(Q)\not\equiv g^{-1}(Q)$ (A).*

DÉMONSTRATION: La première affirmation se démontre comme au lemme 1; montrons donc la deuxième. En fait, on peut la considérer comme un cas particulier du théorème précedent, néanmoins nous fournirons une démonstration indépendante.

Soit $X_0=\{x\in X\,|\,f(x)\neq g(x)\}$; comme f, g sont des fonctions mésurables alors l'ensemble X_0 est mésurable, et on a $\mu(X_0)>0$, c'est-à-dire $X_0\notin A$, car $f\not\equiv g(A)$.

Soit $X_0^+=\{x\in X\,|\,f(x)>g(x)\}$, $X_0^-=\{x\in X\,|\,f(x)<g(x)\}$ donc $X_0=X_0^+\cup X_0^-$, $X_0^+\cap X_0^-=\emptyset$ avec $X_0^+, X_0^-\in\mathscr{L}(X)$. Alors de $X_0\notin A$ on a par exemple $X_0^+\notin A$ ou $X_0^-\notin A$, c'est-à-dire $\mu(X_0^+)>0$ ou $\mu(X_0^-)>0$. Supposons par exemple que $\mu(X_0^+)>0$.

Pour tout $n>0$, $M_n=\{x\in X\,|\,f(x)>g(x)+1/n\}$ est mésurable. Or, $X_0^+=\bigcup\limits_{n>0}M_n$ et $\emptyset=M_0\subset M_1\subset M_2\subset M_3\subset\cdots\subset M_n\subset\cdots$, donc $X_0^+=\bigcup\limits_{n>0}(M_n-M_{n-1})$ les ensembles M_n-M_{n-1} étant deux à deux disjoints et mésurables. Donc $\mu(X_0^+)=\sum\limits_1^\infty\mu(M_n-M_{n-1})>0$ et alors il existe $n_0>0$ tel que $\mu(M_{n_0}-M_{n_0-1})>0$, donc $\mu(M_{n_0})\geqq\mu(M_{n_0}-M_{n_0-1})>0$.

D'autre part, soit $Q_k=[k/n_0, k+1/n_0)$, donc $X=\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}f^{-1}(Q_k)$ et alors $M_{n_0}=\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}[f^{-1}(Q_k)\cap M_{n_0}]$, où chaque ensemble $f^{-1}(Q_k)\cap M_{n_0}$ est mésurable; ces ensembles $f^{-1}(Q_k)\cap M_{n_0}$ étant deux à deux disjoints, il existe k_0 tel que $\mu\left(f^{-1}(Q_{k_0})\cap M_{n_0}\right)>0$, car $0<\mu(M_{n_0})=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\mu\left(f^{-1}(Q_k)\cap M_{n_0}\right)$.

Or, on a par construction $M_{n_0}\cap f^{-1}(Q_{k_0})\cap g^{-1}(Q_{k_0})=\emptyset$. Ainsi, $M_{n_0}\cap f^{-1}(Q_{k_0})\subset f^{-1}(Q_{k_0})\ominus g^{-1}(Q_{k_0})\in\mathscr{L}(X)$, donc $\mu[f^{-1}(Q_{k_0})\ominus g^{-1}(Q_{k_0})]\geqq\mu\left(M_{n_0}\cap f^{-1}(Q_{k_0})\right)>0$ et alors $f^{-1}(Q_{k_0})\ominus g^{-1}(Q_{k_0})\notin A$.

3.

Soient X, Y des ensembles non vides, $\mathscr{B}(X), \mathscr{B}(Y)$ les algèbres de Boole de toutes les parties de X, Y resp. et soit θ un homomorphisme de $\mathscr{B}(Y)$ dans $\mathscr{B}(X)$ tel que $\theta(\emptyset)=\emptyset$; on peut supposer sans perte de généralité que $\theta(Y)=X$.

QUESTION: trouver des conditions pour qu'il existe une application f: $X\to Y$ telle que $\theta=f^{-1}$.

Nous montrerons que pour cela il faut et il suffit que $\theta\left(\bigcap\limits_\alpha Q_\alpha\right)=\bigcap\limits_\alpha\theta(Q_\alpha)$ pour toute famille $(Q_\alpha)_\alpha$ de parties de Y.

Ce résultat sera une conséquence immédiate du théorème qui suit.

THÉORÈME 6. *Soient X, Y des ensembles non vides, soient $\mathscr{V}(X)$, $\mathscr{V}(Y)$ des sous-algèbres de Boole de $\mathscr{B}(X)$, $\mathscr{B}(Y)$, telles que:*

1. $\emptyset, X \in \mathscr{V}(X)$, $\emptyset, Y \in \mathscr{V}(Y)$

2. *si U est un ultrafiltre de $\mathscr{V}(Y)$ alors l'intersection de tous les ensembles $Q_\alpha \in U$ est $\emptyset$ ou réduite à un point.*

Soit θ un homomorphisme de l'algèbre de Boole $\mathscr{V}(Y)$ dans $\mathscr{V}(X)$, tel que $\theta(\emptyset)=\emptyset$, $\theta(Y)=X$.

Pour qu'il existe une application $f: X \to Y$ telle que $\theta(Q)=f^{-1}(Q)$ pour tout $Q \in \mathscr{V}(Y)$ il faut et il suffit que: si $\bigcap_\alpha Q_\alpha = \emptyset$ alors $\bigcap_\alpha \theta(Q_\alpha)=\emptyset$ pour toute famille $(Q_\alpha)_\alpha$, $Q_\alpha \in \mathscr{V}(Y)$.

DÉMONSTRATION: Soit $\theta(Q)=f^{-1}(Q)$ pour tout $Q \in \mathscr{V}(Y)$, où f est une application de X dans Y. Alors si $Q_\alpha \in \mathscr{V}(Y)$ et $\bigcap_\alpha Q_\alpha = \emptyset$ on a $\bigcap_\alpha \theta(Q_\alpha) = \bigcap_\alpha f^{-1}(Q_\alpha) = f^{-1}(\bigcap_\alpha Q_\alpha) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Réciproquement, soit donné θ, avec les propriétés indiquées. Soit $x \in X = \theta(Y)$ et considérons l'ensemble $U_x = \{Q_\alpha \in \mathscr{V}(Y) \mid x \in \theta(Q_\alpha)\}$.

$U_x \neq \emptyset$ car $Y \in U_x$. U_x est un ultrafiltre de $\mathscr{V}(Y)$. En effet, si $Q_1, Q_2 \in U_x$ alors $Q_1 \cap Q_2 \in \mathscr{V}(Y)$ et $x \in \theta(Q_1) \cap \theta(Q_2) = \theta(Q_1 \cap Q_2)$ donc $Q_1 \cap Q_2 \in U_x$; si $Q_1, Q_2 \in \mathscr{V}(Y)$, $Q_1 \in U_x$, $Q_1 \subset Q_2$ alors $x \in \theta(Q_1) \subset \theta(Q_2)$ donc $Q_2 \in U_x$; si $Q_1, Q_2 \in \mathscr{V}(Y)$ et $Q_1 \cup Q_2 \in U_x$ alors $x \in \theta(Q_1 \cup Q_2) = \theta(Q_1) \cup \theta(Q_2)$ donc $x \in \theta(Q_1)$ ou $x \in \theta(Q_2)$, c.a.d. $Q_1 \in U_x$ ou $Q_2 \in U_x$.

Alors nécessairement $\bigcap_{Q_\alpha \in U_x} Q_\alpha$ est vide ou réduite à un point, disons $y \in Y$. Or, si c'était $\bigcap_{Q_\alpha \in U_x} Q_\alpha = \emptyset$ alors $x \in \bigcap_{Q_\alpha \in U_x} \theta(Q_\alpha) = \emptyset$, absurde. Donc $\bigcap_{Q_\alpha \in U_x} Q_\alpha = \{y\}$, $y \in Y$.

Posons $f(x)=y$ et montrons que $f^{-1}(Q)=\theta(Q)$ pour tout $Q \in \mathscr{V}(Y)$.

Si $x \in \theta(Q)$ alors $Q \in U_x$ donc $f(x)=y \in Q$ et $x \in f^{-1}(Q)$, ce qui montre $\theta(Q) \subset f^{-1}(Q)$. Réciproquement, si $x \in f^{-1}(Q)$, avec $Q \in \mathscr{V}(Y)$ et si c'était $x \notin \theta(Q)$ alors on aurait $Q \notin U_x$. Or, si $Q_\alpha \in U_x$ on a $Q \cap Q_\alpha \neq \emptyset$, car $x \in \theta(Q_\alpha)$, donc $x \in f^{-1}(Q_\alpha)$ et alors $x \in f^{-1}(Q) \cap f^{-1}(Q_\alpha) = f^{-1}(Q \cap Q_\alpha)$. Ainsi, $U_x \cup \{Q\}$ engendre un filtre de $\mathscr{V}(Y)$ strictement plus grand que U_x, distinct du filtre trivial de $\mathscr{V}(Y)$, absurde. Ainsi, $f^{-1}(Q) \subset \theta(Q)$ et alors $f^{-1}(Q)=\theta(Q)$.

COROLLAIRE. *Soient X, Y des ensembles non vides, soit θ un homomorphisme de $\mathscr{B}(Y)$ dans $\mathscr{B}(X)$ tel que $\theta(\emptyset)=\emptyset$, $\theta(Y)=X$. Pour qu'il existe une application $f: X \to Y$ telle que $\theta(Q)=f^{-1}(Q)$ pour tout $Q \subset Y$ il faut et il suffit que: si $\bigcap_\alpha Q_\alpha = \emptyset$ alors $\bigcap_\alpha \theta(Q_\alpha)=\emptyset$ pour toute famille $(Q_\alpha)_\alpha$ de parties de Y.*

Il suffit de remarquer que l'intersection de tous les ensembles d'un ultrafiltre U de $\mathscr{B}(Y)$ est vide ou bien réduite à un point.

A propos des sous-algèbres de Boole $\mathscr{V}(X)$, $\mathscr{V}(Y)$ considérons la question suivante: si G désigne l'ensemble des applications de X dans un groupe abélien additif Y telles que $f^{-1}(Q) \in \mathscr{V}(X)$ pour tout $Q \in \mathscr{V}(Y)$, trouver des conditions pour que G soit un sous-groupe additif de Y^X.

THÉORÈME 7. *Soit: 1. Y un groupe abélien additif ordonné, ayant une partie dénombrable dense (selon l'ordre) Y_0, c'est-à-dire, si $y_1 < y_2$ dans Y alors il existe $y_0 \in Y_0$ tel que $y_1 < y_0 < y_2$.*

2. $\mathscr{V}(Y)$ *la sous-algèbre de Boole des parties de* Y *engendrée par les ensembles du type* $\{y\in Y\mid y<y_1\}$ *ou* $\{y\in Y\mid y>y_1\}$ *lorsque* $y_1\in Y$.

3. $\mathscr{V}(X)$ *une sous-algèbre de Boole de parties de* X, *telle que si* $(L_n)_n$ *est une suite dénombrable,* $L_n\in\mathscr{V}(X)$, *alors* $\bigcup_n L_n\in\mathscr{V}(X)$.

Soit G *l'ensemble de toutes les applications* $f\colon X\to Y$ *telles que* $f^{-1}(Q)\in\mathscr{V}(X)$ *pour tout* $Q\in\mathscr{V}(Y)$.

Alors G *est un sous-groupe additif de* Y^X.

DÉMONSTRATION: Montrons que si $f, g\in G$ alors $f+g\in G$ et aussi $-f\in G$. Pour montrer que $h=f+g\in G$ il suffit de vérifier que si $Q=\{y\in Y\mid y<y_1\}$ et $Q=\{y\in Y\mid y_1<y\}$ alors $h^{-1}(Q)\in\mathscr{V}(X)$ car tout élément de $\mathscr{V}(Y)$ est obtenu des ensembles du type ci-dessus avec un nombre fini de réunions, intersections et passages au complémentaire, et $\mathscr{V}(X)$ est une sous-algèbre de Boole de $\mathscr{B}(X)$.

Montrons par exemple que si $Q=\{y\in Y\mid y<y_1\}$ alors $h^{-1}(Q)\in\mathscr{V}(X)$ (l'autre vérification étant analogue). On a $h^{-1}(Q)=\{x\in X\mid f(x)+g(x)<y_1\}=\{x\in X\mid f(x)<y_1-g(x)\}=\{x\in X\mid f(x)<g_1(x)\}$ où $g_1(x)=y_1-g(x)$ pour tout $x\in X$.

De $g\in G$ vient $g_1\in G$ car si $Q=\{y\in Y\mid y<y_2\}$ alors $g_1^{-1}(Q)=\{x\in X\mid g_1(x)=y_1-g(x)<y_2\}=\{x\in X\mid g(x)>y_1-y_2\}\in\mathscr{V}(X)$ et si $Q'=\{y\in Y\mid y>y_2\}$ alors $g_1^{-1}(Q')=\{x\in X\mid g_1(x)=y_1-g(x)>y_2\}=\{x\in X\mid g(x)<y_1-y_2\}\in\mathscr{V}(X)$; donc $g_1\in G$.

Montrons que $\{x\in X\mid f(x)<g_1(x)\}\in\mathscr{V}(X)$ lorsque $f, g_1\in G$.

Pour tout $y\in Y_0$ soit l'ensemble $E_y=\{x\in X\mid f(x)<y\}\cap\{x\in X\mid y<g_1(x)\}\in\mathscr{V}(X)$. Alors, puisque Y_0 est dénombrable, on a $\bigcup_{y\in Y_0}E_y\in\mathscr{V}(X)$. D'autre part $\bigcup_{y\in Y_0}E_y=\{x\in X\mid f(x)<g_1(x)\}$ car si $f(x)<g_1(x)$ il existe $y\in Y_0$ tel que $f(x)<y<g_1(x)$ donc $x\in E_y$.

Cela montre que $h=f+g\in G$.

Enfin, soit $f\in G$, alors $-f\in G$ car si $Q=\{y\in Y\mid y<y_1\}$ alors $(-f)^{-1}(Q)=\{x\in X\mid -f(x)<y_1\}=\{x\in X\mid f(x)>-y_1\}$, donc $(-f)^{-1}(Q)=f^{-1}(Q')\in\mathscr{V}(X)$ où $Q'=\{y\in Y\mid y>-y_1\}\in\mathscr{V}(Y)$ et ainsi $-f\in G$ (l'autre vérification étant analogue).

Si, en particulier, X, Y sont les groupes additifs des nombres réels et $\mathscr{V}(X)$ l'algèbre de Boole des ensembles Lebesgue-mésurables de X, on retrouve le fait que l'ensemble des fonctions Lebesgue mésurables forme un sous-groupe abélien additif de celui de toutes les fonctions.

THÉORÈME 8. *Soient* X *un espace topologique et* Y *un espace topologique compact et totalement discontinu. Si* $\mathscr{V}(X)$, $\mathscr{V}(Y)$ *désignent les réticulés des ensembles fermés de* X, Y *resp., soit* $\theta\colon\mathscr{V}(Y)\to\mathscr{V}(X)$ *un homomorphisme de réticulés satisfaisant:*

1. $\theta(Q)=\emptyset$ *si et seulement si* $Q=\emptyset$ *(avec* $Q\in\mathscr{V}(Y)$*)*

2. $\theta(Y)=X$

3. *si* $x\notin\theta(Q)$ *où* $Q\in\mathscr{V}(Y)$, *il existe* $Q'\in\mathscr{V}(Y)$ *tel que* $x\in\theta(Q')$ *et* $\theta(Q)\cap\theta(Q')=\emptyset$.

Alors il existe une fonction continue $f\colon X \to Y$ *telle que* $\theta(Q) = f^{-1}(Q)$ *pour tout* $Q \in \mathcal{F}(Y)$.

DÉMONSTRATION: Soit $x \in X$ et considérons l'ensemble $R_x = \{Q_\alpha \in \mathcal{F}(Y) \mid x \in \theta(Q_\alpha)\}$. $R_x \neq \emptyset$, car $Y \in R_x$.

On a $\bigcap_{Q_\alpha \in R_x} Q_\alpha \neq \emptyset$ autrement de la compacité de Y, il existerait une sous-famille finie $(Q_{\alpha_i})_{1 \leq i \leq n}$ avec $\bigcap_{i=1}^{n} Q_{\alpha_i} = \emptyset$, donc $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \theta(Q_{\alpha_i}) = \theta\left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_{\alpha_i}\right) = \theta(\emptyset) = \emptyset$, absurde.

Notons $Q_0 = \bigcap_{Q_\alpha \in R_x} Q_\alpha \neq \emptyset$. Nous allons montrer que Q_0 est réduit à un point. S'il n'en était pas ainsi, comme Y est totalement discontinu, Q_0 ne serait pas connexe, donc il existerait deux ensembles fermés $Q_1, Q_2 \in \mathcal{F}(Y)$ tels que $Q_0 < Q_1 \cup Q_2$, avec $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, $Q_1 \cap Q_0 \neq \emptyset$, $Q_2 \cap Q_0 \neq \emptyset$.

Notons $\theta(Q_1 \cup Q_2) = N \in \mathcal{F}(X)$; montrons que $x \in N$. Sinon, il existerait $Q' \in \mathcal{F}(Y)$ tel que $x \in \theta(Q')$ et $\theta(Q') \cap N = \emptyset$, donc $Q' \in R_x$ et alors $Q' > Q_0$; il résulte que $Q_0 < (Q_1 \cup Q_2) \cap Q'$ et $\theta(Q_0) < \theta(Q_1 \cup Q_2) \cap \theta(Q') = N \cap \theta(Q') = \emptyset$ donc $\theta(Q_0) = \emptyset$, absurde. Ainsi, on a bien $x \in N = \theta(Q_1) \cup \theta(Q_2)$ et par exemple $x \in \theta(Q_1)$ donc $Q_1 \in R_x$, $Q_0 < Q_1$ et enfin de $Q_0 \cap Q_2 < Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ il viendrait $Q_0 \cap Q_2 = \emptyset$, absurde.

Nous venons de montrer que $Q_0 = \bigcap_{Q_\alpha \in R_x} Q_\alpha$ est réduit à un point, $Q_0 = \{y\}$. Posons $f(x) = y$.

Montrons que $\varphi(Q) = f^{-1}(Q)$ pour tout $Q \in \mathcal{F}(Y)$; en particulier, cela entraîne que f est une fonction continue de X dans Y, car $\theta(Q) \in \mathcal{F}(X)$, réticulé des ensembles fermés de X.

Soit $x \in \theta(Q)$ donc $Q \in R_x$, $Q > \{y\} = \{f(x)\}$, c.a.d. $x \in f^{-1}(Q)$.

Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(Q)$; si on avait $x \notin \theta(Q)$, il existerait $Q' \in \mathcal{F}(Y)$ tel que $x \in \theta(Q')$, $\theta(Q') \cap \theta(Q) = \emptyset$, donc $\theta(Q' \cap Q) = \emptyset$ et ainsi $Q' \cap Q = \emptyset$; or, d'autre part, de $x \in \theta(Q')$ vient $x \in f^{-1}(Q')$ et ainsi $x \in f^{-1}(Q) \cap f^{-1}(Q') = f^{-1}(Q \cap Q') = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, absurde. Ainsi, on a bien $f^{-1}(Q) = \theta(Q)$ pour tout $Q \in \mathcal{F}(Y)$.

Remarquons que si X est un espace topologique, si Y est un espace topologique compact, si $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{F}(Y)$ désignent les réticulés des ensembles fermés de X, Y, resp., si $f\colon X \to Y$ est une fonction continue telle que $f(X) = Y$, alors l'application $f^{-1}\colon \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ satisfait les propriétés (1), (2), (3) du théorème précedent.

En effet, (1), (2) sont triviales. Quant à (3), si $x \notin f^{-1}(Q)$, $Q \in \mathcal{F}(Y)$, alors $f(x) \notin Q$; puisque Y est un espace compact, il est régulier, donc il existe un voisinage fermé Q' de $f(x)$, $Q' \cap Q = \emptyset$; par conséquent, $x \in f^{-1}(Q')$ et $f^{-1}(Q) \cap f^{-1}(Q') = f^{-1}(Q \cap Q') = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

University of Illinois, Urbana, Ill. (U.S.A.)

(Eingegangen am 6. April 1961)

BEHRENS, E.-A.
Math. Zeitschr. 77, 207–218 (1961)

Einreihige Ringe

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

ERNST-AUGUST BEHRENS

Einen Artin-Ring R, d.h. einen der Minimalbedingung für Linksideale genügenden Ring mit einem Einselement 1, bezeichnet man als einreihig, wenn er ringdirekte Summe primärer Ringe R_i ist, in denen jedes unzerlegbare Linksideal und jedes unzerlegbare Rechtsideal als R-Links- bzw. als R-Rechts-Modul nur eine einzige Kompositionsreihe besitzt. Wenn dabei die direkten Summanden R_i insbesondere vollständig primär, also die Faktorringe $R_i/\mathfrak{W}_i$ nach ihren Radikalen $\mathfrak{W}_i$ Körper sind, enthalten die R_i außer R_i selbst keine weiteren unzerlegbaren Links- oder Rechtsideale, die obige Forderung bedeutet dann, daß jedes R_i als einzige Kompositionsreihen sowohl von Links- als auch von Rechtsidealen die Loewy-Reihe der Potenzen $\mathfrak{W}_i^k$ besitzt, wobei $k=0, 1, \ldots, e_i$ und e_i der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}_i$ ist.

Bei vollständig primären R_i bietet jeder solche Ring ein Beispiel eines der vom Verfasser bereits früher diskutierten distributiv darstellbaren Ringe, d.h. eines Artin-Ringes R, der einen treuen R-Linksmodul $\mathfrak{m}$ mit distributivem R-Untermodulverband $V(\mathfrak{m})$ besitzt: Für $\mathfrak{m}$ braucht man nämlich nur den obigen einreihigen Ring R als R-Linksmodul zu nehmen, da dessen R-Linksuntermoduln gerade seine Linksideale sind.

Die Eigenschaft von R, sich selbst als R-Linksmodul mit distributivem R-Untermodulverband darzustellen, charakterisiert nach BEHRENS [4] unter allen distributiv darstellbaren Ringen die ringdirekten Summen vollständig primärer Ringe R_i mit den $\mathfrak{W}_i^k$ als einzigen Linksidealen R_i und zeichnet insbesondere unter den halbeinfachen Ringen die direkten Summen von Körpern aus. Letztere sind unter den halbeinfachen Ringen auch dadurch bestimmt, daß der Zentralisator $\mathfrak{Z}$ jedes treuen R-Linksmoduls $\mathfrak{m}$ von kürzest möglicher Länge zu R ringisomorph ist, oder auch dadurch, daß jedes Linksideal (zweiseitiges) Ideal ist. §1, Satz 2, besagt, daß diese drei Eigenschaften für distributiv darstellbare Ringe ebenfalls miteinander äquivalent sind.

R sei nun ein solcher Ring R_i, d.h. ein vollständig primärer Ring mit distributivem Linksidealverband. R sei außerdem cleft, d.h. als additive Gruppe sei R die direkte Summe $R=K+\mathfrak{W}$. Dann existiert ein Element ω in $\mathfrak{W}\setminus\mathfrak{W}^2$ derart, daß sich jedes Element ϱ aus R in der Form

$$\varrho=\varkappa_0\omega^0+\varkappa_1\omega^1+\cdots+\varkappa_{e-1}\omega^{e-1} \tag{1}$$

mit eindeutig bestimmten Elementen $\varkappa_i$ aus dem Körper K schreiben läßt (§2, (1), oder auch BEHRENS [5]). Dies bedeutet noch nicht, daß R ein einreihiger Ring ist, denn wie ein bereits von BAER in [3] diskutiertes und in

§2 nochmals vorgetragenes Beispiel zeigt, braucht ein vollständig primärer Ring $R=K+\mathfrak{W}$, dessen Linksidealverband aus den Potenzen $\mathfrak{W}^k$ seines Radikales $\mathfrak{W}$ besteht, nicht einreihig zu sein. Erst wenn man noch die Voraussetzung hinzunimmt, daß jeder Isomorphismus von K in sich ein Epimorphismus ist, läßt sich die Einreihigkeit beweisen (§2, Satz 1). — Auch ist die Struktur von R durch (f) noch nicht auf die Struktur von K zurückgeführt, da man dazu noch wissen muß, wie die Koeffizienten $\varkappa_i$ in (1) von dem Körperelement $\varkappa$ in $\varrho=\omega\varkappa$ abhängen. Diese Frage hängt mit den inneren Automorphismen und den inneren Ableitungen von K zusammen. Wenn nämlich K nur innere Automorphismen und nur innere Ableitungen besitzt oder wenn, falls R eine Algebra über dem kommutativen Körper Φ ist, dies über Φ gilt, läßt sich das in (1) benutzte Element ω in $\mathfrak{W}\setminus\mathfrak{W}^2$ so wählen, daß $\omega\varkappa=\varkappa\omega$ für alle $\varkappa\in K$ gilt. Wenn jedoch K einen äußeren Automorphismus oder eine äußere Ableitung besitzt, so gibt es unter den obigen Ringen bereits für $e=2$ bzw. $e=3$ solche, in denen kein derartiges ω existiert (§2, Sätze 2 und 3).

In den in §2 untersuchten Ringen ist jedes Linksideal ein (zweiseitiges) Ideal. Damit erhebt sich das Problem, ob für die obigen Resultate wohl schon die Voraussetzungen, daß R vollständig primär und der Verband seiner (zweiseitigen) Ideale distributiv ist, genügen. Dieser Frage sind die Überlegungen des Paragraphen 3 gewidmet. Die Multiplikationen eines Ringes $\mathfrak{o}$ mit Einselement von links und rechts mit festen Elementen aus $\mathfrak{o}$ erzeugen den Multiplikationsring R von $\mathfrak{o}$. Dabei ist $\mathfrak{o}$ natürlich treuer R-Linksmodul seines Multiplikationsringes R und die (zweiseitigen) Ideale in $\mathfrak{o}$ sind die bezüglich des Multiplikationsringes R zulässigen Untermoduln von $\mathfrak{o}$. Der Verband der Ideale in $\mathfrak{o}$ ist offenbar genau dann distributiv, wenn $\mathfrak{o}$ seinen Multiplikationsring R distributiv darstellt. Um hierbei die bisher entwickelte Theorie der distributiv darstellbaren Ringe anwenden zu können, muß man zuvor feststellen, ob der Multiplikationsring eines primären Ringes wieder primär ist. Wenn das auch durch die seit langem bekannte Tatsache nahegelegt wird, daß der Multiplikationsring einer Algebra $\mathfrak{o}$ genau dann einfach ist, wenn $\mathfrak{o}$ es ist, ist dies — selbst bei endlichem Rang von $\mathfrak{o}$ über seinem Zentrum $\mathfrak{z}$ — dann falsch, wenn $\mathfrak{z}$ zu klein ist, wie das Gegenbeispiel in §3 beweist. Daß mit $\mathfrak{o}$ auch R primär ist, ließ sich erst unter den Voraussetzungen beweisen, daß nicht nur der Rang von $\mathfrak{o}$ über seinem Zentrum $\mathfrak{z}$ endlich ist, sondern auch die von den Elementen z aus $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ induzierten Zentrumselemente von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ bereits das ganze Zentrum von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ ausfüllen, wobei $\mathfrak{w}$ das Radikal von $\mathfrak{o}$ ist (§3, Satz 2). Der Beweis ist nicht trivial, sondern man bedarf dazu eines Satzes, der auch im Aufbau der Galois-Theorie der einfachen Ringe eine Rolle spielt, s. z.B. KASCH [8]. Auf Grund dieser Erkenntnis kann man mit Hilfe bekannter Sätze über distributiv darstellbare Ringe sehr schnell schließen, daß unter den oben genannten Voraussetzungen der Verband $\mathfrak{V}$ der (zweiseitigen) Ideale in dem primären Ring $\mathfrak{o}$ dann und nur dann distributiv ist, wenn $\mathfrak{V}$ aus der Kette der $\mathfrak{w}^k$ besteht (§3, Satz 3). Wenn dabei insbesondere $\mathfrak{o}$ der vollständig primäre Ring $K+\mathfrak{w}$ ist, ist jedes Linksideal in $\mathfrak{o}$ zweiseitig und $\mathfrak{o}$ ein einreihiger Ring (§3, Satz 4).

§ 1

Unter den halbeinfachen Artin-Ringen sind die direkten Summen von Körpern durch jede der folgenden Eigenschaften charakterisierbar:

1. R ist treuer R-Linksmodul von kleinster (verbandstheoretischer) Länge, d.h. kein kürzerer Modul ist treu.

2. Der Zentralisator eines jeden treuen R-Linksmoduls $\mathfrak{m}$ von kleinster Länge ist zu R ringisomorph.

3. Jedes Linksideal von R ist (zweiseitiges) Ideal.

Die halbeinfachen Ringe sind Beispiele für distributiv darstellbare Artin-Ringe, d.h. für Ringe R mit Einselement, die einen treuen R-Modul $\mathfrak{m}$ mit distributivem R-Untermodulverband $V(\mathfrak{m})$ besitzen. In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, daß auch für beliebige distributiv darstellbare Ringe die obigen drei Eigenschaften miteinander äquivalent sind und daß sie unter den distributiv darstellbaren Ringen die ringdirekten Summen vollständig primärer Ringe mit distributivem Linksidealverband charakterisieren.

$\mathfrak{m}$ sei ein treuer R-Modul mit distributivem R-Untermodulverband V. Nach Behrens [5], Satz 2, ist $\mathfrak{m}$ zyklisch, $\mathfrak{m}=Rb$, und damit $\mathfrak{m}$ als R-Linksmodul isomorph zu dem Faktormodul $R-\mathfrak{l}$, wobei $\mathfrak{l}$ das Linksideal $(0:b)=\{\tau\,|\,\tau\in R,\ \tau b=0\}$ ist. Der Zentralisator $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{m}$ besteht aus allen denjenigen Endomorphismen Γ der additiven abelschen Gruppe $\mathfrak{m}$, die mit den Operatoren aus R vertauschbar sind, d.h. $(\varrho m)\Gamma=\varrho(m\Gamma)$ für alle $\varrho\in R$, $m\in\mathfrak{m}$, $\Gamma\in\mathfrak{Z}$. Auf Grund der Operator-Isomorphie der R-Moduln $\mathfrak{m}$ und $R-\mathfrak{l}$ läßt sich die algebraische Struktur von $\mathfrak{Z}$ durch die Bilder $\gamma \bmod \mathfrak{l}$ des Elementes $1 \bmod \mathfrak{l}$ unter den Endomorphismen Γ aus $\mathfrak{Z}$ erfassen. Genau diejenigen Elemente $\gamma\in R$ definieren in dieser Weise Endomorphismen Γ aus dem Zentralisator $\mathfrak{Z}$ von $R-\mathfrak{l}$, für die $\mathfrak{l}\gamma\subseteqq\mathfrak{l}$ gilt, und zwei solche Elemente γ_1 und γ_2 induzieren dann und nur dann dasselbe Element aus $\mathfrak{Z}$, wenn $\gamma_1\equiv\gamma_2 \pmod{\mathfrak{l}}$ gilt. Mit anderen Worten

Satz 1. *R werde durch den R-Modul $\mathfrak{m}$ distributiv dargestellt. Für das Linksideal $\mathfrak{l}$ seien $\mathfrak{m}$ und $R-\mathfrak{l}$ zueinander als R-Moduln isomorph. Dann ist der Zentralisator $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{m}$ ringisomorph zu*

$$\{\gamma \bmod \mathfrak{l}\,|\,\gamma\in R,\ \mathfrak{l}\gamma\subseteqq\mathfrak{l}\}. \tag{1}$$

R sei nun ein distributiv darstellbarer Ring. Nach Behrens [5], Satz 1, stellen genau diejenigen R-Moduln $\mathfrak{m}$ den Ring R distributiv dar, deren verbandstheoretische Länge unter allen treuen R-Moduln kleinstmöglich ist. Hieraus folgt für distributiv darstellbare Ringe die Äquivalenz der beiden zu Anfang dieses Paragraphen erwähnten Eigenschaften 1. und 2.: Wenn nämlich $\mathfrak{m}\cong R-\mathfrak{l}$ irgendein distributiver R-Modul ist, dann ist nach Satz 1, (1), der Zentralisator $\mathfrak{Z}$ dann und nuf dann zu R ringisomorph, wenn $\mathfrak{l}=0$, also $\mathfrak{m}$ zu $R-0=R$ als R-Linksmodul isomorph und damit R ein treuer R-Modul kleinster Länge ist. — Wenn die obige Eigenschaft 3. erfüllt, d.h. jedes Linksideal von R zweiseitig ist, so gilt dies insbesondere für das Linksideal $\mathfrak{l}$ in einem den Ring R distributiv darstellenden Modul $R-\mathfrak{l}$. Da $R-\mathfrak{l}$

nach Definition eines R distributiv darstellenden Moduls treu ist, würde aus $\mathfrak{l} \neq 0$ folgen $\mathfrak{l}(R-\mathfrak{l}) \neq 0$, was $\mathfrak{l}R \subseteq \mathfrak{l}$ widerspräche. Also ist $\mathfrak{l}=0$ und damit R selbst ein distributiver R-Modul. Daß schließlich auch umgekehrt aus 1. die Eigenschaft 3. folgt, wurde bereits in BEHRENS [4], im Korollar 1 zu Satz 7, bewiesen und folgt außerdem auch daraus, daß nach BEHRENS [6], Satz 1, jeder R-Untermodul eines distributiven R-Linksmoduls $\mathfrak{m}$ vollinvariant ist und die Multiplikationen des R-Linksmoduls R mit Elementen aus R von rechts R-Endomorphismen in R induzieren. — Genauer wurde in BEHRENS [4] gezeigt, daß, wenn der Verband der Linksideale von R distributiv ist, R eine ringdirekte Summe vollständig primärer Ringe R_i ist, deren einseitige Linksideale die Potenzen $\mathfrak{W}_i^k$ der Radikale $\mathfrak{W}_i$ der Ringe R_i sind.

Dies sei zusammengefaßt zu dem

SATZ 2. *Voraussetzung: R sei ein distributiv darstellbarer Ring.*

Behauptungen: I. *Folgende Eigenschaften von R sind miteinander äquivalent:*

1. *R ist ein R-Linksmodul kleinstmöglicher Länge unter allen treuen R-Linksmoduln, d.h. kein R-Modul kürzerer Länge ist treu.*

2. *Der Zentralisator $\mathfrak{Z}$ eines jeden treuen R-Linksmoduls von kleinstmöglicher Länge ist ringisomorph zu R.*

3. *Jedes Linksideal von R ist (zweiseitiges) Ideal.*

4. *R ist distributiver R-Linksmodul.*

II. *Wenn eine dieser vier Eigenschaften für R erfüllt ist, dann ist R ringdirekte Summe vollständig primärer Ringe R_i, deren einzige Ideale die Potenzen $\mathfrak{W}_i^k$ ihrer Radikale $\mathfrak{W}_i$ sind.*

Wenn umgekehrt ein Artin-Ring R mit Einselement ringdirekte Summe vollständig primärer Ringe R_i ist, deren einzige Linksideale die Potenzen $\mathfrak{W}_i^k$ sind, wird jedes R_i durch sich selbst als R_i-Linksmodul und damit R durch sich selbst als R-Linksmodul distributiv dargestellt, denn die Linksidealverbände der R_i sind Ketten und R ist treuer R-Linksmodul.

§ 2

Ein Ring R heißt einreihig, wenn er ringdirekte Summe primärer Ringe R_i ist, in denen jedes unzerlegbare Linksideal und jedes unzerlegbare Rechtsideal nur eine Kompositionsreihe besitzt, s. z.B. KÖTHE [9] oder WALL [10]. Wenn der distributiv darstellbare Ring R eine der in §1, Satz 2, genannten Eigenschaften hat, sind seine direkten Summanden R_i die einzigen unzerlegbaren Links- bzw. Rechtsideale in R, denn ein vollständig primärer Ring enthält nur sich selbst als unzerlegbares Links- oder Rechtsideal. Die Potenzen des Radikales $\mathfrak{W}_i$ bilden dabei die einzige Kompositionsreihe von Linksidealen in R_i. Die R_i und damit auch R sind jedoch erst dann einreihig, wenn die $\mathfrak{W}_i^k$ auch eine Kompositionsreihe von Rechtsidealen in R_i bilden. Die folgenden Ausführungen werden zeigen, daß dies im Gegensatz zu BEHRENS [4], Korollar 2 zu Satz 7 nicht ganz trivial ist, sondern daß dazu die letzte der im folgenden Satz 1 genannten Voraussetzungen unerläßlich ist.

Der vollständig primäre Artin-Ring R sei cleft, d.h. die additive Gruppe von Rlasse sich als direkte Summe $R=K+\mathfrak{W}$ darstellen und die $\mathfrak{W}^k$ seien die einzigen Linksideale in R. ω sei ein in $\mathfrak{W}$ aber nicht in $\mathfrak{W}^2$ liegendes Ringelement. Dann ist $\mathfrak{W}=R\omega$, da $R\omega$ als Linksideal eines der Ideale $\mathfrak{W}^j$ sein muß. Aus der Induktionsannahme $\mathfrak{W}^k=R\omega^k$ folgt $\mathfrak{W}^{k+1}=\mathfrak{W}\omega^k=R\omega^{k+1}$. Der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}$ sei e, d.h. $\mathfrak{W}^{e-1}\neq 0$, $\mathfrak{W}^e=0$. Da $\mathfrak{W}^k/\mathfrak{W}^{k+1}$ ein irreduzibler R-Linksmodul, also ein K-Linksmodul ist, lassen sich für $k=0, 1, \ldots, e-1$ alle Elemente ϱ aus $\mathfrak{W}^k$ in der Form

$$\varrho=\varkappa_k\omega^k+\varkappa_{k+1}\omega^{k+1}+\cdots+\varkappa_{e-1}\omega^{e-1} \tag{1}$$

mit eindeutig bestimmten Elementen $\varkappa_k$ aus K schreiben. Für $\lambda_k, \ldots, \lambda_{e-1}\in K$ liegt das Element

$$\varrho=\omega^k\lambda_k+\cdots+\omega^{e-1}\lambda_{e-1} \tag{2}$$

in $\mathfrak{W}^k$, läßt sich also wegen (1) in der Form

$$\varrho=\lambda_k^*\omega^k+\varkappa_{k+1}\omega^{k+1}+\cdots+\varkappa_{e-1}\omega^{e-1} \tag{3}$$

darstellen. Die Abbildung $\lambda_k\to\lambda_k^*$ ist dabei ein Isomorphismus des Körpers K in sich, da für alle $\lambda, \mu\in K$ die Kongruenzen

$$\omega^k\cdot\lambda\mu=\omega^k\lambda\cdot\mu\equiv\lambda^*\omega^k\mu\equiv\lambda^*\mu^*\omega^k \pmod{\mathfrak{W}^{k+1}}$$

richtig sind und $\varkappa\omega^k\in\mathfrak{W}^{k+1}$ impliziert $\varkappa=0$, da K ein Körper ist. Unter der Voraussetzung, daß K nur Automorphismen, aber keine Isomorphismen auf einen echten Teilkörper besitzt, erfüllen die Bilder λ_k^* bei der obigen Abbildung ganz K. Hieraus folgt, daß sich für $k=0, 1, \ldots, e-1$ jedes Element ϱ aus $\mathfrak{W}^k$ auch in der Form (2) mit eindeutig bestimmten $\lambda_k\in K$ schreiben läßt, und weiter, daß die Faktorgruppen $\mathfrak{W}^k/\mathfrak{W}^{k+1}$ als R-Rechtsmoduln ebenfalls irreduzibel sind, daß also R einreihig ist.

Satz 1. *Voraussetzungen: Der vollständig primäre Artin-Ring R sei cleft, d.h. $R=K+\mathfrak{W}$. R sei distributiv darstellbar und besitze eine der vier in* §1, *Satz* 2, *genannten, einander äquivalenten Eigenschaften* 1. *bis* 4. *Jeder Isomorphismus von K in sich sei ein Automorphismus.*

Behauptungen: 1. *R ist einreihig mit den Potenzen $\mathfrak{W}^k$ als einzigen einseitigen Idealen.* 2. *$\mathfrak{W}\setminus\mathfrak{W}^2$ enthält ein Element ω, mit dessen Hilfe sich jedes Element ϱ aus $\mathfrak{W}^k$ in der Form* (1) *oder* (2) *mit eindeutig bestimmten $\varkappa_j$ bzw. λ_j aus K schreiben läßt.*

Die Verallgemeinerung dieses Satzes auf ringdirekte Summen primärer Ringe ist trivial. Natürlich ist auch umgekehrt jeder einreihige Ring $R=R_1\oplus R_2\oplus\cdots\oplus R_q$ mit vollständig primären Summanden R_i ein durch sich selbst als R-Linksmodul distributiv dargestellter Ring, in dem jedes einseitige Ideal zweiseitig ist.

Daß man hierbei die Voraussetzung, daß jeder Isomorphismus von K in sich ein Automorphismus ist, nicht weglassen kann, zeigt folgendes von R. Baer in [3] eingeführtes Beispiel (nach Vertauschung von links mit rechts):

Sei * ein Isomorphismus des kommutativen Körpers K in einen echten Unterkörper K^* von K. Sei $R=\{(f,g)\,|\,f,g\in K\}$ mit komponentenweiser Addition und $(f',g')\cdot(f,g)=(f'f, f'g+g'f^*)$ als Multiplikation. Außer (0) und R enthält R als einziges Linksideal das zweiseitige Ideal $\mathfrak{W}=\{(0,b)\,|\,b\in K\}$. Dagegen ist $\mathfrak{r}=\{(0,b^*)\,|\,b\in K\}$ ein von diesen drei Idealen verschiedenes Rechtsideal. R ist vollständig primär, sein Radikal $\mathfrak{W}$ hat den Exponenten zwei und es gilt $R=K+\mathfrak{W}$.

Wenn $\mathfrak{W}\setminus\mathfrak{W}^2$ sogar ein Element ω enthält, das mit allen Elementen $\varkappa$ aus K vertauschbar ist, dann ist die Struktur des Ringes R durch die Darstellungen (1) oder (2) seiner Elemente ϱ völlig aufgeklärt. Für die Existenz eines solchen ω ist zumindest notwendig, daß für $k=2$ der zu ω in obigem Sinne gehörende Isomorphismus $\lambda\to\lambda^*$ von K in sich die identische Abbildung von K auf sich ist. Wenn nun K als Isomorphismen in sich nur innere Automorphismen besitzt oder, falls R eine Algebra über dem kommutativen Körper Φ ist, wenn zu K als Isomorphismen über Φ in K nur innere Automorphismen über Φ existieren, läßt sich ω so wählen, daß die Abbildung * die identische Abbildung ist. Für ein beliebiges $\omega_0\in\mathfrak{W}\setminus\mathfrak{W}^2$ folgt nämlich zunächst aus $\omega_0\lambda\equiv\lambda^*\omega_0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{W}^2)$, $\lambda\in K$ und $\lambda^*=\varkappa_0^{-1}\lambda\varkappa_0$, $\varkappa_0\in K$, für $\varphi=\varkappa_0\omega_0$ die Kongruenz

$$\omega\lambda=\varkappa_0\omega_0\lambda\equiv\varkappa_0\lambda^*\omega_0=\varkappa_0\lambda^*\varkappa_0^{-1}\omega=\lambda\omega\quad(\mathrm{mod}\,\mathfrak{W}^2),$$

also

$$\omega^k\lambda\equiv\lambda\omega^k\quad(\mathrm{mod}\,\mathfrak{W}^{k+1}).$$

Wenn $\mathfrak{W}^2=0$, ist damit, wegen $\omega\mathfrak{W}=0$, die erste Behauptung des folgenden Satzes bewiesen und daher die Struktur von R in diesem Fall auf die des Körpers K zurückgeführt.

SATZ 2. *Voraussetzungen: Der Linksidealverband des Artin-Ringes $R=K+\mathfrak{W}$ sei distributiv. Der Exponent e des Radikales $\mathfrak{W}$ sei 2.*

Behauptungen: 1. *Wenn jeder Isomorphismus des Körpers K in sich ein innerer Automorphismus von K ist oder, wenn, falls R eine Algebra über dem kommutativen Körper Φ ist, jeder Isomorphismus von K über Φ in sich ein innerer Automorphismus von K über Φ ist, enthält $\mathfrak{W}$ ein solches mit allen Elementen aus K vertauschbares Element ω, daß jedes Element $\varrho\in R$ sich mit eindeutig bestimmten Elementen $\varkappa_0$ und $\varkappa_1$ aus K in der Form $\varrho=\varkappa_0+\varkappa_1\omega$ schreiben läßt.*

2. *Wenn K ein Körper mit einem äußeren Automorphismus * ist, existiert ein Ring $R=K+\mathfrak{W}$, $e=2$, mit distributivem Linksidealverband, in welchem sich kein Element ω in $\mathfrak{W}$ mit den in der ersten Behauptung genannten Eigenschaften finden läßt.*

Zum Beweis der 2. Behauptung sei $R=\{(\varkappa_0,\varkappa_1)\,|\,\varkappa_i\in K\}$ mit komponentenweiser Addition und mit der Multiplikation

$$(\varkappa_0,\varkappa_1)\cdot(\lambda_0,\lambda_1)=(\varkappa_0\lambda_0,\varkappa_0\lambda_1+\varkappa_1\lambda_0^*),$$

d.h. $\omega_0\varkappa=\varkappa^*\omega_0$, wenn man $\varkappa=(\varkappa,1)$, $\omega_0=(0,1)$ setzt. Dann sind (0), $\mathfrak{W}=K\omega_0$, und R die einzigen einseitigen Ideale in $R=K+\mathfrak{W}$. Würde in $\mathfrak{W}$

ein $\omega \neq 0$ mit $\omega\lambda = \lambda\omega$ für alle $\lambda \in K$ existieren, dann wäre $\omega = \varkappa_0\omega_0$ für ein geeignetes $\varkappa_0 \in K$, also wäre für alle $\lambda \in K$ das Produkt $\omega\lambda = \varkappa_0\omega_0\lambda = \varkappa_0\lambda^*\omega_0 = \varkappa_0\lambda^*\varkappa_0^{-1}\omega$, also $\lambda^* = \varkappa_0^{-1}\lambda\varkappa_0$, und daher * doch ein innerer Automorphismus von K.

Falls der Exponent e des Radikales größer als 2 ist, folgt die Existenz eines mit allen $\varkappa \in K$ vertauschbaren Elementes $\omega \in \mathfrak{W} \setminus \mathfrak{W}^2$, wenn man überdies noch voraussetzt, daß K auch ausschließlich innere Ableitungen (bzw. innere Ableitungen über Φ) besitzt, d.h. daß für jeden Endomorphismus $\lambda \to \lambda'$ von K bzw. für jede Φ-lineare Abbildung von K in sich mit $(\lambda_1\lambda_2)' = \lambda_1'\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2'$ ein Element γ in K existiert mit $\lambda' = \lambda\gamma - \gamma\lambda$. Zum Beweis sei zur vollständigen Induktion nach k für $k \geqq 2$ angenommen, daß ein Element $\omega_k \in \mathfrak{W} \setminus \mathfrak{W}^2$ existiert, für welches

$$\omega_k \varkappa \equiv \varkappa \omega_k \pmod{\mathfrak{W}^k} \tag{4}$$

für alle $\varkappa \in K$ richtig ist. Hierbei ergibt sich die Existenz von ω_2, also die Verankerung der vollständigen Induktion, aus der ersten Behauptung von Satz 1. Für dieses ω_k existiert für jedes $\varkappa$ genau ein Element $\varkappa'$ in K für welches

$$\omega_k \varkappa \equiv (\varkappa + \varkappa' \omega_k^{k-1})\,\omega_k \pmod{\mathfrak{W}^{k+1}} \tag{5}$$

gilt, denn nach (1) ist jedes Element aus $\mathfrak{W}^k$ modulo $\mathfrak{W}^{k+1}$ genau einem Element $\mu\omega_k^k$ kongruent, $\mu \in K$. Sei auch $\lambda \in K$. Für das Produkt $\varkappa\lambda$ folgt einerseits aus (5) die Kongruenz

$$\omega_k \cdot \varkappa\lambda \equiv \left(\varkappa\lambda + (\varkappa\lambda)' \omega_k^{k-1}\right)\omega_k \pmod{\mathfrak{W}^{k+1}} \tag{6}$$

und andererseits, ebenfalls modulo $\mathfrak{W}^{k+1}$ die Kongruenzen

$$\begin{aligned}\omega_k \varkappa \cdot \lambda &\equiv (\varkappa + \varkappa' \omega_k^{k-1})\,\omega_k \cdot \lambda \equiv \varkappa \cdot \omega_k\lambda + \varkappa' \cdot \omega_k^k \lambda \\ &\equiv \varkappa(\lambda + \lambda' \omega_k^{k-1})\,\omega_k + \varkappa'\lambda\omega_k^k,\end{aligned}$$

also

$$\omega_k \cdot \varkappa\lambda \equiv \varkappa\lambda\omega_k + (\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda)\,\omega_k^k \pmod{\mathfrak{W}^{k+1}}. \tag{7}$$

Der Vergleich von (6) und (7) zeigt, daß der Endomorphismus $\varkappa \to \varkappa'$ von K in sich eine Ableitung ist. Wenn nun K nur innere Ableitungen besitzt, existiert zu diesem Endomorphismus ein $\gamma \in K$ mit $\varkappa' = \varkappa\gamma - \gamma\varkappa$. Somit läßt sich (5) in der Form

$$\omega_k \varkappa \equiv \left(\varkappa + (\varkappa\gamma - \gamma\varkappa)\,\omega_k^{k-1}\right)\omega_k \pmod{\mathfrak{W}^{k+1}} \tag{8}$$

schreiben. Setzt man $\omega_{k+1} = \omega_k + \gamma\omega_k^k$, so folgt aus (8) die Kongruenz (4) für $k+1$ statt k. Wegen $\mathfrak{W}^e = 0$ ergibt sich in $\omega = \omega_e$ ein mit allen $\varkappa \in K$ vertauschbares Element aus $\mathfrak{W} \setminus \mathfrak{W}^2$. Damit ist die erste Behauptung der folgenden Verallgemeinerung des Satzes 2 auf beliebige Exponenten e des Radikales $\mathfrak{W}$ bewiesen.

Satz 3. *Voraussetzungen: Der Linksidealverband des Artin-Ringes $R = K + \mathfrak{W}$ sei distributiv und e der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}$.*

Behauptungen: 1. *Wenn jeder Isomorphismus des Körpers K in sich ein innerer Automorphismus und jede Ableitung von K eine innere Ableitung ist, oder, falls R eine Algebra über dem kommutativen Körper Φ ist, wenn dies für die Isomorphismen und die Ableitungen über Φ gilt, dann enthält $\mathfrak{W} \setminus \mathfrak{W}^2$ ein mit allen Elementen $\varkappa$ aus K vertauschbares Element ω, und jedes Element ϱ von R läßt sich mit eindeutig bestimmten Elementen $\varkappa_i \in K$ in der Form*

$$\varrho = \varkappa_0 + \varkappa_1 \omega + \cdots + \varkappa_{e-1} \omega^{e-1}$$

schreiben.

2. *Wenn K ein Körper mit einer äußeren Ableitung ist, existiert ein Ring $R = K + \mathfrak{W}$, $e = 3$, mit distributivem Linksidealverband, in dem sich kein Element ω in $\mathfrak{W} \setminus \mathfrak{W}^2$ mit $\omega\varkappa = \varkappa\omega$ für alle $\varkappa \in K$ finden läßt.*

Analog dem bei Satz 2 verwendeten Beispiel sei jetzt zum Beweis der zweiten Behauptung R der Ring der Elemente $(\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2)$, $\varkappa_i \in K$, mit der Multiplikation $\omega_0 \varkappa = \varkappa\omega_0 + \varkappa'\omega_0^2$, wobei $1 = (1, 0, 0)$, $\omega_0 = (0, 1, 0)$, $\omega_0^2 = (0, 0, 1)$, $\omega_0^3 = (0, 0, 0)$ und $\varkappa \to \varkappa'$ die äußere Ableitung von K ist. Die Gleichung $(\varkappa\lambda)' = \varkappa'\lambda + \varkappa\lambda'$ garantiert, daß diese Multiplikation assoziativ ist. Ein mit allen $\varkappa \in K$ vertauschbares Element $\omega \in \mathfrak{W} \setminus \mathfrak{W}^2$ müßte sich in der Form $\omega = \alpha\omega_0 + \beta\omega_0^2$ mit $\alpha, \beta \in K$ schreiben lassen. Aus $\omega\varkappa = \varkappa\omega$ für alle $\varkappa \in K$ würde dann folgen, daß α im Zentrum von K liegt und $\varkappa' = \varkappa\gamma - \gamma\varkappa$ mit $\gamma = \alpha^{-1}\beta$ gilt.

Bekanntlich (s. z.B. JACOBSON [7]) besitzt ein Körper K über seinem Zentrum Z nur innere Automorphismen und nur innere Ableitungen. Die Voraussetzungen in der 1. Behauptung von Satz 3 sind daher erfüllt, wenn das Zentrum Φ von $R = K + \mathfrak{W}$ so groß ist, daß es Z enthält.

§ 3

$\mathfrak{o}$ sei ein Artin-Ring mit Einselement 1 und $\mathfrak{z}$ sein Zentrum. R sei der von den Linksmultiplikationen L_a und den Rechtsmultiplikationen R_a von $\mathfrak{o}$ mit Elementen a aus $\mathfrak{o}$ erzeugte Multiplikationsring. Er besteht aus Elementen τ der Gestalt

$$\tau = L_{a_1} R_{b_1} + \cdots + L_{a_n} R_{b_n} \tag{1}$$

und enthält die zu $\mathfrak{o}$ und dem zu $\mathfrak{o}$ inversen Ring $\mathfrak{o}^*$ isomorphen Unterringe $L_\mathfrak{o} = \{L_a \mid a \in \mathfrak{o}\}$ bzw. $R_\mathfrak{o} = \{R_a \mid a \in \mathfrak{o}\}$. Nach ARTIN, NESBITT, THRALL [2], S. 63, ist R das Bild des Kronecker-Produktes $\mathfrak{o} \otimes \mathfrak{o}^*$ über dem Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{o}$ unter dem Epimorphismus

$$L_a \otimes R_b \to L_a R_b. \tag{2}$$

Für einen einfachen Ring $\mathfrak{o}$ ist, nach ARTIN, NESBITT, THRALL [2], Theorem 7.1.E, R dann und nur dann ein Artin-Ring, wenn der Rang von $\mathfrak{o}$ über seinem Zentrum $\mathfrak{z}$ endlich ist. Andererseits folgt für einen beliebigen Artin-Ring — nach Theorem 6.10.B dieses Buches [2] — aus der Endlichkeit des Ranges von $\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{z}$ die Minimalbedingung für Linksideale in R. Um die bisher entwickelte Theorie der distributiv darstellbaren Ringe auf den R-Links-

modul $\mathfrak{o}$ anwenden zu können, sei daher im folgenden der Rang von $\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{z}$ als endlich vorausgesetzt. $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{W}$ seien die Radikale von $\mathfrak{o}$ bzw. R.

SATZ 1. *Mit R ist auch $\mathfrak{o}$ primär, und es gilt $\mathfrak{w}=\mathfrak{W}\mathfrak{o}$.*

BEWEIS. 1. Mit dem Ideal $\mathfrak{w}$ in $\mathfrak{o}$ ist wegen $L_xR_y=R_yL_x$ auch das von

$$L_{\mathfrak{w}}=\{L_w \mid w\in\mathfrak{w}\} \tag{3}$$

erzeugte Rechtsideal in R nilpotent, also in $\mathfrak{W}$ enthalten. Hieraus folgt $\mathfrak{w}=\mathfrak{w}\mathfrak{o}=L_{\mathfrak{w}}\mathfrak{o}\subseteqq\mathfrak{W}\mathfrak{o}$. Wäre dabei $\mathfrak{w}<\mathfrak{W}\mathfrak{o}$, so wäre der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}=\bar{\mathfrak{o}}$ eine ringdirekte Summe $\overline{\mathfrak{W}\mathfrak{o}}\oplus\bar{\mathfrak{b}}$, denn wegen der Nilpotenz von $\mathfrak{W}$ ist $\mathfrak{W}\mathfrak{o}=\mathfrak{o}$ unmöglich. Also gäbe es ein Ideal $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{W}\mathfrak{o}\cup\mathfrak{b}=\mathfrak{o}$, $\mathfrak{W}\mathfrak{o}\cap\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{w}$. Hieraus würde $\mathfrak{W}^2\mathfrak{o}\cup\mathfrak{W}\mathfrak{b}=\mathfrak{W}\mathfrak{o}$, also $\mathfrak{o}=\mathfrak{W}^2\mathfrak{o}\cup\mathfrak{b}=\cdots=\mathfrak{W}^e\mathfrak{o}\cup\mathfrak{b}=0\cup\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$ folgen, q.e.a. 2. $L_a\to L_{\bar{a}}$, $R_a\to R_{\bar{a}}$ ist ein Epimorphismus des Multiplikationsringes R von $\mathfrak{o}$ auf den Multiplikationsring von $\bar{\mathfrak{o}}=\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$. Sein Kern enthält wegen $\mathfrak{W}\mathfrak{o}=\mathfrak{w}$ das Radikal $\mathfrak{W}$ von R. Da R nach Voraussetzung primär, d.h. $R/\mathfrak{W}$ einfach ist, muß dieser Kern gleich dem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{W}$ von R sein. Demnach ist der halbeinfache Ring $R/\mathfrak{W}$ der Multiplikationsring des halbeinfachen Ringes $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ und damit auch $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ einfach, denn der Multiplikationsring eines Ringes ist bekanntlich (s. z.B. ALBERT [1]) dann und nur dann einfach, wenn der Ausgangsring es ist.

Die bei dem Beweis des Satzes 1 soeben benutzte Bemerkung legt natürlich die Vermutung nahe, daß auch umgekehrt aus der Einfachheit von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ die von $R/\mathfrak{W}$ folge. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht richtig, wie das folgende Beispiel zeigen wird, sondern man muß noch voraussetzen, daß das Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{o}$ genügend groß ist.

BEISPIEL. Der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ von $\mathfrak{o}$ nach seinem Radikal $\mathfrak{w}$ sei der kommutative Körper $K=Q(\sqrt{2})$, wobei Q der Körper der rationalen Zahlen ist. Die Elemente des Multiplikationsringes R' von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ werden von den Multiplikationen L_a und R_a aus dem Multiplikationsring R von $\mathfrak{o}$ induziert. Falls R primär ist, ist (nach Satz 1) $\mathfrak{w}=\mathfrak{W}\mathfrak{o}$, $\mathfrak{W}$ das Radikal von R. Hieraus folgt, daß $R/\mathfrak{W}$ als einfacher Ring der Multiplikationsring R' des Körpers $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}\cong Q(\sqrt{2})$ und damit zu $Q(\sqrt{2})$ isomorph ist. Neben L_1 darf daher R nicht noch ein weiteres, zu L_1 modulo $\mathfrak{W}$ inkongruentes Idempotent η enthalten. $\mathfrak{o}$ bestehe nun aus den Matrizen

$$a=\begin{pmatrix} x_1 & 2x_2 & y_1 & y_2 \\ x_2 & x_1 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & x_1 & 2x_2 \\ 0 & 0 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

wobei die Matrixelemente x_i und y_k die rationalen Zahlen durchlaufen. Mit ν sei das Element $x_1=0$, $x_2=1$, $y_1=y_2=y_3=y_4=0$ bezeichnet, also das $\sqrt{2}$ in $\mathfrak{o}=K+\mathfrak{w}$ entsprechende Element. Das Zentrum von K ist K selbst, aber das Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{o}$ ist nur Q. Die Gleichungen $(L_\nu-R_\nu)^2=4L_1-2L_\nu R_\nu$ und daraus dann $(L_\nu-R_\nu)^4=8(L_\nu-R_\nu)^2$ lassen sich leicht verifizieren und

führen auf das idempotente Element $\eta = \frac{1}{8}(L_v - R_v)^2$ aus R. Seine Wirkung auf ein beliebiges Element a aus $\mathfrak{o}$ beschreibt

$$4\eta a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2y_1 - 2y_4 & 2y_2 - 4y_3 \\ 0 & 0 & 2y_3 - y_2 & 2y_4 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hieran sieht man sofort, daß $L_1 - \eta$ nicht in $\mathfrak{W}$ liegen kann, denn $\eta a \in \mathfrak{w}$ und $L_1 a = a$ implizieren, daß $L_1 - \eta$ nicht nilpotent ist.

SATZ 2. *Voraussetzungen:* $\mathfrak{o}$ *sei ein Artin-Ring mit Einselement und habe endlichen Rang über seinem Zentrum* $\mathfrak{z}$. *Für* $z \in \mathfrak{z}$ *sei* $z \to \bar{z} = z \bmod \mathfrak{w}$ *ein Epimorphismus auf das Zentrum von* $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$. *Der Multiplikationsring von* $\mathfrak{o}$ *sei* R.

Behauptungen: 1. R *ist dann und nur dann primär, wenn* $\mathfrak{o}$ *es ist.*

2. *Bei primärem* $\mathfrak{o}$ *ist* $R/\mathfrak{W}$ *der Multiplikationsring von* $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$, *und es gilt*

3. $\mathfrak{w} = \mathfrak{W}\mathfrak{o}$ *und* $\mathfrak{W} = (\mathfrak{w}:\mathfrak{o}) = (L_\mathfrak{w}, R_\mathfrak{w})$. *Hierin bedeuten* $(\mathfrak{w}:\mathfrak{o}) = \{\tau \mid \tau \in R, \tau\mathfrak{o} \subseteqq \mathfrak{w}\}$ *und* $(L_\mathfrak{w}, R_\mathfrak{w})$ *das von den Ringen* $L_\mathfrak{w}$ *und* $R_\mathfrak{w}$ *in* R *erzeugte Ideal.*

BEWEIS. Sei $\mathfrak{o}$ primär. Wegen der Nilpotenz von $\mathfrak{W}$ ist $\mathfrak{W}\mathfrak{o} < \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{W}\mathfrak{o} \subseteqq \mathfrak{w}$, da $\mathfrak{w}$ das maximale Ideal von $\mathfrak{o}$ ist. Andererseits ist mit dem Radikal $\mathfrak{w}$ wegen der Vertauschbarkeit der L_a mit den R_b auch das Ideal $(L_\mathfrak{w}, R_\mathfrak{w})$ aus R nilpotent, liegt also in $\mathfrak{W}$. Zum Beweis von $\mathfrak{W} = (\mathfrak{w}:\mathfrak{o}) = (L_\mathfrak{w}, R_\mathfrak{w})$ muß man nur noch $(\mathfrak{w}:\mathfrak{o}) \subseteqq (L_\mathfrak{w}, R_\mathfrak{w})$ zeigen. Angenommen, es existierte ein Element τ in $(\mathfrak{w}:\mathfrak{o})$, welches nicht in $(L_\mathfrak{w}, R_\mathfrak{w})$ läge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei in der Darstellung (1) von τ durch die L_{a_i} und R_{b_i} kein a_i oder b_i in $\mathfrak{w}$ und die Länge von τ, d.h. die Zahl n, minimal. Da kein a_i oder b_i in $\mathfrak{w}$ liegt, induzieren diese die von 0 verschiedenen Elemente $L_{\bar{a}_i}, R_{\bar{b}_i}$ aus dem Multiplikationsring von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$, wobei gemäß (1) das Element

$$\bar{\tau} = L_{\bar{a}_1} R_{\bar{b}_1} + \cdots + L_{\bar{a}_n} R_{\bar{b}_n} = L_{\bar{0}} \tag{4}$$

ist. Da nun $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ ein einfacher Ring und $\bar{\mathfrak{z}}$ nach Voraussetzung das ganze Zentrum von $\bar{\mathfrak{o}}$ ist, ist nach ARTIN, NESBITT, THRALL [2], Theorem 7.1.D, der Epimorphismus (2) des über $\bar{\mathfrak{z}}$ gebildeten Kronecker-Produktes $\bar{\mathfrak{o}} \otimes \bar{\mathfrak{o}}^*$ auf den Multiplikationsring von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ ein Isomorphismus, also impliziert (4) die Gleichung

$$\bar{a}_1 \otimes \bar{b}_1 + \cdots + \bar{a}_n \otimes \bar{b}_n = \bar{0}. \tag{5}$$

Nach Definition der Kronecker-Produkte folgt hieraus die lineare Abhängigkeit der $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ über $\bar{\mathfrak{z}}$. Sei etwa $\bar{a}_n = \bar{a}_1 \bar{z}_1 + \cdots + \bar{a}_{n-1} \bar{z}_{n-1}$, $z_i \in \mathfrak{z}$. Dann unterscheiden sich τ und

$$\tau_1 = L_{a_1} R_{b_1 - z_1 b_n} + \cdots + L_{a_{n-1}} R_{b_{n-1} - z_{n-1} b_n} \tag{6}$$

voneinander nur um ein Element aus $L_\mathfrak{w}$. Läßt man nun in (6) alle diejenigen Summanden fort, in denen $b_j - z_j b_n$ in $\mathfrak{w}$ liegt, so erhielte man ein Element τ_2 in $(\mathfrak{w}:\mathfrak{o})$, welches nicht in $(L_\mathfrak{w}, R_\mathfrak{w})$ läge, aber geringere Länge hätte, q.e.a. —

Die damit bewiesene Gleichung $\mathfrak{W}=(\mathfrak{w}:\mathfrak{o})$ impliziert, daß der von $L_a \to L_{\bar{a}}$, $R_a \to R_{\bar{a}}$ induzierte Epimorphismus $\tau \to \bar{\tau}$ von R auf den Multiplikationsring von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ als Kern $(\mathfrak{w}:\mathfrak{o})$ gerade das Radikal $\mathfrak{W}$ von R besitzt. $R/\mathfrak{W}$ ist demnach der Multiplikationsring des nach Voraussetzung einfachen Ringes $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$, also selbst ein einfacher Ring. — Die übrigen Behauptungen von Satz 2 sind bereits im Satz 1 gezeigt.

Der primäre Ring $\mathfrak{o}$ genüge nun den Voraussetzungen von Satz 2. Auf ihn als treuen R-Modul läßt sich die Theorie der distributiv darstellbaren Ringe folgendermaßen anwenden. Der Exponent des Radikales $\mathfrak{w}$ von $\mathfrak{o}$ sei e. Aus $\mathfrak{W}=(L_{\mathfrak{w}}, R_{\mathfrak{w}})$ folgt, daß e auch der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}$ von R ist. Nach BEHRENS [4], Sätze 2 und 3, ist der Verband $\mathfrak{V}$ der Ideale von $\mathfrak{o}$, d.h. der R-Untermoduln von $\mathfrak{o}$, genau dann distributiv, wenn $\mathfrak{V}$ aus der Kette der $\mathfrak{W}^k\mathfrak{o}$, $k=0, 1, \ldots, e-1$, besteht. Da andererseits die Potenzen $\mathfrak{w}^k$ in $\mathfrak{V}$ liegen, ist, in Ergänzung der dritten Behauptung des Satzes 2, $\mathfrak{w}^k=\mathfrak{W}^k\mathfrak{o}$ und damit folgender Satz bewiesen.

SATZ 3. *Voraussetzungen: Der primäre Ring $\mathfrak{o}$ mit Einselement habe endlichen Rang über seinem Zentrum $\mathfrak{z}$. Sei $\bar{\mathfrak{z}}=\mathfrak{z} \bmod \mathfrak{w}$ das Zentrum von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ und e der Exponent von $\mathfrak{w}$. Behauptung: Der Verband $\mathfrak{V}$ der Ideale in $\mathfrak{o}$ ist dann und nur dann distributiv, wenn $\mathfrak{V}$ aus der Kette der Potenzen $\mathfrak{w}^k$, $k=0, 1, \ldots, e-1$, des Radikales $\mathfrak{w}$ von $\mathfrak{o}$ besteht.*

Für einen vollständig primären Ring $\mathfrak{o}$ läßt sich sogar der folgende Satz beweisen.

SATZ 4. *Voraussetzungen: Das Zentrum $\mathfrak{z}$ des Körpers K in dem vollständig primären Ring $\mathfrak{o}=K+\mathfrak{w}$ sei auch das Zentrum von $\mathfrak{o}$. Der Rang von $\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{z}$ sei endlich. Behauptungen: Der Verband $\mathfrak{V}$ der Ideale der Algebra $\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{z}$ ist dann und nur dann distributiv, wenn der Verband aller Linksideale von $\mathfrak{o}$ nur aus der Kette der $\mathfrak{w}^k$ besteht, also mit $\mathfrak{V}$ übereinstimmt. In diesem Falle ist $\mathfrak{o}$ ein einreihiger Ring.*

BEWEIS. Nach Satz 3 und BEHRENS [4], Sätze 2 und 3, ist zu zeigen, daß, falls $\mathfrak{V}$ distributiv ist, die Potenzen $\mathfrak{w}^k$ eine maximale Kette von Linksidealen in der Algebra $\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{z}$ bilden. Für $k=0, 1, \ldots, e-1$, ist $\mathfrak{w}^k/\mathfrak{w}^{k+1}$ ein (K, K)-Modul oder, anders ausgedrückt, ein $K \otimes K^*$-Linksmodul, wobei das Kronecker-Produkt über $\mathfrak{z}$ zu nehmen ist. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{z}$ das Zentrum von K ist und mit $\mathfrak{o}$ auch K endlichen Rang über $\mathfrak{z}$ hat, ist $K \otimes K^*$ ein einfacher Artin-Ring. $\mathfrak{w}^k/\mathfrak{w}^{k+1}$ ist demnach vollreduzibel und seine irreduziblen Summanden sind isomorph zu dem K-Doppelmodul K. In $\mathfrak{w}^k \setminus \mathfrak{w}^{k+1}$ existiert demnach ein Element u derart, daß $K\bar{u}$ ein irreduzibler K-Doppelmodul in $\mathfrak{w}^k/\mathfrak{w}^{k+1}$ ist. Dies impliziert, daß $Ku \cup \mathfrak{w}^{k+1}$ ein in $\mathfrak{w}^k$ enthaltenes (zweiseitiges) echtes Oberideal von $\mathfrak{w}^{k+1}$ ist. Gemäß der Voraussetzung über den Verband $\mathfrak{V}$ ist demnach $\mathfrak{w}^k=Ku \cup \mathfrak{w}^{k+1}$. Da K ein Körper ist, ist jedes minimale Linksoberideal von $\mathfrak{w}^{k+1}$ ebenfalls $\mathfrak{w}^k$. — Aus der Endlichkeit des Ranges der Algebra $\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{z}$ folgt, daß jeder Isomorphismus von K in sich ein Automorphismus von K ist. Dies zieht gemäß §2, Satz 1, die Einreihigkeit von $\mathfrak{o}$ nach sich.

Literatur

[1] ALBERT, A. A.: Non-associative algebras I. Ann. of Math. (2) **43**, 685–707 (1942).
[2] ARTIN, E., C. J. NESBITT and R. M. THRALL: Rings with minimum condition. Ann. Arbor 1944.
[3] BAER, R.: A unified theory of projective spaces and finite abelian groups. Trans. Amer. Math. Soc. **52**, 283–343 (1942).
[4] BEHRENS, E.-A.: Eine Charakterisierung der T-Moduln mit distributivem Untermodulverband bei halbprimärem T. Arch. der Math. **8**, 265–273 (1957).
[5] — Distributiv darstellbare Ringe. Math. Z. **73**, 409–432 (1960).
[6] — Distributiv darstellbare Ringe II. Math. Z. **76**, 367–384 (1961).
[7] JACOBSON, N.: Structure of rings. Providence 1956.
[8] KASCH, F.: Halblineare Abbildungen und Rangrelationen bei Galoisschen Erweiterungen. Arch. d. Math. **4**, 402–407 (1953).
[9] KÖTHE, G.: Verallgemeinerte abelsche Gruppen mit hyperkomplexen Operatorenring. Math. Z. **39**, 31–44 (1935).
[10] WALL, D. W.: Characterizations of generalized uniserial algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **90**, 161–170 (1959).

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 24. April 1961)

KASCH, F.
Math. Zeitschr. 77, 219–227 (1961)

Dualitätseigenschaften von Frobenius-Erweiterungen

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

FRIEDRICH KASCH

1. Einleitung

Für die Kohomologietheorie der endlichen Gruppen ist bekanntlich die Tatsache von Bedeutung, daß eine Isomorphie zwischen der k-ten Homologie- und der $-(k+1)$-ten Kohomologiegruppe der gegebenen Gruppe G mit Koeffizienten in einem beliebigen G-Modul C besteht:

$$H_k(G, C) \cong H^{-k-1}(G, C) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1}$$

Dieser Zusammenhang soll hier für eine beliebige Frobenius-Erweiterung Γ/A an Stelle des Gruppenrings untersucht werden.

Ein Ansatz in dieser Richtung liegt bereits durch T. NAKAYAMA [3, 4] vor, doch erfolgt dort (anderen Zielsetzungen entsprechend) eine Beschränkung auf die Homologie- und Kohomologiegruppen einer Frobenius-Algebra Γ/K; d.h. es wird Γ/K zentral vorausgesetzt und der aufzulösende Modul ist Γ selbst als zweiseitiger Γ-Modul.

Diese Beschränkungen werden hier fallen gelassen. Wir gehen von einer beliebigen Frobenius-Erweiterung Γ/A aus und zeigen zunächst, daß auch jetzt — wie bei einer Frobenius-Algebra — ein Nakayama-Automorphismus existiert; allerdings ist dies jetzt ein Automorphismus des Zentralisators P von A in Γ. Sei nun Γ/A eine freie Frobenius-Erweiterung, so daß eine Spurbildung (in der Kohomologie der Gruppen Norm genannt) existiert [1]), und sei A ein Γ-Linksmodul. Für $f \in \mathrm{Hom}({}_A A, {}_A A)$ ist dann $\mathrm{Spur}\, f \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma \Gamma)$ und für $\varrho \in \mathsf{P}$ gilt

$$\mathrm{Spur}\,(f\varrho)(x) = \mathrm{Spur}\, f(x)\,\varrho', \qquad x \in A, \tag{2}$$

wobei ϱ' das Bild von ϱ bei dem Nakayama-Automorphismus ist. Seien C ein Γ-Linksmodul und C^0 ein daraus mittels des Nakayama-Automorphismus gebildeter P-Linksmodul, dann folgt aus (2), daß die Abbildung

$$\mathrm{Hom}({}_A A, {}_A A) \underset{\mathsf{P}}{\otimes} C^0 \ni f \otimes c^0 \to (A \ni x \to \mathrm{Spur}\, f(x)\, c \in C) \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma C)$$

einen Homomorphismus liefert. Dieser Homomorphismus führt zu Aussagen, die als Spezialfall wieder (1) enthalten.

[1]) Siehe Zusatz bei der Korrektur am Ende der Arbeit.

2. Der Nakayama-Automorphismus einer Frobenius-Erweiterung

Wir wollen zuerst einige Bezeichnungen festsetzen. Sind Γ und Λ Ringe, so sei ${}_\Gamma A_\Lambda$ ein Γ-Λ-Modul. Hat man ferner einen Modul B_Λ, dann sei $\mathrm{Hom}(A_\Lambda, B_\Lambda)$ der Modul der Λ-Homomorphismen von A in B (der sonst meist mit $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ bezeichnet wird). Gilt außerdem ${}_\Lambda B_\Lambda$, dann wird $\mathrm{Hom}(A_\Lambda, B_\Lambda)$ durch die Festsetzung

$$(\lambda f \gamma)(x) = \lambda f(\gamma x), \qquad (\lambda \in \Lambda,\ f \in \mathrm{Hom}(A_\Lambda, B_\Lambda),\ \gamma \in \Gamma,\ x \in A)$$

zu einem Λ-Γ-Modul, d.h. es ist ${}_\Lambda \mathrm{Hom}(A_\Lambda, B_\Lambda)_\Gamma$. Hat man Modulen ${}_\Lambda A_\Gamma, {}_\Lambda B_\Lambda$, dann wird $\mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda B)$ durch die Festsetzung

$$(\gamma f \lambda)(x) = f(x\gamma)\lambda$$

zu einem Γ-Λ-Modul, d.h. es ist ${}_\Gamma \mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda B)_\Lambda$. Sind die Modulen ${}_\Gamma A_\Lambda$ und ${}_\Gamma C_\Lambda$ Γ-Λ-isomorph, dann wird ${}_\Gamma A_\Lambda \cong {}_\Gamma C_\Lambda$ geschrieben. Analog sei die Bezeichnungsweise in anderen Fällen.

Wir kommen nun zur Definition einer Frobenius-Erweiterung Γ/Λ. Dies ist (nach [5] und [6][2]) eine unitäre Ringerweiterung mit folgenden Eigenschaften:

(r 1) ${}_\Lambda \Gamma_\Gamma \cong {}_\Lambda \mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda)_\Gamma$;

(r 2) Γ_Λ ist endlich erzeugt und projektiv.

Ist außerdem Γ_Λ frei, dann heißt Γ/Λ eine freie Frobenius-Erweiterung.

Diese rechtsseitigen Bedingungen sind äquivalent mit analogen linksseitigen Bedingungen:

(l 1) ${}_\Gamma \Gamma_\Lambda \cong {}_\Gamma \mathrm{Hom}({}_\Lambda \Gamma, {}_\Lambda \Lambda)_\Lambda$;

(l 2) ${}_\Lambda \Gamma$ ist endlich erzeugt und projektiv.

Ferner ist eine rechtsseitig freie Frobenius-Erweiterung auch linksseitig frei und umgekehrt.

Sei jetzt h das Bild von $1 \in \Gamma$ bei dem Isomorphismus (r 1); wir nennen h einen Frobenius-Homomorphismus. Damit erhält man (r 1) explizit in der Form

$$\Gamma \ni \gamma \to h\gamma \in h\Gamma = \mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda). \tag{3}$$

Da (r 1) insbesondere Λ-linkszulässig ist, folgt $h \in \mathrm{Hom}({}_\Lambda \Gamma_\Lambda, {}_\Lambda \Lambda_\Lambda)$. Es ist ferner klar, daß h durch (r 1) nur bis auf Multiplikation von rechts mit einem invertierbaren Element aus dem Zentralisator P von Λ in Γ eindeutig bestimmt ist.

Wir wollen nun feststellen, daß dieses h auch als Bild von $1 \in \Gamma$ bei dem Isomorphismus (l 1) auftritt, so daß (l 1) mit dem gleichen h durch

$$\Gamma \ni \gamma \to \gamma h \in \Gamma h = \mathrm{Hom}({}_\Lambda \Gamma, {}_\Lambda \Lambda) \tag{4}$$

[2]) Diese Arbeiten stimmen in wesentlichen Teilen nahezu überein. Bei Veröffentlichung meiner Arbeit [6] war mir die kurz zuvor erschienene Arbeit [5] leider nicht bekannt. Der Begriff der Frobenius-Erweiterung ist in [5] etwas allgemeiner als in [6] gefaßt. Hier wird die Definition aus [6] zugrunde gelegt, doch lassen sich die folgenden Überlegungen auch für die allgemeinere Definition durchführen.

gegeben wird. Diese Behauptung wird bei dem Äquivalenzbeweis von (r 1), (r 2) und (l 1), (l 2) folgendermaßen mitgeliefert: Wegen (r 2) besteht die Isomorphie

$$(5) \qquad {}_{\Gamma}\Gamma_{\Lambda} \cong {}_{\Gamma}\mathrm{Hom}\left({}_{\Lambda}\mathrm{Hom}\left(\Gamma_{\Lambda}, \Lambda_{\Lambda}\right), {}_{\Lambda}\Lambda\right)_{\Lambda},$$

die explizit durch

$$\Gamma \ni \gamma \to \left(\mathrm{Hom}\left(\Gamma_{\Lambda}, \Lambda_{\Lambda}\right) \ni f \to f(\gamma) \in \Lambda\right) \in \mathrm{Hom}\left({}_{\Lambda}\mathrm{Hom}\left(\Gamma_{\Lambda}, \Lambda_{\Lambda}\right), {}_{\Lambda}\Lambda\right)$$

gegeben wird. Setzt man (r 1) auf der rechten Seite von (5) ein, so folgt (l 1). Berücksichtigt man dabei (3), so ergibt sich insbesondere für $1 \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \Gamma \ni 1 &\to \left(\mathrm{Hom}\left(\Gamma_{\Lambda}, \Lambda_{\Lambda}\right) \ni f \to f(1) \in \Lambda\right) \\ &= \left(h\,\Gamma \ni h\gamma \to h(\gamma) \in \Lambda\right) \\ &\to \left(\Gamma \ni \gamma \to h(\gamma) \in \Lambda\right) = h \in \mathrm{Hom}\left({}_{\Lambda}\Gamma, {}_{\Lambda}\Lambda\right). \end{aligned}$$

Damit ist (4) bewiesen.

Um den Nakayama-Automorphismus zu definieren, haben wir $\mathrm{Hom}\left({}_{\Lambda}\Gamma_{\Lambda}, {}_{\Lambda}\Lambda_{\Lambda}\right)$ zu betrachten. Wegen (3) und (4) gilt offenbar

$$(6) \qquad h\,\mathsf{P} = \mathsf{P}\,h = \mathrm{Hom}\left({}_{\Lambda}\Gamma_{\Lambda}, {}_{\Lambda}\Lambda_{\Lambda}\right); \qquad h\,\mathsf{P}_{\mathsf{P}} \cong \mathsf{P}_{\mathsf{P}}, \qquad {}_{\mathsf{P}}\mathsf{P}\,h \cong {}_{\mathsf{P}}\mathsf{P}.$$

Folglich gibt es zu jedem $\varrho \in \mathsf{P}$ bzw. $\varrho' \in \mathsf{P}$ ein eindeutig bestimmtes ϱ' bzw. ϱ so, daß $h\varrho = \varrho' h$ gilt. Man stellt nun sofort fest, daß die Zuordnung

$$\mathsf{P} \ni \varrho \to \varrho' \in \mathsf{P}$$

ein Automorphismus von P ist, der, wie bisher in der Literatur bei Frobenius-Algebren, wo $\mathsf{P} = \Gamma$ ist, als Nakayama-Automorphismus bezeichnet werden soll. Da h bis auf Multiplikation mit invertierbaren Elementen aus P eindeutig bestimmt ist, ist der Nakayama-Automorphismus von P durch Γ/Λ bis auf innere Automorphismen von P eindeutig bestimmt.

Ist der Nalayama-Automorphismus von P bereits selbst ein innerer Automorphismus, dann soll die Frobenius-Erweiterung Γ/Λ symmetrisch heißen. In diesem Falle kann man h so wählen, daß der Nakayama-Automorphismus zum identischen Automorphismus wird.

Sei jetzt Γ/Λ eine freie Frobenius-Erweiterung. Dann gibt es zu dem Frobenius-Homomorphismus h duale Basen von Γ/Λ, d.h. es existieren eine Linksbasis $l_1, \ldots, l_n$ und eine Rechtsbasis $r_1, \ldots, r_n$ von Γ/Λ mit $h(l_i r_j) = \delta_{ij}$. Das bedeutet, daß für jedes $\gamma \in \Gamma$ aus

$$(7) \qquad l_i \gamma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} l_j, \qquad \lambda_{ij} \in \Lambda, \qquad i = 1, \ldots, n$$

die Gleichungen

$$(8) \qquad \gamma r_j = \sum_{i=1}^{n} r_i \lambda_{ij}, \qquad \lambda_{ij} \in \Lambda, \qquad j = 1, \ldots, n$$

folgen und umgekehrt.

Sei nun $\varrho \in \mathsf{P}$ und ϱ' das Bild von ϱ bei dem zu h gehörenden Nakayama-Automorphismus. Dann ergibt sich aus

$$h(\varrho\, l_i r_j) = h(l_i r_j \varrho'),$$

daß aus

$$\varrho\, l_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} l_j, \qquad \lambda_{ij} \in \Lambda, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{9}$$

die Gleichungen

$$r_j \varrho' = \sum_{i=1}^{n} r_i \lambda_{ij}, \qquad \lambda_{ij} \in \Lambda, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{10}$$

folgen und umgekehrt. Diese Tatsache soll nun benutzt werden, um eine Aussage über die Spur eines Λ-Homomorphismus zu machen.

3. Eigenschaften der Spur

Für einen Modul ${}_\Gamma A$ sei $f \in \mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda \Lambda)$; die durch

$$A \ni x \to \sum_{i=1}^{n} r_i f(l_i x) \in \Gamma$$

gegebene Abbildung wird Spur f genannt. Wegen (7) und (8) gilt

$$\mathrm{Spur}\, f \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma \Gamma). \tag{11}$$

Ist $A = {}_\Gamma A_\Lambda$ und $f \in \mathrm{Hom}({}_\Lambda A_\Lambda, {}_\Lambda \Lambda_\Lambda)$, dann folgt $\mathrm{Spur}\, f \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A_\Lambda, {}_\Gamma \Gamma_\Lambda)$. Aus (9) und (10) ergibt sich für beliebiges $\varrho \in \mathsf{P}$:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{Spur}\,(f\varrho)\,(x) &= \sum_{i=1}^{n} r_i f(\varrho\, l_i\, x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \varrho' f(l_i x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} r_i f(l_i x)\, \varrho' = \mathrm{Spur}\, f(x)\, \varrho'. \end{aligned} \right. \tag{12}$$

HILFSSATZ 1. *Die Abbildung*

$$\mathrm{Hom}({}_\Lambda \Gamma_\Lambda, {}_\Lambda \Lambda_\Lambda) = h\,\mathsf{P} \ni h\varrho \to \mathrm{Spur}\,(h\varrho) \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma \Gamma_\Lambda, {}_\Gamma \Gamma_\Lambda)$$

ist ein Isomorphismus.

BEWEIS. Wegen $h(l_i r_j) = \delta_{ij}$ gilt

$$\mathrm{Spur}\, h(r_j) = \sum_{i=1}^{n} r_i h(l_i r_j) = r_j,$$

woraus

$$\mathrm{Spur}\, h = 1_\Gamma \quad (= \text{identische Abbildung von } \Gamma) \tag{13}$$

folgt. Aus (12) und (13) ergibt sich dann

$$\mathrm{Spur}\,(h\varrho)\,(x) = x\,\varrho',$$

d.h. $\mathrm{Spur}\,(h\varrho)$ ist die Rechtsmultiplikation von Γ mit $\varrho' \in \mathsf{P}$. Da die Rechtsmultiplikationen mit Elementen aus P genau alle Elemente aus $\mathrm{Hom}({}_\Gamma \Gamma_\Lambda, {}_\Gamma \Gamma_\Lambda)$ liefern, ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Gegeben sei jetzt ein Modul ${}_\Gamma A_\Lambda$ mit

$$A = \bigoplus_{j=1}^{m} \Gamma x_j, \qquad {}_\Gamma \Gamma x_{j\Lambda} \cong {}_\Gamma \Gamma_\Lambda, \qquad \lambda x_j = x_j \lambda \quad (\lambda \in \Lambda;\ j = 1, \ldots, m). \tag{14}$$

Wir schreiben zur Abkürzung $A^* = \mathrm{Hom}({}_AA_A, {}_A\Lambda_A)$ und bezeichnen mit h_i die durch

$$h_i\Big(\sum_{j=1}^{m}\gamma_j x_j\Big) = h(\gamma_i) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{15}$$

definierte Abbildung aus A^*.

HILFSSATZ 2. *Es gilt*

$$A^* = \bigoplus_{j=1}^{m} h_j \mathsf{P}, \qquad h_j \mathsf{P}_\mathsf{P} \cong \mathsf{P}_\mathsf{P} \tag{16}$$

und die Zuordnung

$$A^* \ni f \to \mathrm{Spur}\, f \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A_A, {}_\Gamma\Gamma_A) \tag{17}$$

ist ein Isomorphismus.

BEWEIS. Folgt wegen (14) sofort aus (6) und Hilfssatz 1.

4. Dualitätseigenschaften

Zu dem beliebigen Modul ${}_\mathsf{P}C$ definieren wir mit Hilfe des Nakayama-Automorphismus $\mathsf{P} \ni \varrho \to \varrho' \in \mathsf{P}$ einen neuen Modul C^0. Sei C^0 eine zu C isomorphe additive Gruppe mit dem Isomorphismus

$$C^0 \ni c^0 \to c \in C.$$

Die Multiplikation $\circ$ mit Elementen aus P wird nun durch

$$\varrho \circ c^0 = (\varrho' c)^0$$

festgesetzt, wodurch C^0 zu einem P-Linksmodul wird.

Seien nun beliebige Modulen ${}_\Gamma A$ und ${}_\Gamma C$ gegeben. Dann ist $\mathrm{Hom}({}_AA, {}_A\Lambda)$ ein P-Rechtsmodul und wegen (11) und (12) wird durch

$$\mathrm{Hom}({}_AA, {}_A\Lambda) \underset{\mathsf{P}}{\otimes} C^0 \ni f \otimes c^0 \to (A \ni x \to \mathrm{Spur}\, f(x)\, c \in C) \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma C) \tag{18}$$

ein Homomorphismus φ geliefert[3]). Dieser Homomorphismus soll weiterhin untersucht werden. Dazu setzen wir jetzt einen Modul ${}_\Gamma A_A$ voraus und beschränken uns auf der linken Seite von (18) auf den Untermodul $A^* = \mathrm{Hom}({}_AA_A, {}_A\Lambda_A)$ von $\mathrm{Hom}({}_AA, {}_A\Lambda)$.

Ist Γ/Λ eine zentrale Frobenius-Erweiterung, dann fallen diese Modulen zusammen. Im allgemeinen aber ist es gerade wesentlich, daß wir den Modul A^* zugrunde legen, da dieser die gewünschten Dualitätsaussagen ermöglicht.

Wir bemerken zuerst, daß φ in ${}_\Gamma A_A$ und ${}_\Gamma C$ funktoriell ist. Für C ist das unmittelbar klar. Seien nun ${}_\Gamma B_A$ und ein Homomorphismus $\beta\colon {}_\Gamma A_A \to {}_\Gamma B_A$ gegeben, dann ist das Diagramm

$$\begin{cases} B^* \underset{\mathsf{P}}{\otimes} C^0 & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta, 1_A)\otimes 1_{C^0}} & A^* \underset{\mathsf{P}}{\otimes} C^0 \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathrm{Hom}({}_\Gamma B, {}_\Gamma C) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta, 1_C)} & \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma C) \end{cases} \tag{19}$$

[3]) Im Spezialfall der Kohomologie der Gruppen vgl. [1], S. 240, (5).

wegen $\mathrm{Spur}(f\beta) = \mathrm{Spur} f \cdot \beta$ kommutativ, wie man unmittelbar nachprüft. Also ist φ auch in A funktoriell.

Die grundlegende Eigenschaft von φ formulieren wir in folgendem

SATZ 1. *Gegeben seien ein Modul ${}_\Gamma A_A$, der* (14) *genügt, und ein beliebiger Modul ${}_\Gamma C$. Dann ist*

$$(20) \qquad \varphi\colon A^* \underset{P}{\otimes} C^0 \ni f \otimes c^0 \to \big(A \ni x \to \mathrm{Spur} f(x)\, c \in C\big) \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma C)$$

ein in A und C funktorieller Isomorphismus.

BEMERKUNGEN. 1. Der Satz gilt auch für jeden Γ-A-direkten Summanden von A.

2. Der Isomorphismus (20) kann wegen (17) folgendermaßen zerlegt werden:

$$A^* \underset{P}{\otimes} C^0 \to \mathrm{Spur}\, A^* \underset{P}{\otimes} C = \mathrm{Hom}({}_\Gamma A_A, {}_\Gamma \Gamma_A) \underset{P}{\otimes} C \to \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma C).$$

Zum Beweis des Satzes benutzen wir die durch (16) gegebene eindeutige Darstellung der Elemente aus $A^* \underset{P}{\otimes} C^0$ in der Form $\sum_{j=1}^{m} h_j \otimes c_j^0$. Wegen (15) und (13) folgt für die Elemente x_i aus (14)

$$(21) \qquad \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Spur}\, h_j(x_i)\, c_j = \mathrm{Spur}\, h(1)\, c_i = c_i, \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Folglich ist φ ein Monomorphismus. Sei nun $f \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma C)$, dann gilt nach (21)

$$\varphi\colon \sum_{j=1}^{m} h_j \otimes f(x_j) \to f,$$

d.h. φ ist auch ein Epimorphismus. Damit ist der Satz bewiesen.

5. Anwendung in der homologischen Algebra

Eine vollständige projektive Auflösung eines Moduls A_Γ bzw. ${}_\Gamma A$ ist eine exakte Folge von projektiven Moduln $A_i{}_\Gamma$ bzw. ${}_\Gamma A_i$:

$$\mathfrak{A}\colon \quad \cdots \to A_2 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} A_0 \xrightarrow{\alpha_0} A_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} A_{-2} \to \cdots$$

mit

$$\mathrm{Bild}(\alpha_0) = \mathrm{Kern}(\alpha_{-1}) \cong A.$$

Mit einem beliebigen Modul ${}_\Gamma C$ bilde man dann im Falle A_Γ den Komplex $\mathfrak{A} \underset{\Gamma}{\otimes} C$ und im Falle ${}_\Gamma A$ den Komplex $\mathrm{Hom}({}_\Gamma \mathfrak{A}, {}_\Gamma C)$. Die Faktoren des ersten Komplexes bezeichnen wir mit $H_k^\Gamma(A, C)$ die des zweiten mit $H_\Gamma^k(A, C)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Dann gilt offenbar

$$\left.\begin{aligned} H_k^\Gamma(A, C) &= \mathrm{Tor}_k^\Gamma(A, C) \\ H_\Gamma^k(A, C) &= \mathrm{Ext}_\Gamma^k(A, C) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Mit dieser Bezeichnung gilt

SATZ 2. *Es sei Γ/Λ eine freie Frobenius-Erweiterung, und es besitze der Modul ${}_\Gamma A_\Lambda$ als Γ-Modul eine vollständige projektive Auflösung durch Modulen A_k, die alle (14) genügen und wobei die Kerne jeweils als Λ-Λ-Modulen direkte Summanden sind. Dann gilt für jeden Modul ${}_\Gamma C$:*

$$H_k^{\mathsf{P}}(A^*, C^0) \cong H_\Gamma^{-k-1}(A, C), \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

BEWEIS. Sei $\mathfrak{A}$ die gegebene vollständige Auflösung von A, dann ist die Folge

$$\mathfrak{A}^*: \quad \cdots \to A_{-2}^* \to A_{-1}^* \to A_0^* \to A_1^* \to A_2^* \to \cdots$$

wieder exakt und die Moduln der Folge sind nach (16) freie P-Rechtsmoduln. Folglich ist dies eine vollständige projektive Auflösung des P-Rechtsmoduls A^*. Nach Satz 1 folgt dann die Behauptung.

Es erhebt sich nun die Frage, wann die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind. Dazu beschränken wir uns auf zentrale Frobenius-Erweiterungen, da eine entsprechende Aussage dann einfach zu formulieren ist und die erwähnten Beispiele bereits durch diesen Fall erfaßt werden. Ist Γ/Λ eine zentrale Frobenius-Erweiterung, dann ist $\mathsf{P} = \Gamma$ und jeder Modul ${}_\Gamma A$ ist zufolge der Festsetzung $a\lambda = \lambda a$ auch ein Λ-Rechtsmodul; z.B. ist dann $A^* = \mathrm{Hom}({}_\Lambda A_\Lambda, {}_\Lambda \Lambda_\Lambda) = \mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda \Lambda)$, d.h. A^* ist der im üblichen Sinne duale Modul.

SATZ 3. *Es seien Γ ein Noetherscher Ring und Γ/Λ eine unitäre zentrale, endlich erzeugte, freie Ringerweiterung. Ist der Modul ${}_\Gamma A$ als Λ-Linksmodul endlich erzeugt und projektiv, dann existiert eine (Γ, Λ)-exakte*[4]) *vollständige Auflösung von A aus endlich erzeugten freien Γ-Moduln.*

BEWEIS. Der Beweis ergibt sich nach bekannten Schlüssen, doch soll er der Vollständigkeit halber angegeben werden. Zu A gibt es einen endlich erzeugten freien Γ-Modul A_0 so, daß $A_0 \xrightarrow{\alpha_0} A \to 0$ exakt ist. Da ${}_\Lambda A$ projektiv ist, ist $\mathrm{Kern}(\alpha_0)$ Λ-direkter Summand in A_0. Da ${}_\Gamma A_0$ Γ-frei und ${}_\Lambda \Gamma$ Λ-frei sind, ist ${}_\Lambda A_0$ Λ-projektiv; dann ist auch $\mathrm{Kern}(\alpha_0)$ als direkter Summand Λ-projektiv. Als Untermodul des Moduls A_0 mit Maximalbedingung ist $\mathrm{Kern}(\alpha_0)$ ein endlich erzeugter Λ-Modul. Nun folgt durch Induktion, daß eine (Γ, Λ)-exakte Auflösung von A durch endlich erzeugte freie Γ-Moduln existiert. Das gleiche gilt für A_Γ^*. Wegen ${}_\Gamma A^{**} \cong {}_\Gamma A$ erhält man die gesuchte vollständige Auflösung von A, indem man an die angegebene Auflösung von A die durch Dualisieren der entsprechenden Auflösung von A^* entstehende Folge anhängt[5]). Damit ist Satz 3 bewiesen.

Nach Satz 2 gilt dann also unter den Voraussetzungen von Satz 3

$$H_k^\Gamma(A^*, C^0) \cong H_\Gamma^{-k-1}(A, C), \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Da unter den Voraussetzungen von Satz 3 ${}_\Gamma A^{**} \cong {}_\Gamma A$ gilt und A^* die gleichen Voraussetzungen für die rechte Seite wie A für die linke Seite erfüllt, folgt

[4]) Im Sinne der relativen homologischen Algebra; s. dazu [2].

[5]) Siehe dazu auch die Schlußbemerkung über vollständige Auflösungen.

für A_Γ unter den entsprechenden Voraussetzungen

$$H_k^\Gamma(A, C^0) \cong H_\Gamma^{-k-1}(A^*, C), \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Im Falle der Kohomologie einer endlichen Gruppe G ist $\Lambda = \mathsf{Z}$ (= Ring der ganzen Zahlen), $\Gamma = \mathsf{Z}[G]$ und $A = \mathsf{Z}$ als trivialer G-Modul. Da $\mathsf{Z}[G]/\mathsf{Z}$ symmetrisch ist, folgt $C = C^0$ und wegen ${}_G\mathsf{Z} \cong {}_G\mathsf{Z}^*$ ergibt sich schließlich wieder (1).

Aber auch der Fall der Kohomologie von Frobenius-Algebren ist in unseren Überlegungen enthalten. Sei Γ/K eine Frobenius-Algebra (d.h. eine zentrale Frobenius-Erweiterung) über einem Körper K, dann ist auch $\Gamma^e = \Gamma \underset{\mathsf{K}}{\otimes} \Gamma^*$, wobei Γ^* die zu Γ invers-isomorphe Algebra ist, eine Frobenius-Algebra über K. Dann wird Γ als Γ^e-Linksmodul betrachtet, und dafür sind die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt.

6. Vollständige projektive Auflösungen bei Frobenius-Erweiterungen

Wir wollen mit einer Bemerkung über vollständige projektive Auflösungen schließen. Eine solche Auflösung eines Moduls etwa über einer Algebra gewinnt man üblicher Weise so, wie das im Beweis von Satz 3 durchgeführt worden ist. Für die projektiven Auflösungen, von denen man ausgeht, nimmt man meist die Standardauflösungen. Bei einer Frobenius-Erweiterung bietet sich jedoch noch eine andere Möglichkeit, die jetzt angegeben werden soll.

Sei Γ/Λ zunächst eine beliebige unitäre Ringerweiterung, dann erhält man zu einem Modul ${}_\Gamma A$ die (Γ, Λ)-projektive Standardauflösung in der Form

$$\cdots \to A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_0 \xrightarrow{\alpha_0} A \to 0$$

mit

$$A_k = \underbrace{\Gamma \underset{\Lambda}{\otimes} \Gamma \underset{\Lambda}{\otimes} \cdots \underset{\Lambda}{\otimes} \Gamma}_{(k+1)\text{-mal}} \underset{\Lambda}{\otimes} A, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

schreibt man für ein beliebiges Element aus A_k

$$\gamma_{k+1} \otimes \gamma_k \otimes \cdots \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_0,$$

wobei also $\gamma_0 \in A$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k+1} \in \Gamma$, dann ist der Homomorphismus α_k durch

$$\alpha_k(\gamma_{k+1} \otimes \cdots \otimes \gamma_0) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \gamma_{k+1} \otimes \cdots \otimes \gamma_{i+1}\gamma_i \otimes \cdots \otimes \gamma_0$$

gegeben. In dualer Weise erhält man eine (Γ, Λ)-injektive Auflösung von A in der Form

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha^0} A^0 \xrightarrow{\alpha^1} A^1 \xrightarrow{\alpha^2} A^2 \to \cdots \tag{22}$$

mit

$$A^k = \underbrace{\mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda\mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, \ldots, {}_\Lambda\mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda A)\ldots))}_{(k+1)\text{-mal}}$$

wobei die Abbildungen α^k in dualer Weise zu den α_k definiert werden. Ist nun Γ/Λ eine Frobenius-Erweiterung, dann gilt ${}_\Gamma A_\Lambda \cong {}_\Gamma A^k$. Ist Γ/Λ außerdem frei mit den dualen Basen $l_1, \ldots, l_n$ und $r_1, \ldots, r_n$, so ergibt sich aus (22)

$$0 \to A \xrightarrow{\beta_0} A_0 \xrightarrow{\beta_1} A_1 \xrightarrow{\beta_2} A_2 \to \cdots,$$

wobei β_k durch

$$\beta_k(\gamma_k \otimes \cdots \otimes \gamma_0) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k-i} \gamma_k \otimes \cdots \otimes \gamma_{i+1} \otimes r_j \otimes l_j \gamma_i \otimes \cdots \otimes \gamma_0$$

gegeben wird. Eine vollständige (Γ, Λ)-projektive (und (Γ, Λ)-injektive) Auflösung von A erhält man dann durch

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots \to A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_0 & \xrightarrow{\beta_0 \alpha_0} & A_0 & \xrightarrow{\beta_1} & A_1 & \xrightarrow{\beta_2} & A_2 \to \cdots. \\ & & & & & {\scriptstyle \alpha_0}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle \beta_0} & & & \\ & & & & & & A & & & & \\ & & & & & \nearrow & & \searrow & & & \\ & & & & & 0 & & 0 & & & \end{array}$$

Ist ${}_\Lambda A$ endlich erzeugt und Λ-projektiv bzw. Λ-frei, dann ist jeder der Moduln ${}_\Gamma A_k$ endlich erzeugt und Γ-projektiv bzw. Γ-frei. Letzteres ist in Kohomologie der Gruppen und der Frobenius-Algebren der Fall.

Zusatz bei der Korrektur am 7. September 1961. Nach einer brieflichen Mitteilung von K. GRUENBERG, London, existiert auch bei einer projektiven Frobenius-Erweiterung eine Spur mit den gleichen Eigenschaften wie bei einer freien Frobenius-Erweiterung. Daher gelten die hier gewonnenen Resultate z.T. auch für projektive Frobenius-Erweiterungen. — Die Spur erhält man folgendermaßen: Sei τ der zu (3) inverse Isomorphismus, dann bezeichne $\sum_{j=1}^{n} r_j \otimes l_j$ das Bild von τ bei dem Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}\,({}_\Lambda\mathrm{Hom}\,(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda), {}_\Lambda\Gamma) \to \Gamma \underset{\Lambda}{\otimes} \Gamma;$$

die Elemente $l_1, \ldots, l_n$ und $r_1, \ldots, r_n$ treten dann zur Spurbildung an die Stelle der dualen Basen bei einer freien Frobenius-Erweiterung.

Literatur

[1] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological algebra. Princeton Press 1956.

[2] HOCHSCHILD, G.: Relative homological algebra. Trans. Amer. Math. Soc. **82**, 246–269 (1956).

[3] NAKAYAMA, T.: On the complete cohomology theory of Frobenius algebras. Osaka Math. J. **9**, 165–187 (1957).

[4] — Note on complete cohomology of a quasi-Frobenius algebra. Nagoya Math. J. **13**, 115–121 (1958).

[5] —, and T. TSUZUKU: On Frobenius Extensions. I. Nagoya Math. J. **17**, 89–110 (1960).

[6] KASCH, F.: Projektive Frobenius-Erweiterungen. Sitzungsber. Heidelberger Akad. **1960/61**, 89–109.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 2. Mai 1961)

ROQUETTE, P.
Math. Zeitschr. 77, 228–240 (1961)

Über den Singularitätsgrad von Teilringen in Funktionenkörpern

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von
PETER ROQUETTE

1. Problemstellung

Es sei

K ein Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1,
k der Grundkörper von K,
R ein Teilring von K, welcher k enthält und K als Quotientenkörper besitzt,
$\tilde{R}$ die ganzabgeschlossene Hülle von R in K,
$\mathfrak{f}_R$ der Führerdivisor von R,
$\mathfrak{F}_R$ das Vielfachenideal von $\mathfrak{f}_R$ in R; es kann beschrieben werden als das größte in R enthaltene $\tilde{R}$-Ideal.

Bei der Untersuchung der Singularitäten von R stellen sich zwei numerische Invarianten ein, die beide als Maß für die Singularitäten dienen können: erstens der sog. *Singularitätsgrad*

$$\delta(R) = \dim_k \tilde{R}/R,$$

der im Zusammenhang mit dem Riemann-Rochschen Satz auftritt, und zweitens der *Führergrad*

$$d(R) = \operatorname{Grad} \mathfrak{f}_R = \dim_k \tilde{R}/\mathfrak{F}_R,$$

der vornehmlich bei idealtheoretischen Fragestellungen ins Spiel kommt. Man wird nach einem Zusammenhang zwischen $d(R)$ und $\delta(R)$ fragen. Hier gilt der

SATZ 1. *Falls $R = k[x, y]$ über k durch zwei Elemente x, y erzeugbar ist, so gilt*

$$d(R) = 2\delta(R). \tag{1}$$

Beweise dieses Satzes finden sich bei GORENSTEIN[1]) und bei ROSENLICHT[2]), wo auch seine Bedeutung für die Geometrie der ebenen Kurven herausgestellt wird. Im „klassischen" Falle, wobei k der komplexe Zahlkörper ist, ist der Satz 1 schon seit langem bekannt; er findet sich z. B. in dem Lehrbuch von HENSEL-LANDSBERG[3]). Die Verallgemeinerung auf beliebigen Grundkörper,

[1]) GORENSTEIN, D.: An arithmetic theory of adjoint plane curves. Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 414–436 (1952).

[2]) ROSENLICHT, M.: Equivalence relations on algebraic curves. Annals of Math. **56**, insbes. S. 186 (1952).

[3]) HENSEL-LANDSBERG: Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen, insbes. S. 415. Leipzig 1902.

unter Einschluß der inseparablen Funktionenkörper, scheint zum ersten Male bei GORENSTEIN durchgeführt worden zu sein.

Nach Definition von $\delta(R)$ und $d(R)$ kann die Formel (1) auch in der Form

$$\dim_k \tilde{R}/R = \dim_k R/\mathfrak{F}_R$$

geschrieben werden. Es ist zu vermuten, daß dieser Anzahlaussage eine *Strukturaussage* für die Moduln $\tilde{R}/R$ und $R/\mathfrak{F}_R$ zugrunde liegt. Das ist in der Tat der Fall. Nennt man nämlich zwei R-Moduln endlicher Länge „äquivalent" (in Zeichen $\sim$), wenn sie dieselben R-Kompositionsfaktoren besitzen, einschließlich ihrer Vielfachheiten, so lautet die in Rede stehende Strukturaussage wie folgt:

(2) $$\tilde{R}/R \sim R/\mathfrak{F}_R \qquad \text{(als } R\text{-Moduln)}.$$

Hauptziel der vorliegenden Note ist es, die Gültigkeit dieser Strukturaussage aufzuzeigen. Damit wird sich ein Beweis von Satz 1 ergeben, der wohl einfacher ist als die beiden oben zitierten Beweise.

Unter einem „R-Ideal" wollen wir hier einen endlichen R-Modul aus K verstehen; es werden also auch solche Ideale betrachtet, die nicht in R liegen. Zu jedem R-Ideal $\mathfrak{A} \neq 0$ gehört das dazu „reziproke" Ideal $\frac{R}{\mathfrak{A}}$ [3a]), bestehend aus allen Elementen $b \in K$ mit $b \cdot \mathfrak{A} < R$. Man beachte nun, daß

$$\mathfrak{F}_R = \frac{R}{\tilde{R}},$$

zufolge der Kennzeichnung von $\mathfrak{F}_R$ als maximales, in R enthaltenes $\tilde{R}$-Ideal. Ferner ist offenbar

$$R = \frac{R}{R}.$$

Demnach erscheint die Aussage (2) nur als ein Spezialfall der folgenden, für beliebige R-Ideale $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \neq 0$ formulierbaren Aussage [4]):

(3) $$\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \sim \frac{R}{\mathfrak{B}} \Big/ \frac{R}{\mathfrak{A}} \qquad \text{(falls } \mathfrak{A} > \mathfrak{B}\text{)}.$$

Wir werden zeigen, daß auch diese allgemeinere Aussage unter der in Satz 1 angegebenen Voraussetzung richtig ist. Die Unterordnung des Gorensteinschen Satzes unter den allgemeinen Satz (3) bedeutet nicht etwa eine Erschwerung, sondern eine Vereinfachung des Beweises. Es wird sich nämlich zeigen, daß die Gültigkeit von (3) für alle R-Ideale gleichbedeutend ist mit der Gültigkeit

[3a]) Dieser waagerechte Bruchstrich, der die Bildung von reziproken Moduln andeutet, ist zu unterscheiden von dem schrägen Bruchstrich /, der die Bildung von Restklassenmoduln beschreibt.

[4]) Beim Übergang von (2) zu (3) wird wesentlich die Tatsache benutzt, daß $\tilde{R}$ als R-Modul endlich, also ein R-Ideal in unserem Sinne, ist. Hierzu vgl. etwa ROQUETTE, P.: Über den Riemann-Rochschen Satz in Funktionenkörpern vom Transzendenzgrad 1. Math. Nachrichten **19**, 1958, insbes. S. 393.

der Formel

$$\frac{R}{\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)} = \mathfrak{A} \tag{4}$$

für alle R-Ideale. Diese letztere Formel läßt sich unter der in Satz 1 angegebenen Voraussetzung verhältnismäßig einfach beweisen, mit Methoden, die ganz der klassischen Dedekindschen Differententheorie nachgebildet sind.

Angesichts der rein idealtheoretischen Formulierung (3) der Behauptung des Satzes von GORENSTEIN entsteht die Frage, ob nicht der Satz von GORENSTEIN für allgemeinere Ringklassen (nicht nur für Teilringe von Funktionenkörpern vom Transzendenzgrad 1) gilt. Das ist in der Tat der Fall. Um die entsprechende Verallgemeinerung von Satz 1 zu erhalten, hat man zunächst die in Satz 1 eingehende Erzeugbarkeitsvoraussetzung etwas anders zu fassen:

Wenn R über k durch zwei Elemente x, y erzeugt werden kann, so lassen sich diese Erzeugenden nach dem Noetherschen Normierungssatz so wählen, daß y ganz ist über $k[x]$[5]). Beachtet man, daß der Ring $k[x]$ ein Hauptidealring ist, so sieht man, daß sich die in Satz 1 angegebene Voraussetzung der Voraussetzung des folgenden Satzes unterordnet:

SATZ 2. *Es sei R ein beliebiger Integritätsbereich, der über einem Hauptidealring R_0 durch ein R_0-ganzes Element y erzeugt wird. Dann gilt für beliebige R-Ideale $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \neq 0$ die Formel* (3).

Wir werden im folgenden den Satz 2 beweisen.

Der Satz 2 ist insbesondere für Zahlringe anwendbar, die aus dem Ring der ganzen rationalen Zahlen durch Adjunktion eines ganzen Elementes entstehen. Dieser Fall wurde bei GORENSTEIN ausdrücklich erwähnt und dort mitbehandelt. Es scheint jedoch in Vergessenheit geraten zu sein, daß der Satz 2 im Falle von Zahlringen schon seit langem bekannt ist: Er steht schon bei DEDEKIND[6]). In der Tat verläuft unser Beweis ganz wie der Dedekindsche Beweis; die einzige Schwierigkeit besteht darin, daß hier die Separabilität von R über R_0 nicht vorausgesetzt wird und daher die gewöhnliche Spurfunktion nicht zu gebrauchen ist. Man kommt jedoch mit Hilfe einer anderen, von der Erzeugenden y abhängigen „verallgemeinerten Spurfunktion" stets zum Ziel. Der Vollständigkeit halber führen wir den Beweis hier auch in den Einzelheiten durch, obwohl ein Hinweis auf DEDEKIND genügt hätte, sobald nur die verallgemeinerte Spurfunktion angegeben ist. So mag diese

[5]) Das läßt sich etwa folgendermaßen verifizieren: Sind x, y beliebige Erzeugende von R über k, so ersetze man x durch $x + y^m$ mit $m > 0$. Dann sind auch $x + y^m$, y Erzeugende von R über k. Wenn y nicht ganz ist über $x + y^m$, so gibt es eine Bewertung w von K über k mit $w(x + y^m) \geqq 0$, $w(y) < 0$. Es folgt $w(x) = w((x + y^m) - y^m) = m\,w(y) < 0$. Also ist w ein Pol von x und m ein Teiler der Ordnung dieses Poles. Wählt man daher m größer als die Ordnungen der endlich vielen Pole von x, so folgt, daß y ganz ist über $x + y^m$.

[6]) DEDEKIND, R.: Über die Diskriminanten endlicher Körper. Abhandl. der Königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen **29** (1882) = Gesammelte mathematische Werke Bd. I, Nr. XIX; insbes. S. 380.

Note gleichzeitig dem Gedächtnis an den großen Klassiker der Zahlentheorie gewidmet sein.

Zur Abrundung unserer Ergebnisse betrachten wir in Abschnitt 4 den Übergang von einem Ring R zu einem Quotientenring von R. Wir zeigen, daß sich die Gültigkeit der Formel (3) dabei vererbt. Umgekehrt folgt aus der Gültigkeit von (3) für jeden lokalen Quotientenring von R die Gültigkeit für R selbst.

Ist R lokal mit der kompletten Hülle $\hat{R}$, so zeigen wir in Abschnitt 5, daß sich die Gültigkeit von (3) für $\hat{R}$ auf den Ring R vererbt. Andererseits läßt sich für einen *kompletten* lokalen Ring, dessen maximales Ideal von zwei Elementen erzeugbar ist, zeigen, daß er die Voraussetzung von Satz 2 erfüllt. Wir gelangen so zu dem folgenden Satz, der als Gegenstück zu dem Satz 1 gelten kann[7]):

SATZ 3. *Es sei R ein eindimensionaler lokaler Integritätsbereich, dessen maximales Ideal $\mathfrak{P}=Rx+Ry$ durch zwei Elemente x, y erzeugbar ist. Vorausgesetzt wird, daß die Charakteristik von R gleich der Charakteristik p des Restklassenkörpers $R/\mathfrak{P}$ ist, oder im charakteristikungleichen Falle, daß R unverzweigt ist* (d.h. $p \notin \mathfrak{P}^2$). *Dann gilt für beliebige R-Ideale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \neq 0$ die Formel* (3).

Es sei bemerkt, daß dieser Satz das Ergebnis von KODAIRA[8]) enthält, der den Satz von GORENSTEIN für gewisse Ringe analytischer Funktionen bewiesen hat.

BEMERKUNG. Um den Satz 3 beweisen zu können, benötigt man den Satz 2 nicht nur in der angegebenen Fassung für Integritätsbereiche, sondern auch für Nullteilerringe. Denn beim Übergang von einem lokalen Ring zu seiner kompletten Hülle können Nullteiler auftreten, selbst wenn der ursprüngliche Ring nullteilerfrei ist. Die Einbeziehung der Nullteiler macht jedoch keine wesentlichen Schwierigkeiten. Statt des Quotientenkörpers von R hat man den vollen Quotientenring von R zu betrachten; dieser wird ebenfalls mit K bezeichnet. Statt der in Satz 2 und 3 angegebenen Voraussetzung $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \neq 0$ hat man vorauszusetzen, daß $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ nicht aus lauter Nullteilern bestehen. Wir sprechen dann von Nichtnullteilerïdealen.

Es gelten dann die

ZUSÄTZE FÜR NULLTEILERRINGE:

ZU SATZ 2. *Der Satz 2 gilt auch für einen Ring R mit Nullteilern, vorausgesetzt, daß R_0 keine Nullteiler von R enthält.*

[7]) GORENSTEIN[1]) beweist seinen Satz zuerst für die kompletten Hüllen der lokalen Quotientenringe von $R=k[x, y]$, schließt dann auf die Quotientenringe und von da auf den Ring R selbst zurück. Dieser Schluß vom „Lokalen" auf das „Globale" gibt jedoch für uns keine Beweisvereinfachung, obwohl er nach Satz 3 auch angewendet werden kann.

[8]) KODAIRA, On compact complex analytic surfaces I. Lecture Notes Princeton University 1955. Das Studium des Kodairaschen Beweises und seiner Verwandtschaft mit den Methoden der Dedekindschen Differententheorie bildete den Ausgangspunkt unserer Überlegungen, die anläßlich der Kodairaschen Vorlesung im Jahre 1955 durchgeführt wurden.

ZU SATZ 3. *Auch der Satz 3 gilt für Nullteilerringe, vorausgesetzt, daß das maximale Ideal $\mathfrak{P}$ von R nicht aus lauter Nullteilern besteht. Im charakteristikungleichen Falle ist zusätzlich vorauszusetzen, daß die Charakteristik p von $R/\mathfrak{P}$ kein Nullteiler in R ist.*

Um nun unsere folgenden Überlegungen nicht von vorneherein mit der Diskussion von Nullteilern, die unwesentlich ist, zu belasten, führen wir unsere Beweise zunächst für den Fall von Integritätsbereichen durch. Am Schluß eines jeden Abschnitts findet sich dann jeweils ein „Zusatz für Nullteilerringe", in dem diejenigen zusätzlichen Überlegungen mitgeteilt sind, die beim Auftreten von Nullteilern erforderlich sind.

2. Der Reziprozitätssatz

In diesem Abschnitt betrachten wir einen Noetherschen Integritätsbereich R der Dimension 1. Diese Dimension ist im idealtheoretischen Sinne zu verstehen; die Voraussetzung der Dimension 1 besagt also, daß jedes Primideal $\mathfrak{P} \neq 0$ von R *maximal* ist. Bekanntlich gilt dann in jedem Restklassenring $R/\mathfrak{N}$ nach einem Ideal $\mathfrak{N} \neq 0$ aus R die Minimalbedingung für Ideale[9]).

Es sei K der Quotientenkörper von R. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ usw. stets von 0 verschiedene R-Ideale aus K. Ist $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, so gibt es ein Element $u \neq 0$ aus R mit $u \cdot \mathfrak{A} < \mathfrak{B}$; folglich besitzt der Modul $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ einen Annulator $\mathfrak{N} \neq 0$ und ist daher als endlicher $R/\mathfrak{N}$-Modul von endlicher Länge. Insbesondere ist die Aussage

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \sim \frac{R}{\mathfrak{B}} \Big/ \frac{R}{\mathfrak{A}} \qquad (\text{falls } \mathfrak{A} > \mathfrak{B}) \tag{3}$$

im Sinne des in Abschnitt 1 definierten Äquivalenzbegriffes sinnvoll. Daneben betrachten wir die Aussage:

$$\frac{R}{\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)} = \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Die Formel (4) werde „Reziprozitätsformel" genannt. Es gilt der folgende „Reziprozitätssatz":

SATZ 4. *Die Gültigkeit der Aussage* (3) *für alle R-Ideale $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \neq 0$ ist gleichbedeutend mit der Gültigkeit von* (4) *für alle R-Ideale $\mathfrak{A} \neq 0$.*

BEWEIS. (4) $\Rightarrow$ (3): Die Reziprozitätsformel (4) besagt, daß die Abbildung $\mathfrak{A} \to \frac{R}{\mathfrak{A}}$ umkehrbar eindeutig ist, und daß jedes Ideal $\mathfrak{A} \neq 0$ als Bild auftritt. Dabei wird offenbar die Inklusionsrelation umgekehrt. Folglich entspricht einer R-Kompositionsreihe

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 > \mathfrak{A}_1 > \cdots > \mathfrak{A}_s = \mathfrak{B}$$

von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ eine R-Kompositionsreihe

$$\frac{R}{\mathfrak{A}} = \frac{R}{\mathfrak{A}_0} < \frac{R}{\mathfrak{A}_1} < \cdots < \frac{R}{\mathfrak{A}_s} = \frac{R}{\mathfrak{B}}$$

[9]) KRULL, W.: Idealtheorie. Ergebnisse d. Math. Bd. 4, H. 3. Berlin 1935; insbes. § 2, 10.

von $\frac{R}{\mathfrak{A}}$ nach $\frac{R}{\mathfrak{B}}$. Demnach darf zum Beweis von (3) angenommen werden, daß $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ als R-Modul *einfach* ist; dann ist auch $\frac{R}{\mathfrak{B}}\Big/\frac{R}{\mathfrak{A}}$ einfach. Als einfacher R-Modul ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ isomorph zum Restklassenkörper $R/\mathfrak{P}$ nach einem eindeutig bestimmten maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ von R und ist daher durch seinen Annulator $\mathfrak{P}$ eindeutig bestimmt. Entsprechend ist $\frac{R}{\mathfrak{B}}\Big/\frac{R}{\mathfrak{A}}$ durch seinen Annulator $\mathfrak{Q}$ bestimmt. Zu zeigen: $\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}$. Dazu genügt es zu zeigen: $\mathfrak{P}<\mathfrak{Q}$. In der Tat: Wegen $\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{A}<\mathfrak{B}$ gilt

$$\mathfrak{P}\cdot\frac{R}{\mathfrak{B}}\cdot\mathfrak{A}<\frac{R}{\mathfrak{B}}\cdot\mathfrak{B}<R,$$

also

$$\mathfrak{P}\cdot\frac{R}{\mathfrak{B}}<\frac{R}{\mathfrak{A}}.$$

(3) $\Rightarrow$ (4): Zur Abkürzung bezeichnen wir den in (4) links stehenden Modul mit $\mathfrak{A}^*$. Es ist $\mathfrak{A}^*>\mathfrak{A}$. Nach (3) folgt, daß

$$\mathfrak{A}^*/\mathfrak{A}\sim\frac{R}{\mathfrak{A}}\Big/\frac{R}{\mathfrak{A}^*}.$$

Nun gilt offenbar $\frac{R}{\mathfrak{A}}=\frac{R}{\mathfrak{A}^*}$ wegen

$$\frac{R}{\mathfrak{A}}\cdot\mathfrak{A}^*=\frac{R}{\mathfrak{A}}\cdot\frac{R}{\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)}<R.$$

Daher gilt auch $\mathfrak{A}^*=\mathfrak{A}$, was zu zeigen war.

ZUSATZ FÜR NULLTEILERRINGE. Wenn R Nullteiler besitzt, so ist die Voraussetzung der Eindimensionalität von R folgendermaßen zu formulieren: Jedes nichtminimale Primideal von R ist maximal. Dann gilt in jedem Restklassenring $R/\mathfrak{N}$ nach einem Nichtnullteilerideal $\mathfrak{N}$ von R die Minimalbedingung. Hieraus folgt: Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Nichtnullteilerideale aus dem vollen Quotientenring K von R, und ist $\mathfrak{A}>\mathfrak{B}$, so besitzt $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ endliche Länge.

Der Beweis von Satz 4 verläuft wörtlich genau so auch für einen Nullteilerring, wenn man sich auf die Betrachtung von Nichtnullteileridealen beschränkt.

3. Beweis von Satz 2

(a) Wenn R über einem Hauptidealring R_0 endlich ist, so ist R Noethersch und besitzt die Dimension 1. Folglich kann der Reziprozitätssatz aus Abschnitt 2 angewandt werden. Demnach genügt es zu zeigen, daß für die R-Ideale $\mathfrak{A}\neq 0$ die Reziprozitätsformel (4) gilt. Dazu werden wir zeigen, daß $\frac{R}{\mathfrak{A}}$ als „Komplementärmodul" $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ in bezug auf eine gewisse lineare Funktion η aufgefaßt werden kann.

(b) Sei $f(Y)$ das Polynom kleinsten Grades über R_0 mit höchstem Koeffizienten 1, das y als Nullstelle besitzt. Ist n der Grad von $f(Y)$, so bilden $1, y, \ldots, y^{n-1}$ eine Basis von R über R_0, d.h. wir haben die direkte Modulzerlegung

$$R=R_0+R_0\,y+\cdots+R_0\,y^{n-1} \tag{5}$$

über R_0. Für die Quotientenkörper K, K_0 von R, R_0 bedeutet das die direkte Zerlegung

$$K = K_0 + K_0 y + \cdots + K_0 y^{n-1}. \tag{6}$$

Also läßt sich jedes Element $a \in K$ eindeutig in der Form darstellen:

$$a = a_0 + a_1 y + \cdots + a_{n-1} y^{n-1} \quad (\text{mit } a_i \in K_0). \tag{7}$$

Wir setzen:

$$\eta(a) = a_{n-1}.$$

Die so bestimmte K_0-lineare Funktion η: $K \to K_0$ wird uns einen Ersatz bieten für die gewöhnlich in der Differententheorie verwendete Spurfunktion[10]).

Es sei $u_1, \ldots, u_n$ eine K_0-Basis von K. Da $\eta \neq 0$, so ist die Diskriminante

$$\det \eta(u_i u_j) \neq 0. \tag{8}$$

Folglich besitzt jedes Gleichungssystem der Form

$$\eta(u_i z) = b_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

in denen die b_i vorgegebene Elemente aus K_0 bedeuten, eine *eindeutige* Lösung $z \in K$. Insbesondere gibt es eindeutig bestimmte Elemente $v_1, \ldots, v_n \in K$, für die

$$\eta(u_i v_j) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ wenn } i \neq j \\ 1, \text{ wenn } i = j \end{array} \right\} \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Die $v_1, \ldots, v_n$ sind nach (9) linear unabhängig über K_0, bilden also eine K_0-Basis von K: die zu $u_1, \ldots, u_n$ gehörige „*Komplementärbasis*".

(c) Es sei $\mathfrak{A} \neq 0$ ein endliches R-Ideal aus K. Dann ist $\mathfrak{A}$ als R_0-Modul endlich (nach (5)) und enthält n linear unabhängige Elemente. Folglich besitzt $\mathfrak{A}$ eine R_0-Basis aus n Elementen (denn R_0 ist Hauptidealring):

$$\mathfrak{A} = R_0 u_1 + \cdots + R_0 u_n.$$

Wir definieren nach DEDEKIND den „*Komplementärmodul*" $\mathfrak{A}'$ als den R_0-Modul mit der zu $u_1, \ldots, u_n$ komplementären Basis:

$$\mathfrak{A}' = R_0 v_1 + \cdots + R_0 v_n.$$

Es ist klar, daß $\mathfrak{A}'$ unabhängig von der Wahl der Basis $u_1, \ldots, u_n$ ist; dies folgt übrigens auch aus der unten angegebenen Charakterisierung (12) von $\mathfrak{A}'$. Weiter ist klar, daß

$$(\mathfrak{A}')' = \mathfrak{A},$$

denn die Beziehung einer Basis zu ihrer Komplementärbasis ist nach (9) symmetrisch. Demnach ergibt sich die zu beweisende Reziprozitätsformel (3), sobald wir gezeigt haben, daß

$$\mathfrak{A}' = \frac{R}{\mathfrak{A}}. \tag{10}$$

[10]) Falls K/K_0 separabel ist, so ist $f'(y) \neq 0$, und es gilt die bekannte, aus der Lagrangeschen Interpolationsformel abzuleitende Beziehung: $\eta(a) = \mathrm{Spur}_{K/K_0}\left(\frac{a}{f'(y)}\right)$.

Dies soll im folgenden bewiesen werden. Dabei werden wir nicht explizit die obige Definition von $\mathfrak{A}'$ mit Hilfe von Komplementärbasen verwenden, sondern die folgende Kennzeichnung, die sich unmittelbar aus den Relationen (9) ergibt:

(11) *$\mathfrak{A}'$ besteht aus genau denjenigen Elementen $b \in K$, für welche $\eta(b \cdot \mathfrak{A}) < R_0$.*

(d) Beweis von (10). Zunächst folgt nach (5):

$$\eta(R) = R_0. \tag{12}$$

Hieraus folgt weiter: $\eta\left(\frac{R}{\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{A}\right) < \eta(R) = R_0$, also nach (11):

$$\frac{R}{\mathfrak{A}} < \mathfrak{A}'.$$

Es bleibt die andere Inklusionsrichtung nachzuweisen, d.h.: aus $b \notin \frac{R}{\mathfrak{A}}$ folgt $b \notin \mathfrak{A}'$. Es gibt ein Element $c \in \mathfrak{A}$ derart, daß $a = bc \notin R$. Wir zeigen, daß $\eta(a \cdot R) \not< R_0$.

Wir denken uns a in der Form (7) gegeben. Wegen $a \notin R$ liegen nicht alle Koeffizienten in R_0; es sei a_i der letzte nicht in R_0 gelegene Koeffizient. Wir schreiben:

$$a = (a_0 + a_1 y + \cdots + a_i y^i) + z \qquad \text{mit } z \in R.$$

Dann gilt unter Berücksichtigung von (12):

$$\eta(a \cdot y^{n-1-i}) = a_i + \eta(z \cdot y^{n-1-i}) \equiv a_i \not\equiv 0 \bmod R_0,$$

also in der Tat $\eta(a \cdot R) \not< R_0$.

Das war zu zeigen.

Zusatz für Nullteilerringe. Daß die Summendarstellung (5) *direkt* ist, wird durch die Voraussetzung garantiert, daß R_0 keine Nullteiler von R enthält. Aus dieser Voraussetzung folgt auch, daß der Quotientenkörper K_0 von R_0 im vollen Quotientenring K von R enthalten ist. Daher ist (6) eine Folge aus (5).

Daß die Diskriminante (8) nicht verschwindet, kann jetzt nicht allein daraus gefolgert werden, daß $\eta \neq 0$. Vielmehr kann man etwa die Diskriminante *einer* speziellen Basis von K über K_0 ausrechnen und nachprüfen, daß sie $\neq 0$ (z.B. bei der Basis $1, y, \ldots, y^{n-1}$). Man kann aber auch direkt so vorgehen: Wenn die Diskriminante (8) verschwindet, so ist das homogene Gleichungssystem

$$\eta(u_i a) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

durch ein Element $a \neq 0$ aus K lösbar. Für dieses a wäre $\eta(K \cdot a) = 0$. Ist a_i der letzte nicht verschwindende Koeffizient der Darstellung (7), so ergibt sich jedoch:

$$\eta(y^{n-1-i} a) = a_i \neq 0,$$

was ein Widerspruch ist.

In (c) hat man sich auf Nichtnullteilerideale zu beschränken; für diese gilt die Aussage daß sie n linear unabhängige Elemente über R_0 enthalten

4. Quotientenringe

Wie in Abschnitt 2 sei R ein Noetherscher Integritätsbereich der Dimension 1. Es sei M eine Halbgruppe aus R, welche 0 nicht enthält, und es sei R_M der zugehörige Quotientenring. Falls M aus den nicht in einem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ gelegenen Elementen von R besteht, so schreiben wir wie üblich $R_{\mathfrak{P}}$ statt R_M.

Wir sagen, daß für R die Reziprozitätsformel gilt, wenn für jedes R-Ideal $\mathfrak{A} \neq 0$ aus K die Formel (4) gilt — oder, was nach Abschnitt 2 dasselbe bedeutet, wenn für je zwei R-Ideale $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \neq 0$ aus K die Formel (3) gilt.

LEMMA 1. *Wenn für R die Reziprozitätsformel gilt, so gilt sie auch für jeden Quotientenring R_M.*

Umgekehrt: Wenn für jeden lokalen Quotientenring $R_{\mathfrak{P}}$ nach einem maximalen Ideal $\mathfrak{P} < R$ die Reziprozitätsformel gilt, so gilt sie auch für R.

BEWEIS. Jedes R-Ideal $\mathfrak{A}$ erzeugt ein R_M-Ideal $\mathfrak{A}_M = R_M \cdot \mathfrak{A}$. Dabei läßt sich *jedes* R_M-Ideal $\mathfrak{B}$ durch ein R-Ideal $\mathfrak{A}$ erzeugen: Ist nämlich $\mathfrak{B} = R_M u_1 + \cdots + R_M u_s$, so kann man $\mathfrak{A} = Ru_1 + \cdots + Ru_s$ setzen; dann wird $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_M$.

Um daher aus der Reziprozitätsformel für R die Reziprozitätsformel für R_M herzuleiten, ist nur noch die Formel

$$\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)_M = \frac{R_M}{\mathfrak{A}_M} \tag{13}$$

zu verifizieren. Zunächst gilt:

$$\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)_M \cdot \mathfrak{A}_M = R_M \cdot \left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right) \cdot \mathfrak{A} < R_M \cdot R = R_M,$$

also gilt in (13) jedenfalls das $<$ Zeichen. Um die Umkehrung zu beweisen, sei $b \in \frac{R_M}{\mathfrak{A}_M}$, also $b \cdot \mathfrak{A}_M < R_M$. Dann gilt für jedes Element $a \in \mathfrak{A}$ eine Relation der Form $b \cdot a = \frac{u}{m}$ mit $u \in R$ und $m \in M$. Schreibt man diese Relation für die Elemente a_i eines endlichen Erzeugendensystems von $\mathfrak{A}$ hin, und multipliziert die auftretenden Nenner m_i, und nennt das Produkt wieder m, so folgt: $b \cdot \mathfrak{A} < \frac{R}{m}$, also $m \cdot b \in \frac{R}{\mathfrak{A}}$, $b \in \left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)_M$.

Damit ist der erste Teil von Lemma 1 bewiesen. Um die Umkehrung zu zeigen, hat man angesichts der Formel (13) nur nachzuweisen, daß ein R-Ideal $\mathfrak{A}$ durch seine sämtlichen lokalen Komponenten $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}}$ (wenn $\mathfrak{P}$ alle maximalen Ideale von R durchläuft) bestimmt ist:

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{\mathfrak{P}} \mathfrak{A}_{\mathfrak{P}}. \tag{14}$$

Dazu sei $b \in K$ derart, daß $b \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{P}}$ für alle $\mathfrak{P}$; wir haben zu zeigen, daß $b \in \mathfrak{A}$. Es sei $\mathfrak{W}$ das Ideal derjenigen Elemente $w \in R$, für welche $wb \in \mathfrak{A}$; wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{W} = R$. Dazu genügt es, nachzuweisen, daß $\mathfrak{W}$ in keinem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ von R enthalten ist. In der Tat: wegen $b \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{P}}$ gibt es eine Darstellung von b der Form $b = \frac{a}{w}$ mit $a \in \mathfrak{A}$, $w \in R$, $w \notin \mathfrak{P}$.

Das war zu zeigen[11]).

ZUSATZ FÜR NULLTEILERRINGE. Wenn M Nullteiler enthält, so ist die natürliche Abbildung $\varphi_M: R \to R_M$ nicht monomorph, also kann dann R_M nicht mehr als R umfassender Teilring von K angesehen werden. Jedenfalls kann die Abbildung φ_M in eindeutiger Weise als Abbildung des vollen Quotientenringes K von R in den vollen Quotientenring K_M von R_M fortgesetzt werden, wie das folgende Ergebnis zeigt:

(15) *Ist a Nichtnullteiler von R, so ist $\varphi_M(a)$ Nichtnullteiler von R_M.*

Denn aus $\varphi_M(a)\,\varphi_M(b) = \varphi_M(ab) = 0$ folgt, daß ab im Kern $\mathfrak{N}_M$ von φ_M enthalten ist. $\mathfrak{N}_M$ besteht aus denjenigen Elementen aus R, welche sich durch ein Element aus M annullieren lassen. Also gibt es ein $m \in M$ mit $abm = 0$. Es folgt $bm = 0$, also $\varphi_M(b)\,\varphi_M(m) = 0$, also $\varphi_M(b) = 0$, da $\varphi_M(m)$ Einheit in R_M ist.

Wir bezeichnen die eindeutige Fortsetzung von φ_M auf K ebenfalls mit φ_M. Ist φ_M epimorph, d.h. gilt $\varphi_M(K) = K_M$? Dies kann man nur unter einer Zusatzvoraussetzung schließen:

Im folgenden sei zusätzlich vorausgesetzt, daß das Nullideal von R keine eingebetteten Komponenten besitzt, d.h. daß die Nullteilerprimideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ von R sämtlich minimale Primideale sind.

Dann gilt:

(16) *Ist $\varphi_M(a)$ Nichtnullteiler in $\varphi_M(R)$, so kann das Urbild a als Nichtnullteiler aus R gewählt werden.*

Dazu sei a zunächst ein beliebiges Urbild. Man hat dann $u \in \mathfrak{N}_M$ so zu bestimmen, daß $a + u$ kein Nullteiler ist, d.h. $a + u \notin \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \ldots, s$. Dazu genügt es, u so zu bestimmen, daß

$$(17) \qquad \left.\begin{array}{l} u \notin \mathfrak{p}_i, \text{ wenn } a \in \mathfrak{p}_i \\ u \in \mathfrak{p}_i, \text{ wenn } a \notin \mathfrak{p}_i \end{array}\right\} \qquad (i = 1, \ldots, s).$$

Da nach der angegebenen Zusatzvoraussetzung $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ für $i \neq j$, so lassen sich diese Bedingungen (17) jedenfalls durch ein Element u aus R erfüllen. Mit u ist auch jede Potenz von u Lösung von (17). Wir behaupten, daß eine geeignete Potenz von u in $\mathfrak{N}_M$ liegt, d.h. daß jede Lösung von (17) im Radikal von $\mathfrak{N}_M$ liegt. Das Radikal von $\mathfrak{N}_M$ ist gleich dem Durchschnitt derjenigen $\mathfrak{p}_i$, die zu M disjunkt sind[11]). Für jedes dieser $\mathfrak{p}_i$ ist $\varphi_M(\mathfrak{p}_i)$ ein minimales Primideal aus $\varphi_M(R)$ und daher $\varphi_M(a) \notin \varphi_M(\mathfrak{p}_i)$, $a \notin \mathfrak{p}_i$, $u \in \mathfrak{p}_i$. Das war zu zeigen.

Aus (16) folgt, daß φ_M eine Abbildung von K auf den vollen Quotientenring K_M von R_M vermittelt.

Nun verläuft der Beweis von Lemma 1 ganz entsprechend wie oben: Man hat jetzt $\mathfrak{A}_M = R_M \cdot \varphi_M(\mathfrak{A})$ zu setzen. Ist $\mathfrak{A}$ Nichtnullteilerideal, so ist auch

[11]) Übrigens sind die Formeln (13), (14) aus der Grellschen Theorie der Quotientenringe wohlbekannt; vgl. dazu etwa ZARISKI-SAMUEL: Commutative Algebra I, Ch. IV, § 10. New York 1958.

$\mathfrak{A}_M$ Nichtnullteilerideal (nach (15)). Umgekehrt: jedes Nichtnullteilerideal aus K_M wird durch ein Nichtnullteilerideal aus K erzeugt (nach (16)). — Die Formel (13) wird genau so wie oben bewiesen, nur daß an geeigneten Stellen die Abbildung φ_M einzuschalten ist. — In Formel (14) ist das rechtsstehende Durchschnittsideal zu ersetzen durch das Ideal $\mathfrak{B}$ derjenigen $b \in K$, für welche $\varphi_{\mathfrak{P}}(b) \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{P}}$ für alle $\mathfrak{P}$.

5. Lokale Ringe. (Beweis von Satz 3)

a) Komplette[12]) lokale Ringe

LEMMA 2. *Es sei R komplett. Falls R die in Satz 3 angegebenen Bedingungen erfüllt, so kann R über einem Hauptidealring R_0 durch ein einziges R_0-ganzes Element y erzeugt werden.*

Insbesondere folgt nach Satz 2, daß für R die Reziprozitätsformel gilt.

BEWEIS. Zunächst behandeln wir den charakteristikgleichen Fall. Wir benutzen den Satz von COHEN[13]), demzufolge in R ein Vertreterkörper k des Restklassenkörpers $R/\mathfrak{P}$ existiert. Wir wählen ein Element $x \in \mathfrak{P}$, $x \notin \mathfrak{P}^2$ und bilden in R den Potenzreihenring

$$R_0 = k[[x]].$$

Da keine Potenz von x verschwindet, so ist dies der *freie* Potenzreihenring in x über k. Insbesondere ist R_0 ein diskreter Bewertungsring und als solcher ein Hauptidealring.

Nach Voraussetzung läßt sich $\mathfrak{P}$ durch x und ein weiteres Element y erzeugen. Es gilt $y^n \in Rx$ für hinreichend großes n, denn Rx ist Primärideal zu $\mathfrak{P}$ und daher $\mathfrak{P}^n \subset Rx$ für hinreichend großes n. Wir denken uns n fest gewählt und setzen:

$$Z = k + ky + \cdots + ky^{n-1}.$$

Dann ist Z ein Vertretersystem für R modulo Rx, denn die Polynome in x, y vom Grade $\leqq n-1$ mit Koeffizienten aus k bilden ein Vertretersystem für R modulo $\mathfrak{P}^n$. Durch Induktion ergibt sich weiter, daß für jedes m die Menge

$$Z_m = Z + Zx + \cdots + Zx^{m-1}$$

ein Vertretersystem für R/Rx^m bildet. Da R komplett ist, erhalten wir beim Übergang $m \to \infty$:

$$R = \sum_{\mu=0}^{\infty} Z x^{\mu} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} k x^{\mu} y^{i} = \sum_{i=0}^{n-1} R_0 y^{i},$$

[12]) Die Bezeichnung „komplett" bezieht sich auf die durch die Potenzen des maximalen Ideals definierte Topologie und besagt, daß jede Cauchy-Folge konvergiert. Andere gebräuchliche Bezeichnungen: „perfekt", „vollständig".

[13]) COHEN, I. S.: On the structure and ideal theory of complete local rings. Trans. Amer. Math. Soc. **59**, 54—106 (1946). Siehe auch: ROQUETTE, P.: Abspaltung des Radikals in vollständigen lokalen Ringen. Abhandl. Math. Seminar Hamburg **23**, 79—113 (1959).

wobei unendliche Summen im Sinne der Konvergenz in R zu verstehen sind. Daher ist R über R_0 endlich und wird durch y erzeugt.

Im charakteristikungleichen Falle sind diese Überlegungen folgendermaßen zu modifizieren: Für R_0 wählen wir einen diskreten Bewertungsring aus R, der denselben Restklassenkörper wie R besitzt, und dessen maximales Ideal durch p erzeugt wird. Die Existenz eines solchen Ringes wird uns ebenfalls durch den Cohenschen Satz gegeben[13]). Für k wählen wir irgendein Vertretersystem von $R/\mathfrak{P}=R_0/R_0p$ aus R_0. Dann ist also:

$$R_0=\sum_{\mu=0}^{\infty} k\,p^{\mu}.$$

Da nach Voraussetzung $p\notin\mathfrak{P}^2$, so läßt sich p durch Hinzunahme eines Elementes y zu einem Erzeugendensystem von $\mathfrak{P}$ ergänzen. Wir schließen dann genau so wie oben, wobei nur x durch p zu ersetzen ist[14]).

Zusatz für Nullteilerringe. Besitzt R Nullteiler, so sind die im Zusatz zu Satz 3 in Abschnitt 1 angegebenen Bedingungen zu stellen.

Das Element $x\in\mathfrak{P}$, $x\notin\mathfrak{P}^2$, das im charakteristikgleichen Falle zur Konstruktion von R_0 dient, ist nunmehr als Nichtnullteiler zu wählen. Daß dies möglich ist, ergibt sich aus:

(18) *Zu $x\in\mathfrak{P}$ gibt es $u\in\mathfrak{P}^2$ derart, daß $x+u$ kein Nullteiler in R ist.*

Bedeuten $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_s$ wie in Abschnitt 4 die zu 0 gehörigen Primideale, so soll $x+u\notin\mathfrak{p}_i$ (für $i=1,\ldots,s$) sein. Dazu genügt es, u so zu bestimmen, daß

$$\left.\begin{array}{l} u\notin\mathfrak{p}_i, \text{ wenn } x\in\mathfrak{p}_i \\ u\in\mathfrak{p}_i, \text{ wenn } x\notin\mathfrak{p}_i \end{array}\right\} \qquad (i=1,\ldots,s). \tag{19}$$

Hierbei ist nun $\mathfrak{P}\neq\mathfrak{p}_i$, denn $\mathfrak{P}$ besteht nicht aus lauter Nullteilern (nach Voraussetzung). Daher sind die $\mathfrak{p}_i$ sämtlich minimale Primideale von R. Also $\mathfrak{p}_i\not\subset\mathfrak{p}_j$ für $i\neq j$. Daher lassen sich diese Bedingungen (19) jedenfalls durch ein Element $u\in R$ erfüllen. Falls $x\notin\mathfrak{p}_i$ für mindestens ein i, so ist $u\in\mathfrak{p}_i$, $u\in\mathfrak{P}$. Falls $x\in\mathfrak{p}_i$ für alle i, so besagt die Bedingung (19), daß $u\notin\mathfrak{p}_i$ für alle i, d.h. daß u kein Nullteiler ist. Da $\mathfrak{P}$ nicht aus lauter Nullteilern besteht, so kann daher u als Nichtnullteiler in $\mathfrak{P}$ gewählt werden. — In jedem Falle finden wir eine Lösung u von (19), welche in $\mathfrak{P}$ enthalten ist. Nach Ersetzung von u durch u^2 erhalten wir dann eine in $\mathfrak{P}^2$ enthaltene Lösung von (19), wie sie gesucht wurde.

Denken wir uns demgemäß x als Nichtnullteiler gewählt, so ist das Ideal Rx primär für $\mathfrak{P}$ und daher $\mathfrak{P}^n\subset Rx$ für geeignetes n. Der weitere Beweis wird dann genau so wie oben geführt. Nach der Wahl von x besitzt der Ring $R_0=k[[x]]$ keine Nullteiler von R, so daß auch die in Satz 2 für Nullteilerringe angegebene Zusatzvoraussetzung erfüllt ist.

Im charakteristikungleichen Falle hat man wieder x durch p zu ersetzen. Daß p kein Nullteiler ist, wurde im Zusatz zu Satz 3 vorausgesetzt.

[14]) Lemma 2 findet sich im wesentlichen auch bei Cohen[13]), S. 90, Theorem 16.

b) Beliebige lokale Ringe

Es sei R ein eindimensionaler lokaler Ring, und $\hat{R}$ seine komplette Hülle. Wir lassen diesmal gleich zu, daß R (und $\hat{R}$) Nullteiler besitzen.

LEMMA 3. *Falls die Reziprozitätsformel für $\hat{R}$ gilt, so gilt sie auch für R.*

BEWEIS. In diesem Beweis benutzen wir eine Reihe von bekannten Sätzen über das Verhalten von R und von endlichen R-Moduln beim Übergang zur kompletten Hülle. Hierfür sei etwa auf die Darstellung in ZARISKI-SAMUEL verwiesen[15]).

Ein Nichtnullteiler aus R ist auch ein Nichtnullteiler in $\hat{R}$. Folglich ist der volle Quotientenring K von R im vollen Quotientenring $\hat{K}$ von $\hat{R}$ enthalten. Jedes R-Ideal $\mathfrak{A}$ aus K erzeugt ein $\hat{R}$-Ideal $\hat{\mathfrak{A}}=\hat{R}\cdot\mathfrak{A}$ aus $\hat{K}$, das als komplette Hülle von $\mathfrak{A}$ aufgefaßt werden kann. Dabei gilt

$$\mathfrak{A}=\hat{\mathfrak{A}}\cap K.$$

Ist $\mathfrak{A}$ Nichtnullteilerideal, so ist es auch $\hat{\mathfrak{A}}$.

Um daher aus der Reziprozitätsformel für $\hat{R}$ die Reziprozitätsformel für R herzuleiten, ist nur noch die Formel

$$\widehat{\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)}=\frac{\hat{R}}{\hat{\mathfrak{A}}} \tag{20}$$

für Nichtnullteilerideale zu verifizieren. Zunächst gilt:

$$\widehat{\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)}\cdot\hat{\mathfrak{A}}=\hat{R}\cdot\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)\cdot\mathfrak{A}\subset\hat{R}\cdot R=\hat{R},$$

also gilt in (20) jedenfalls das $\subset$ Zeichen. Um die Umkehrung zu beweisen, sei $b\in\frac{\hat{R}}{\hat{\mathfrak{A}}}$, also $b\cdot\hat{\mathfrak{A}}\subset\hat{R}$. Es sei $b=\lim\limits_{\mu\to\infty}b_\mu$ mit $b_\mu\in K$. Für jedes $a\in\mathfrak{A}$ gilt dann $\lim\limits_{\mu\to\infty}(b_\mu a)=ba\in\hat{R}$. Für hinreichend großes $\mu>\mathsf{M}$ ist $(b_\mu a)-(ba)\in\hat{\mathfrak{P}}$, also $b_\mu a\in\hat{R}$, also $b_\mu a\in R$. Läßt man hierbei a die Elemente a_i eines endlichen Erzeugendensystems von $\mathfrak{A}$ durchlaufen und nimmt das Maximum der entstehenden Schranken M_i, und nennt dieses Maximum wieder M, so folgt: $b_\mu\cdot\mathfrak{A}\subset R$ für $\mu>\mathsf{M}$. Also $b_\mu\in\frac{R}{\mathfrak{A}}$ für $\mu>\mathsf{M}$, also $b=\lim\limits_{\mu\to\infty}b_\mu\in\widehat{\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)}$. Das war zu zeigen.

[15]) ZARISKI-SAMUEL[11]), Bd. II, Chap. VIII, § 4.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 17. Mai 1961)

PICKERT, G.
Math. Zeitschr. 77, 241–248 (1961)

Zur Einbettung von Halbgruppen in Gruppen

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

GÜNTER PICKERT

Die Tatsache, daß die Addition einer negativen Zahl $-a$ als Subtraktion der positiven Zahl a aufgefaßt werden kann, legt es nahe, die ganzen Zahlen ausgehend von den Translationen in der Halbgruppe der natürlichen Zahlen zu gewinnen. Ein solches Verfahren wurde von BOURBAKI [2] für die allgemeinere Aufgabe angegeben: Symmetrisierung einer Halbgruppe, deren reguläre Elemente im Zentrum liegen. Im folgenden soll dieses Verfahren unter schwächeren Voraussetzungen über die regulären Elemente untersucht werden. Diese neuen Voraussetzungen gehen im Fall einer regulären Halbgruppe in die bekannte hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung von ORE [4] für Einbettbarkeit in eine Gruppe über (s. 3). In 2 wird das Verfahren auf gerichtete Halbgruppen angewandt. Der in 1 zur Definition einer Halbgruppe von Abbildungen verwandte Filter wird bei der Anwendung in 2 von den Endstücken der gerichteten Halbgruppe erzeugt. 4 stellt fest, was von dem in 1 Erreichten auf eine Halbgruppe von Relationen verallgemeinert werden kann.

1. In der nichtleeren Menge M sei ein Filter $\mathfrak{F}$ gegeben (d.h. eine nichtleere Menge von Mengen $\subseteq M$ mit den Eigenschaften: $\emptyset \notin \mathfrak{F}$; $F' \in \mathfrak{F}$, wenn $F' \supseteq F \in \mathfrak{F}$; $F \cap F' \in \mathfrak{F}$, wenn $F, F' \in \mathfrak{F}$). Es wird nun die Menge Φ derjenigen Abbildungen f aus M in M untersucht, für die gilt:

$$f^{-1}(F) \in \mathfrak{F}, \quad \text{wenn} \quad F \in \mathfrak{F}. \tag{1}$$

Dabei bedeutet „aus M", daß der Definitionsbereich D_f von f Teilmenge von M ist, und es besteht für $X \subseteq M$ die Definitionsgleichung

$$f^{-1}(X) = \{x;\ x \in D_f,\ f(x) \in X\}. \tag{2}$$

Wegen $f^{-1}(X) \subseteq D_f$ folgt aus (1) insbesondere $D_f \in \mathfrak{F}$. Faßt man $\mathfrak{F}$ als den Filter der „punktierten" Umgebungen einer zu M adjungierten Stelle ∞ auf, so besagt (1) gerade die Stetigkeit von f an der Stelle ∞, wenn noch $f(\infty) = \infty$ festgesetzt wird. Die Hintereinanderausführung $f \circ g$ von Abbildungen f, g aus M in M sei wie üblich folgendermaßen erklärt:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \quad \text{für} \quad x \in g^{-1}(D_f); \tag{3}$$

insbesondere ist also $D_{f \circ g} = g^{-1}(D_f)$. Wegen der bekannten Assoziativität von $\circ$ und wegen der aus (2), (3) folgenden Gleichung

$$(f \circ g)^{-1}(X) = g^{-1}\big(f^{-1}(X)\big) \quad \text{für alle} \quad X \subseteq M$$

bildet daher Φ mit der Verknüpfung $\circ$ eine Halbgruppe; diese werde einfachheitshalber wieder mit Φ bezeichnet. Die identische Abbildung i von M auf sich ist offenbar neutrales Element von Φ.

In Φ führt man nun eine Relation $\doteq$ durch die folgende Definition ein:

$$(4)\qquad \begin{cases} f \doteq g \text{ genau dann, wenn es } F \in \mathfrak{F} \text{ mit } F \subseteq D_f \cap D_g \\ \qquad \text{und } f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in F \text{ gibt.} \end{cases}$$

Bei $\doteq$ handelt es sich um eine Äquivalenzrelation[1]; denn wegen $D_f \in \mathfrak{F}$ ist sie reflexiv, und die Komparativität folgt so: Gilt $f \doteq g$, $f \doteq h$, so hat man nach (4) und der entsprechenden Beziehung mit h, F' (statt g, F)

$$F \cap F' \subseteq D_g \cap D_h, \qquad g(x) = h(x) \quad \text{für} \quad x \in F \cap F',$$

wegen $F \cap F' \in \mathfrak{F}$ also $g \doteq h$.

Die Relation $\doteq$ ist ferner links- sowie rechtsverträglich mit $\circ$ und daher eine Kongruenzrelation der Halbgruppe Φ. Denn für $f, g, h \in \Phi$ folgt aus $f \doteq g$ nach (1), (3) und (4) einmal

$$(f \circ h)(x) = (g \circ h)(x) \quad \text{für alle} \quad x \in h^{-1}(F) \quad (\in \mathfrak{F}),$$

$$h^{-1}(F) \subseteq h^{-1}(D_f \cap D_g) = D_{f \circ h} \cap D_{g \circ h},$$

also $f \circ h \doteq g \circ h$, und zum andern

$$(h \circ f)(x) = (h \circ g)(x) \quad \text{für alle} \quad x \in F \cap f^{-1}(D_h) \quad (\in \mathfrak{F}),$$

$$F \cap f^{-1}(D_h) \subseteq f^{-1}(D_h) \cap g^{-1}(D_h) = D_{h \circ f} \cap D_{h \circ g},$$

also $h \circ f \doteq h \circ g$. Man kann daher die aus den Restklassen nach $\doteq$ bestehende Faktorhalbgruppe $\bar{\Phi} = \Phi / \doteq$ bilden; diese hat die Restklasse von i als neutrales Element.

Ist $f \in \Phi$ umkehrbar, so muß die Restklasse $\bar{f}$ $(\in \bar{\Phi})$ von f *linksregulär* sein; denn $f \circ g \doteq f \circ h$ besagt die Existenz von $F \in \mathfrak{F}$ mit $f(g(x)) = f(h(x))$ für alle $x \in F$, und daraus folgt wegen der Umkehrbarkeit von f die Gleichung $g(x) = h(x)$ für alle $x \in F$, d.h. aber $g \doteq h$. Bildet $f \in \Phi$ den Filter $\mathfrak{F}$ in sich ab, d.h. gilt $f(F) \in \mathfrak{F}$ für alle $F \in \mathfrak{F}$, so ist $\bar{f}$ *rechtsregulär*; denn $g \circ f \doteq h \circ f$ besagt die Existenz von $F \in \mathfrak{F}$ mit $g(f(x)) = h(f(x))$ für alle $x \in F$, und daraus ergibt sich wegen $F' = f(F) \in \mathfrak{F}$ die Gleichung $g(y) = h(y)$ für alle $y \in F'$, also $g \doteq h$. Die eben angegebenen hinreichenden Regularitätsbedingungen für $\bar{f}$ besagen zusammen gerade, daß f umkehrbar und die Umkehrabbildung f^{-1} Element von Φ ist. Dann gilt offenbar

$$f \circ f^{-1} \doteq i \doteq f^{-1} \circ f,$$

d.h. $\overline{f^{-1}}$ ist Inverses von $\bar{f}$. Man hat daher den

HIFSSATZ 1. *Es sei Φ' eine Unterhalbgruppe von Φ, für deren Elemente aus $f \doteq g$ stets $f = g$ folgt; dann läßt sich Φ' in eine Halbgruppe einbetten, in der*

[1] In anderem Zusammenhang und für den Fall, daß es sich um Abbildungen von M in eine beliebige Menge handelt, wird diese Äquivalenzrelation bei RIBENBOIM [5] eingeführt, ausgehend vom Antifilter $\{M - F;\ F \in \mathfrak{F}\}$.

jede umkehrbare Abbildung $f \in \Phi'$, für die f^{-1} in Φ liegt, ein Inverses besitzt.

Offenbar bilden die umkehrbaren $f \in \Phi$ mit $f^{-1} \in \Phi$ eine Unterhalbgruppe Φ_0 von Φ. Nach dem oben Festgestellten ist dann $\bar{\Phi}_0 = \Phi_0/\doteq$ sogar eine Gruppe, und man erhält so den

HILFSSATZ 2. *Eine Unterhalbgruppe von Φ_0, für deren Elemente aus $f \doteq g$ stets $f = g$ folgt, läßt sich in eine Gruppe einbetten.*

2. Die Halbgruppe H heiße *gerichtet*, wenn in der Menge ihrer Elemente eine binäre Relation $<$ mit den folgenden beiden Eigenschaften definiert ist:

(5) wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$;

(6) zu jedem Elementepaar a, b gibt es c mit $a < c$ und $b < c$.

Die *Linkstranslation* t_a der (additiv geschriebenen) Halbgruppe H wird durch

$$t_a(x) = a + x \quad \text{für alle} \quad x \in H \tag{7}$$

definiert. t_a ist genau dann umkehrbar, wenn a linksregulär ist. Wie üblich heißt eine Abbildung f von H in sich *monoton wachsend* (bezgl. $<$), wenn aus $a < b$ stets $f(a) < f(b)$ folgt, und *unbeschränkt* (bezgl. $<$), wenn zu jedem b ein a mit $b < f(a)$ vorhanden ist. Mit diesem Begriffsbildungen gilt

SATZ 1. *In der gerichteten Halbgruppe H seien alle Linkstranslationen monoton wachsend sowie unbeschränkt, und zu jedem $a \in H$ gebe es ein rechtsreguläres $b \in H$ mit $a < b$. Dann läßt sich H in eine Halbgruppe H' einbetten, in der jedes linksreguläre Element a von H ein Inverses besitzt, sobald a die folgenden Bedingungen erfüllt*[2]*:*

(M_a) *t_a^{-1} ist monoton wachsend.*

(D_a) *Es gibt $a' \in H$, so daß für alle $x \in H$ aus $a' < x$ die Existenz eines $y \in H$ mit $a + y = x$ folgt.*

BEWEIS. H wird als die Menge M in **1** genommen und der Filter $\mathfrak{F}$ erzeugt durch die für alle $a \in H$ definierten *Endstücke*

$$E_a = \{x;\ a < x \in H\}. \tag{8}$$

Daß die E_a eine Filterbasis bilden, geht sofort aus (5), (6) hervor. Daher besteht $\mathfrak{F}$ genau aus denjenigen Mengen $F \subseteq H$, zu denen es $a \in H$ mit $E_a \subseteq F$ gibt. Wegen (7), (8) besagt das monotone Wachsen von t_a, daß $t_a(c) \in E_{a+b}$ für alle $c \in E_b$ gilt. Man hat daher

$$E_b \subseteq t_a^{-1}(E_{a+b}). \tag{9}$$

Wegen der Unbeschränktheit von t_a gibt es zu $c \in H$ stets ein $b \in H$ mit $c < a + b$. Daraus folgt nach (5), (8) sofort $E_{a+b} \subseteq E_c$ und weiter nach (9) $E_b \subseteq t_a^{-1}(E_c)$,

[2]) Zur Bezeichnung dieser Bedingungen sind die Buchstaben M und D gewählt, weil die erste die Monotonie von t_a^{-1} enthält und die zweite etwas über den Definitionsbereich von t_a^{-1} aussagt.

d.h. $t_a^{-1}(E_c) \in \mathfrak{F}$. Alle Linkstranslationen liegen daher in der nach 1 durch den Filter $\mathfrak{F}$ bestimmten Halbgruppe Φ und bilden natürlich in dieser eine Unterhalbgruppe Φ'. Ist a linksregulär, also t_a umkehrbar, so liefert (M_a) entsprechend zu (9) die Beziehung

$$t_a^{-1}(E_{a+b}) \subseteq E_b, \tag{10}$$

und aus (D_a) ergibt sich

$$E_{a'} \subseteq t_a(H). \tag{11}$$

Aus (10), (11) zusammen folgt $t_a(E_b) \supseteq E_{a+b} \cap E_{a'}$, also $t_a(E_b) \in \mathfrak{F}$ und damit $t_a^{-1} \in \Phi$. Schließlich erfüllt Φ' auch die in Hilfssatz 1 genannte Voraussetzung; denn gilt $t_a \doteq t_b$, also $a+x=b+x$ für alle $x \in E_c$ bei geeignetem c, so gibt es nach Voraussetzung ein rechtsreguläres $x \in E_c$, woraus $a=b$ und somit $t_a=t_b$ folgt. Da $a \to t_a$ zudem ein Isomorphismus von H auf Φ' ist, folgt die Behauptung von Satz 1 nach dem bis jetzt Bewiesenen unmittelbar aus Hilfssatz 1.

Da die Invertierbarkeit bekanntlich die Regularität nach sich zieht, erhält man aus Satz 1 noch den folgenden

ZUSATZ. *Unter den in Satz 1 genannten Voraussetzungen über die Halbgruppe H ist jedes linksreguläre Element $a \in H$ mit (M_a), (D_a) auch rechtsregulär.*

Im Sonderfall einer *regulären* Halbgruppe H, d.h. einer solchen, deren Elemente sämtlich sowohl links- wie auch rechtsregulär sind, läßt sich Satz 1 durch ein schärferes Ergebnis ersetzen:

SATZ 2. *Eine gerichtete reguläre Halbgruppe H läßt sich in eine Gruppe einbetten, wenn alle Linkstranslationen sowie ihre Umkehrungen monoton wachsend sind und jedes $a \in H$ die Bedingung (D_a) erfüllt.*

BEWEIS. Aus den Voraussetzungen von Satz 2 folgen die von Satz 1. Um das zu erkennen, braucht man nur die Unbeschränktheit von t_a aus (D_a) herzuleiten: Nach (6) gibt es zu jedem $b \in H$ ein $x \in H$ mit $a' < x$, $b < x$ und nach (D_a) dann ein $y \in H$ mit $t_a(y) = x$, also $b < t_a(y)$. Nach dem im Beweis von Satz 1 Gezeigten ist die Halbgruppe Φ' der Linkstranslationen daher isomorph zu H und zugleich Unterhalbgruppe der in 1 erklärten Halbgruppe Φ_0. Aus Hilfssatz 2 folgt dann die Behauptung.

3. In einer (additiv geschriebenen) Halbgruppe H wird die binäre Relation $<$ folgendermaßen erklärt:

$$a < b \quad \textit{genau dann, wenn es } c \in H \textit{ mit } a + c = b \textit{ gibt.} \tag{12}$$

Für diese Relation ergibt sich (5) sofort aus dem Assoziativgesetz, während (6) offenbar gleichbedeutend ist mit der *Oreschen Bedingung: Zu $a, b \in H$ gibt es $c, d \in H$ mit $a+c=b+d$.* Aus dem Assoziativgesetz folgt mittels (12) leicht, daß alle Linkstranslationen t_a und bei linksregulärem a auch t_a^{-1} monoton wachsend sind. Mit $a'=a$ ist wegen (12) (D_a) für jedes $a \in H$ erfüllt. Daher liefert Satz 2 sofort das Ergebnis von ORE [4][3]:

[3]) Dort allerdings für die multiplikativen Halbgruppen von Ringen, jedoch ohne tatsächliches Benutzen dieser einschränkenden Voraussetzung bewiesen.

SATZ 3. *Eine reguläre Halbgruppe läßt sich in eine Gruppe einbetten, wenn sie die Oresche Bedingung erfüllt.*

Will man entsprechend, also wieder mit der Definition (12) den Satz 1 anwenden, so folgt schon daraus, daß E_a ein rechtsreguläres Element enthalten soll, die Rechtsregularität von a selbst: $x+a=y+a$ und die Rechtsregularität von $a+b$ ziehen $x+(a+b)=y+(a+b)$ und daher $x=y$ nach sich. Die Unbeschränktheit aller Linkstranslationen bedeutet aber gerade die Oresche Bedingung. Daher ergibt Satz 1, daß eine nur aus rechtsregulären Elementen bestehende Halbgruppe H, welche die Oresche Bedingung erfüllt, in eine Halbgruppe eingebettet werden kann, in der jedes reguläre (d.h. sowohl rechts- wie linksreguläre) Element von H ein Inverses besitzt. Dieses Ergebnis läßt sich dadurch verschärfen, daß man nicht alle Elemente von H als rechtsregulär voraussetzt, sondern nur eine Unterhalbgruppe R von rechtsregulären Elementen betrachtet, welche die folgende abgeänderte Oresche Bedingung erfüllt:

(O_R) *Zu $a\in H$, $b\in R$ gibt es $c\in R$, $d\in H$ mit $a+c=b+d$.*

Es gilt nämlich

SATZ 4. *Erfüllt die Unterhalbgruppe R aus rechtsregulären Elementen der Halbgruppe H die Bedingung (O_R), so läßt sich H in eine Halbgruppe einbetten, in der jedes in R liegende reguläre Element von H ein Inverses besitzt.*

BEWEIS. Zu $a, b\in R$ gibt es $c\in R$, $d\in H$ mit $e=a+c=b+d\in R$, woraus $t_e(H)\subseteq t_a(H)\cap t_b(H)$ folgt. Daher bilden die $t_a(H)$ mit $a\in R$ eine Filterbasis. Zu dem von dieser erzeugten Filter $\mathfrak{F}$ wird die Halbgruppe Φ aus 1 gebildet. Für $a\in H$, $b\in R$ folgt aus (O_R) die Existenz von $c\in R$, $d\in H$ mit $a+(c+x)=b+(d+x)$ für alle $x\in H$ und daher $t_a(t_c(H))\subseteq t_b(H)$, also

$$t_c(H)\subseteq t_a^{-1}(t_b(H)).$$

Damit ist $t_a\in\Phi$ für alle $a\in H$ nachgewiesen. Wegen der Halbgruppeneigenschaft von R und

$$t_a(t_b(H))=t_{a+b}(H)$$

hat man auch $t_a^{-1}\in\Phi$ für jedes reguläre Element $a\in R$. Ist $t_a=t_b$, also $a+x=b+x$ für alle $x\in t_c(H)$ bei geeignetem $c\in R$, so folgt $a=b$ wegen $c+c\in R\cap t_c(H)$. Daher ist H isomorph zur Halbgruppe Φ der Linkstranslationen und diese erfüllt alle Voraussetzungen von Hilfssatz 1. Nach diesem Hilfssatz kann dann also H in eine Halbgruppe eingebettet werden, in der jedes in R liegende reguläre Element von H ein Inverses besitzt.

Der Fall, daß R nur aus regulären Elementen besteht, läßt sich durch die Existenz einer einbettenden Halbgruppe mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften kennzeichnen. Es gilt nämlich der im Wesentlichen schon bekannte[4])

[4]) Bei ASANO [1] wird er (bis auf den zweiten Teil des Zusatzes) für die multiplikativen Halbgruppen von Ringen bewiesen.

SATZ 5. *Genau dann erfüllen die Halbgruppe H und eine Unterhalbgruppe R aus regulären Elementen von H die Bedingung* (O_R), *wenn H in eine Halbgruppe H' eingebettet werden kann, in der jedes Element $r \in R$ ein Inverses $-r$ besitzt und die nur aus den $a-b$ $(=a+(-b))$ mit $a \in H$, $b \in R$ besteht.*

ZUSATZ. *Enthält R die sämtlichen regulären Elemente*[5]) *von H und gilt* (O_R), *so hat in H' jedes reguläre Element ein Inverses, und wenn in H jedes linksreguläre Element bereits regulär ist, gilt dasselbe für H'.*

BEWEIS. Ist H in eine Halbgruppe mit den angegebenen Eigenschaften eingebettet, so muß es zu $a \in H$, $b \in R$ auch Elemente $c \in R$, $d \in H$ mit $(-b)+a = d+(-c)$, also $a+c=b+d$ geben. Es gilt also dann (O_R). Sei umgekehrt die Bedingung (O_R) erfüllt. Nach Satz 4 kann dann also H in eine Halbgruppe eingebettet werden, in der jedes Element von R ein Inverses besitzt. In dieser erweist sich nun die Teilmenge H' der $a-b$ mit $a \in H$, $b \in R$ als Unterhalbgruppe; denn zu $a_i \in H$, $b_i \in R$ $(i=1, 2)$ gibt es nach (O_R) $c \in R$, $d \in H$ mit $a_2+c=b_1+d$, so daß $(-b_1)+a_2=d+(-c)$ und daher $(a_1-b_1)+(a_2-b_2) = (a_1+d)-(b_2+c)$ mit $b_2+c \in R$ gilt. Da man in H' für jedes $a \in H$ die Gleichung $a=(a+b)-b$ mit einem $b \in R$ hat, ist H Unterhalbgruppe von H'. Damit ist der Beweis des Satzes beendet. Zum Beweis des Zusatzes beachtet man, daß die Links- oder Rechtsregularität eines Elementes $a-b$ $(a \in H, b \in R)$ auch die Links- bzw. Rechtsregularität von a nach sich zieht; denn aus $a+x=a+y$ bzw. $x+a=y+a$ folgt $(a-b)+(b+x)=(a-b)+(b+y)$ bzw. $x+(a-b)=y+(a-b)$, weiter daraus im ersten Fall $b+x=b+y$ und daher (wegen $b \in R$) $x=y$, während sich im zweiten Fall sofort $x=y$ ergibt. Bei Regularität von a aber enthält H' auch das Inverse $b-a$ von $a-b$, sofern R aus allen regulären Elementen von H besteht.

Ist R Teilmenge des Zentrums von H, so gilt (O_R) stets (mit $c=b$, $d=a$), und man erhält aus Satz 5 insbesondere das bei BOURBAKI [2] angeführte Ergebnis, wenn man für R die Halbgruppe der regulären Elemente nimmt. Ferner liefert Satz 5 gerade die notwendigen und hinreichenden Bedingungen von ASANO [1] für die Existenz von Rechtsquotientenringen, wenn man für H die multiplikative Halbgruppe (unter Einschluß des Nullelements) eines Ringes nimmt und in H' die Addition durch $a_1 b^{-1}+a_2 b^{-1}=(a_1+a_2)b^{-1}$ $(a_i \in H, b \in R)$ erklärt. Dabei ist natürlich erstens zu zeigen, daß zwei beliebige Elemente von H' stets in der Form $a_i b^{-1}$ $(a_i \in H, b \in R)$ angenommen werden können, und zweitens, daß aus $a_i b^{-1}=c_i d^{-1}$ $(i=1, 2)$ stets $(a_1+a_2)b^{-1}=(c_1+c_2)d^{-1}$ folgt. Beides gelingt leicht mittels (O_R). Nur der Beweis der zweiten Behauptung sei hier ausgeführt: Man bestimmt $e \in R$, $f \in H$ mit $be=df$, hat dann $a_i e=c_i f$ $(i=1, 2)$, also $(a_1+a_2)e=(c_1+c_2)f$, daher $a_1+a_2=(c_1+c_2)fe^{-1}$ und schließlich $(a_1+a_2)b^{-1}=(c_1+c_2)d^{-1}$. Drittens hat man $0=0b^{-1}$ als neutrales Element der Addition und $(-a)b^{-1}$ als Inverses (bezgl. der Addition) von ab^{-1} festzustellen und — wieder mittels (O_R) — das Assoziativgesetz der Addition und die Distributivgesetze der Multiplikation (bezgl. der Addition) nachzuweisen, was hier nicht ausgeführt zu werden braucht.

[5]) Bekanntlich bilden die regulären Elemente einer Halbgruppe eine Unterhalbgruppe.

4. Die in **1** betrachteten Abbildungen f aus M in M kann man auch mit den Teilmengen $\{(y, x);\ x \in D_f,\ y = f(x)\}$ von $M \times M$ identifizieren[6]). Im folgenden werden daher allgemeiner beliebige Teilmengen ϱ von $M \times M$, also in M definierte binäre Relationen betrachtet, wobei statt $(y, x) \in \varrho$ wie üblich $y \varrho x$ geschrieben sei. Die Menge dieser Relationen ist bekanntlich mit der durch

$$x(\varrho \circ \sigma) z \leftrightarrow \bigvee_y (x \varrho y \wedge y \sigma z). \tag{13}$$

erklärten Relationenmultiplikation $\circ$ eine Halbgruppe. Im folgenden, wie auch schon in (13), sind die lateinischen Buchstaben Variable für Elemente aus M, die griechischen Buchstaben Variable für Teilmengen von $M \times M$, und die Zeichen $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\bigvee$, $\bigwedge$, $\wedge$ stehen für „wenn ..., so", „genau dann, wenn", „es gibt", „für alle", „und". An die Stelle von (2) tritt jetzt die Definition

$$\varrho^*(X) = \{y;\ \bigwedge_x (x \varrho y \rightarrow x \in X)\}. \tag{14}$$

Man beachte, daß daraus für eine Abbildung[7]) f aus M in M (an Stelle von ϱ) allerdings die Gleichung

$$f^*(X) = f^{-1}(X) \cup (M - D_f), \tag{15}$$

also nicht die Übereinstimmung von $f^*(X)$ und $f^{-1}(X)$ folgt; es lohnt sich nicht, durch eine Abänderung von (14) das Zusatzglied $M - D_f$ in (15) zu beseitigen. Analog zu einer in **1** verwandten Gleichung erhält man jetzt aus (13), (14)

$$(\varrho \circ \sigma)^*(X) = \sigma^*(\varrho^*(X)). \tag{16}$$

Zum Beweis hat man nur die logische Gleichwertigkeit der folgenden Zeilen der Reihe nach zu überprüfen:

$$\begin{gathered} z \in (\varrho \circ \sigma)^*(X), \\ \bigwedge_x (\bigvee_y (x \varrho y \wedge y \sigma z) \rightarrow x \in X), \\ \bigwedge_x \bigwedge_y (y \sigma z \rightarrow (x \varrho y \rightarrow x \in X)), \\ \bigwedge_y (y \sigma z \rightarrow \bigwedge_x (x \varrho y \rightarrow x \in X)), \\ \bigwedge_y (y \sigma z \rightarrow y \in \varrho^*(X)), \\ z \in \sigma^*(\varrho^*(X)). \end{gathered}$$

Aus (16) folgt nun, daß bei vorgegebenem Filter $\mathfrak{F}$ in M die Menge

$$\mathsf{P} = \{\varrho;\ \bigwedge_{F \in \mathfrak{F}} \varrho^*(F) \in \mathfrak{F}\}$$

eine Halbgruppe bezgl. der Verknüpfung $\circ$ ist. Wegen (15) ergibt sich Φ als Unterhalbgruppe von P. Da aus (15) und (2) die Gleichung $f^{-1}(X) = f^*(X) \cap D_f$ folgt, besteht übrigens Φ aus denjenigen (als Relationen aufgefaßten) Abbildungen aus M in M, die in P liegen und deren Definitionsbereiche zu $\mathfrak{F}$ gehören[8]). Wegen (4) und $D_f \in \mathfrak{F}$ für alle $f \in \Phi$ besagt $f \doteq g$ für $f, g \in \Phi$ dasselbe

[6]) Vielfach führt man Abbildungen überhaupt als solche Teilmengen ein, wobei man allerdings (y, x) durch (x, y) ersetzt. Hier ist dieser Variablenaustausch erfolgt um die übliche Relationenmultiplikation (bei HERMES [3], S. 93, als *Verkettung* bezeichnet) als Verallgemeinerung der in (3) benutzten Verknüpfung $\circ$ auffassen zu können.

[7]) Die, wie zu Anfang des Abschnitts erklärt, als Teilmenge von $M \times M$ aufgefaßt wird.

[8]) Daß diese letzte Bedingung nicht überflüssig ist, erkennt man daraus, daß bei einem Ultrafilter $\mathfrak{F}$ wegen (15) jede Abbildung aus M in M, deren Definitionsbereich nicht zu $\mathfrak{F}$ gehört, Element von P ist.

wie $$\mathsf{V}_{F\in\mathfrak{F}}\mathsf{\Lambda}_{y\in F}\mathsf{\Lambda}_x\big((x=f(y)\wedge y\in D_f)\leftrightarrow(x=g(y)\wedge y\in D_g)\big).$$

Daher läßt sich die in Φ erklärte Relation $\doteq$ durch die folgende Definition auf P fortsetzen:

(17) $$\varrho\doteq\sigma\leftrightarrow\mathsf{V}_{F\in\mathfrak{F}}\mathsf{\Lambda}_{y\in F}\mathsf{\Lambda}_x(x\varrho y\leftrightarrow x\sigma y).$$

Offenbar handelt es sich bei $\doteq$ um eine Äquivalenzrelation. Daß sie mit $\circ$ verträglich ist, ergibt sich folgendermaßen. Für $\varrho,\sigma,\tau\in\mathsf{P}$ folgt aus (17) für geeignetes $F\in\mathfrak{F}$

$$\mathsf{\Lambda}_{x\in F}\mathsf{\Lambda}_y(y\varrho z\leftrightarrow y\sigma z)$$

und daher

$$\mathsf{\Lambda}_{x\in F}\mathsf{\Lambda}_x\big(\mathsf{V}_y(x\tau y\wedge y\varrho z)\leftrightarrow\mathsf{V}_y(x\tau y\wedge y\sigma z)\big);$$

also gilt $\tau\circ\varrho\doteq\tau\circ\sigma$. Unter denselben Voraussetzungen erhält man für $F'=\tau^*(F)\in\mathfrak{F}$ wegen (14)

$$\mathsf{\Lambda}_{x\in F'}\mathsf{\Lambda}_x\big(\mathsf{V}_y(x\varrho y\wedge y\tau z)\leftrightarrow\mathsf{V}_y(x\sigma y\wedge y\tau z)\big);$$

damit ist $\varrho\circ\tau\doteq\sigma\circ\tau$ hergeleitet.

Man kann jetzt die Halbgruppe $\bar{\mathsf{P}}=\mathsf{P}/\doteq$ bilden, und wie in **1** läßt sich jede Unterhalbgruppe P' von P isomorph in $\bar{\mathsf{P}}$ einbetten, wenn für ihre Elemente aus $\varrho\doteq\sigma$ stets $\varrho=\sigma$ folgt. Da die Relation $\iota=\{(x,x);\ x\in M\}$ neutrales Element von P ist, besitzt auch $\bar{\mathsf{P}}$ ein neutrales Element, nämlich die Restklasse von ι. Um zu einem $\varrho\in\mathsf{P}'$ in $\bar{\mathsf{P}}$ ein Inverses zu finden, genügt nun allerdings nicht die Forderung $\varrho^{-1}\in\mathsf{P}$ für die zu ϱ konverse Relation $\varrho^{-1}=\{(x,y);\ y\varrho x\}$. Damit die Restklasse von ϱ^{-1} Rechts- bzw. Linksinverses von ϱ (identifiziert mit der Restklasse von ϱ) ist, muß vielmehr noch

(18) $$\mathsf{V}_{F\in\mathfrak{F}}\mathsf{\Lambda}_{y\in F}\big(\mathsf{V}_z y\varrho z\wedge\mathsf{\Lambda}_x(\mathsf{V}_z(x\varrho z\wedge y\varrho z)\to x=y)\big)$$

bzw.

(19) $$\mathsf{V}_{F\in\mathfrak{F}}\mathsf{\Lambda}_{y\in F}\big(\mathsf{V}_z z\varrho y\wedge\mathsf{\Lambda}_x(\mathsf{V}_z(z\varrho x\wedge z\varrho y)\to x=y)\big)$$

gelten, wie man mittels (13) und (17) leicht erkennt. Geht man entsprechend Hilfssatz 2 zur Halbgruppe $\mathsf{P}_0=\{\varrho;\ \varrho\in\mathsf{P}\wedge\varrho^{-1}\in\mathsf{P}\}$ über, so ist die Gruppeneigenschaft von $\bar{\mathsf{P}}_0=\mathsf{P}_0/\doteq$ natürlich schon gesichert, wenn (18) für alle $\varrho\in\mathsf{P}_0$ oder (19) für alle $\varrho\in\mathsf{P}_0$ gilt. Anscheinend lassen sich die hier gewonnenen Verallgemeinerungen von **1** aber nicht zur Verbesserung der Sätze 1 und 4 verwenden.

Zusatz bei der Korrektur (16. 9. 1961): Für den Fall, daß R nur aus regulären Elementen von H besteht, findet sich Satz 4 schon bei P. DUBREIL, Algèbre I. (Paris 1946), S. 272.

Literatur

[1] ASANO, K.: Über die Quotientenbildung von Schiefringen. J. Math. Soc. Japan **1**, 73–78 (1949).

[2] BOURBAKI, N.: Éléments de Mathématique I, Livre II, Ch. 1, S. 37. Paris 1958.

[3] HERMES, H.: Einführung in die Verbandstheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[4] ORE, O.: Linear equations in non-commutative fields. Ann. Math. **32**, 463–477 (1931).

[5] RIBENBOIM, P.: Fonctions modulo un antifiltre. Math. Z. **77**, 195–206 (1961).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 12. April 1961)

KOWALSKY, H.-J.
Math. Zeitschr. 77, 249–272 (1961)

Kategorien topologischer Räume

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

HANS-JOACHIM KOWALSKY

Einleitung

Viele Begriffsbildungen aus der Theorie der abelschen Gruppen können bekanntlich auf zwei verschiedene Weisen beschrieben werden: Einmal kann man zu ihnen durch eine interne Definition gelangen, die die algebraische Gruppenstruktur benutzt. Andererseits ist aber auch häufig eine externe Charakterisierung mit Hilfe der Homomorphiebeziehungen innerhalb der Klasse aller abelschen Gruppen möglich; d.h. eine Kennzeichnung, die nur die Kategorie der abelschen Gruppen, nicht aber die algebraische Struktur der einzelnen Gruppen benutzt. Daß eine derartige Beschreibung gruppentheoretischer Sachverhalte unter alleiniger Benutzung kategorientheoretischer Begriffe in recht einfacher Weise möglich ist, hängt eng damit zusammen, daß die abelsche Gruppenstruktur eine starke Bindung für die Homomorphismen darstellt. Bereits wenn man auf die Kommutativität verzichtet, gestalten sich die Verhältnisse wesentlich komplizierter. Daß jedoch auch in diesem Fall weitgehend analoge Resultate gewonnen werden können, wurde kürzlich von F. HOFMANN [6] gezeigt. In der vorliegenden Arbeit wird nun damit begonnen, ähnliche Ergebnisse auch für Kategorien topologischer Räume herzuleiten. Insbesondere wird die Frage untersucht, in welchem Umfang durch die Struktur der Kategorie die topologische Struktur der Räume festgelegt wird.

In Kategorien, deren Objekte topologische Räume und in denen die Morphismen stetige Abbildungen dieser Räume sind, bedingt die topologische Struktur eine wesentlich schwächere Bindung der Morphismen als die algebraische Gruppenstruktur. Derartige Kategorien können daher auch erheblich reichhaltiger an Morphismen sein. Einerseits bedeutet dies eine zusätzliche Komplikation, die eine verfeinerte Einteilung der Morphismen erfordert. Andererseits werden hierdurch unter geeigneten Voraussetzungen weitergehende Rückschlüsse auf die Ausgangsstrukturen ermöglicht.

Wenn man von einer Kategorie topologischer Räume ausgeht, so wird umgekehrt durch die Kategorie im allgemeinen nicht wieder die topologische Struktur der Räume festgelegt. Jede beliebige Kategorie, bei der man nur die Objekte als Mengen und die Morphismen als Abbildungen auffassen kann, läßt sich auf verschiedene Arten als Kategorie topologischer Räume deuten: Man braucht hierzu nur alle Objekte mit der diskreten Topologie oder aber mit der trivialen Topologie ($\emptyset$ und der ganze Raum sind die einzigen abgeschlossenen Mengen) zu versehen. In beiden Fällen sind dann die Morphismen

stetige Abbildungen. Beschränkt man sich aber von vornherein auf T_1-Räume, so kann man in einfacher Weise zeigen: Zu jeder Kategorie, in der die Morphismen Abbildungen sind; gibt es eindeutig bestimmte, gröbste T_1-Topologien der Objekte, hinsichtlich derer die Morphismen stetige Abbildungen sind.

Diejenigen Abbildungen topologischer Räume, deren Bildmengen einpunktig sind, können auch als Morphismen innerhalb der Kategorie durch eine einfache Eigenschaft beschrieben werden. Setzt man nun voraus, daß es in einer Kategorie hinreichend viele solche punktalen Morphismen gibt, so zeigt sich, daß eine derartige Kategorie auf genau eine Weise als Kategorie von T_1-Räumen aufgefaßt werden kann, in der die punktalen Morphismen dann stetige Abbildungen mit einpunktiger Bildmenge sind. Umgekehrt sichern bei einer Kategorie von T_1-Räumen einfache topologische Bedingungen die Existenz genügend vieler punktaler Morphismen. In diesen Fällen bestimmt dann die Struktur der Kategorie bereits eindeutig (bis auf Homöomorphie) die topologische Struktur der Objekte (d.h. die Trägermengen der Räume und deren Topologie).

Aber auch unter andersartigen Voraussetzungen, die sich nicht mehr auf die punktalen Morphismen, sondern auf Bilder, Urbilder usw. beziehen, können noch Rückschlüsse auf topologische Strukturen gezogen werden. Auch dann kann man eine solche Kategorie stets in einem eindeutig bestimmten Sinn als eine Kategorie von T_1-Räumen auffassen, die in gewissei Weise universell ist.

Bei allen diesen Untersuchungen kommt es zunächst darauf an, daß in der betreffenden Kategorie die Morphismen überhaupt als Abbildungen aufgefaßt werden können. Hier ist eine mengentheoretische Forderung wesentlich, die in ähnlicher Form auch bei F. HOFMANN auftritt. Dort wird sie allerdings in erster Linie dazu benutzt, die Eindeutigkeit gewisser Begriffe zu sichern. Darüber hinaus ermöglicht sie jedoch auch die Deutung der Morphismen als Abbildungen und ist hiermit sogar weitgehend gleichbedeutend.

§ 1. Grundbegriffe

Wie üblich sollen unter einer Kategorie $\mathfrak{K}$ folgende Gegebenheiten verstanden werden:

1. Eine nicht-leere Klasse, deren Elemente Objekte von $\mathfrak{K}$ genannt und mit $X, Y, Z, \ldots$ bezeichnet werden.

2. Jedem geordneten Paar (X, Y) von Objekten ist eindeutig eine Menge $\mathrm{Hom}(X, Y)$ zugeordnet. Für verschiedene Paare (X, Y) und (X', Y') gilt $\mathrm{Hom}(X, Y) \cap \mathrm{Hom}(X', Y') = \emptyset$. Die Elemente der Mengen $\mathrm{Hom}(X, Y)$ werden Morphismen von $\mathfrak{K}$ genannt und mit $f, g, h, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$ bezeichnet. Statt $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ wird auch $f: X \to Y$ geschrieben. Von den Mengen $\mathrm{Hom}(X, Y)$ soll in dieser Arbeit stets vorausgesetzt werden, daß sie nicht leer sind.

3. Jedem geordneten Tripel (X, Y, Z) von Objekten ist eine mit $\circ$ bezeichnete Abbildung (Komposition) von $\mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z)$ in $\mathrm{Hom}(X, Z)$ so zugeordnet, daß das Assoziativgesetz

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

erfüllt ist.

4. In $\mathrm{Hom}(X, X)$ existiert ein (und dann auch nur ein) Morphismus j_X mit

$$f \circ j_X = f \quad \text{und} \quad j_X \circ g = g$$

für alle $f: X \to Y$ und $g: Y \to X$. Man nennt j_X die Identität von X.

Statt j_X wird häufig nur j geschrieben. Zur Vereinfachung der Schreibweise sollen außerdem die Klassen

$$\mathrm{Hom}(X, .) = \bigcup_Y \mathrm{Hom}(X, Y) \quad \text{und} \quad \mathrm{Hom}(., X) = \bigcup_Y \mathrm{Hom}(Y, X)$$

eingeführt werden. Sie sind im allgemeinen keine Mengen. Statt $f \in \mathrm{Hom}(X, .)$ wird auch $f: X \to$ und statt $g \in \mathrm{Hom}(., X)$ entsprechend $g: \to X$ geschrieben. Eine Gleichung der Form $h = g \circ f$ soll stets einschließen, daß diese Komposition definiert ist, daß also $f: \to X$ und $g: X \to$ gilt. Es werden dann f, g Faktoren und die Darstellung $h = g \circ f$ wird eine Faktorisierung von h genannt.

Definition 1a. *Für $f, g \in \mathrm{Hom}(X, .)$ bedeute $f \uparrow g$, daß aus $f \circ \varphi = f \circ \varphi'$ stets $g \circ \varphi = g \circ \varphi'$ folgt.*

Für $f, g \in \mathrm{Hom}(., X)$ bedeute $f \downarrow g$, daß aus $\varphi \circ f = \varphi' \circ f$ stets $\varphi \circ g = \varphi' \circ g$ folgt.

Die Beziehungen $\uparrow$ und $\downarrow$ sind dual. Außerdem sind sie offenbar reflexiv und transitiv. Setzt man in der Definition speziell $g = j_X$, so erhält man die übliche Kennzeichnung der Monomorphismen und Epimorphismen.

Definition 1b. *f heißt monomorph oder ein Monomorphismus, wenn $f \uparrow j$ gilt; d.h. wenn aus $f \circ \varphi = f \circ \varphi'$ stets $\varphi = \varphi'$ folgt.*

f heißt epimorph oder ein Epimorphismus, wenn $f \downarrow j$ gilt; d.h. wenn aus $\varphi \circ f = \varphi' \circ f$ stets $\varphi = \varphi'$ folgt.

Betrachtet man etwa die Kategorie aller T_1-Räume mit allen stetigen Abbildungen als Morphismen, so ist $f \uparrow g$ gleichwertig damit, daß aus $f(x) = f(x')$ stets $g(x) = g(x')$ für alle Punkte x und x' des Definitionsbereichs folgt. Weiter ist hier $f \downarrow g$ gleichwertig damit, daß die Bildmenge von g in der Bildmenge von f enthalten ist. Insbesondere sind also die Monomorphismen genau die stetigen 1–1-Abbildungen, und die Epimorphismen sind genau die stetigen Abbildungen auf den Bildraum. Dies braucht jedoch nicht mehr zu gelten, wenn die Kategorie nicht alle T_1-Räume oder nicht alle stetigen Abbildungen enthält.

Unmittelbar aus den Definitionen ergibt sich:

1.1. *Aus $f \uparrow g$ folgt $f \circ h \uparrow g \circ h$ und aus $f \downarrow g$ entsprechend $h \circ f \downarrow h \circ g$. Es gilt $f \uparrow h \circ f$ und $f \downarrow f \circ h$.*

Mit f und g ist auch $g \circ f$ ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus.

1.2. *Es sei $g \circ f$ ein Monomorphismus (Epimorphismus). Dann ist auch f ein Monomorphismus (g ein Epimorphismus).*

Beweis. Aus $f \circ \varphi = f \circ \varphi'$ folgt $g \circ f \circ \varphi = g \circ f \circ \varphi'$. Ist $g \circ f$ monomorph, so erhält man weiter $\varphi = \varphi'$; d.h. auch f ist monomorph. Die zweite Behauptung ist der duale Satz.

1.3. *Es sei h ein Monomorphismus. Aus $f \uparrow g$ folgt dann $h \circ f \uparrow g$ und aus $f \uparrow h \circ g$ auch $f \uparrow g$.*

Es sei h ein Epimorphismus. Aus $f\downarrow g$ folgt dann $f\circ h\downarrow g$ und aus $f\downarrow g\circ h$ auch $f\downarrow g$.

BEWEIS. Wenn h monomorph ist, ergibt sich aus $h\circ f\circ\varphi=h\circ f\circ\varphi'$ zunächst $f\circ\varphi=f\circ\varphi'$ und wegen $f\uparrow g$ dann weiter $g\circ\varphi=g\circ\varphi'$; d.h. es gilt $h\circ f\uparrow g$. Jetzt werde $f\uparrow h\circ g$ mit monomorphem h vorausgesetzt. Aus $f\circ\varphi=f\circ\varphi'$ folgt dann $h\circ g\circ\varphi=h\circ g\circ\varphi'$ und weiter $g\circ\varphi=g\circ\varphi'$; d.h. es gilt $f\uparrow g$. Die übrigen Behauptungen ergeben sich durch Dualisierung.

DEFINITION 1c. *f heiße injektiv oder eine Injektion, wenn f monomorph ist und aus $f\downarrow g$ stets eine Faktorisierung der Form $g=f\circ g^*$ folgt.*

f heißt surjektiv oder eine Surjektion, wenn f epimorph ist und aus $f\uparrow g$ stets eine Faktorisierung der Form $g=g^*\circ f$ folgt.

f heiße isomorph oder ein Isomorphismus, wenn f gleichzeitig injektiv und surjektiv ist.

Injektion und Surjektion sind duale Begriffe. In den Faktorisierungen $g=f\circ g^*$ bzw. $g=g^*\circ f$ ist g^* jeweils eindeutig bestimmt: Aus $f\circ g^*=g=f\circ g_1^*$ folgt z.B., weil f monomorph ist, unmittelbar $g_1^*=g^*$.

In der Kategorie aller T_1-Räume ist $f:X\to Y$ genau dann eine Injektion, wenn f ein Homöomorphismus von X auf den durch $f(X)$ bestimmten Unterraum von Y ist. Weiter ist f genau dann eine Surjektion, wenn f eine Abbildung auf Y ist und wenn Y die durch f bestimmte Quotiententopologie trägt. Daher sind schließlich die Isomorphismen genau die Homöomorphismen.

Im allgemeinen ist mit f und g nicht auch $g\circ f$ eine Injektion oder Surjektion. Es gilt jedoch:

1.4. *Es sei f ein Isomorphismus. Mit g ist dann auch $g\circ f$ und $f\circ g$ eine Injektion (Surjektion).*

BEWEIS. g sei injektiv. Wegen 1.1 ist $g\circ f$ ein Monomorphismus, aus $g\circ f\downarrow h$ folgt $g\downarrow h$ und weiter dann $h=g\circ h^*$. Da f als Isomorphismus auch epimorph ist, ergibt sich aus $\varphi\circ f=\varphi'\circ f$ stets $\varphi=\varphi'$, erst recht also $\varphi\circ h^*=\varphi'\circ h^*$. Daher gilt $f\downarrow h^*$, woraus weiter $h^*=f\circ h'$, insgesamt also $h=g\circ f\circ h'$ folgt. Damit ist $g\circ f$ sogar injektiv.

Zweitens ist mit g auch $f\circ g$ monomorph. Weiter gelte $f\circ g\downarrow h$. Dann erhält man auch $f\downarrow h$ und $h=f\circ h^*$. Es werde nun $\varphi\circ g=\varphi'\circ g$ vorausgesetzt. Da f monomorph ist, folgt aus $f\circ\psi=f\circ\psi'$ stets $\psi=\psi'$ und somit erst recht $\varphi\circ\psi=\varphi\circ\psi'$ und $\varphi'\circ\psi=\varphi'\circ\psi'$, also $f\uparrow\varphi$ und $f\uparrow\varphi'$. Da f als Isomorphismus surjektiv ist, ergibt sich weiter $\varphi=\varphi_1\circ f$ und $\varphi'=\varphi_1'\circ f$. Wegen $\varphi_1\circ f\circ g=\varphi\circ g=\varphi'\circ g=\varphi_1'\circ f\circ g$ und wegen $f\circ g\downarrow h$ erhält man jetzt $\varphi_1\circ h=\varphi_1'\circ h$ und

$$\varphi\circ h^*=\varphi_1\circ f\circ h^*=\varphi_1\circ h=\varphi_1'\circ h=\varphi_1'\circ f\circ h^*=\varphi'\circ h^*,$$

also $g\downarrow h^*$. Ist g injektiv, so folgt $h^*=g\circ h'$ und insgesamt $h=f\circ g\circ h'$; d.h. auch $f\circ g$ ist injektiv. Die entsprechenden Behauptungen über Surjektionen erhält man durch Dualisierung.

1.5. *Es sei $g\circ f$ eine Injektion (Surjektion). Ist dann g monomorph (f epimorph), so ist auch f eine Injektion (g eine Surjektion).*

BEWEIS. Es sei g ein Monomorphismus und $g \circ f$ eine Injektion. Nach 1.2 ist auch f monomorph. Weiter gelte $f \downarrow h$, also auch $g \circ f \downarrow g \circ h$. Da $g \circ f$ injektiv ist, folgt $g \circ h = g \circ f \circ h^*$. Da aber g monomorph ist, ergibt sich weiter $h = f \circ h^*$. Die zweite Behauptung ist der duale Satz.

1.6. *Für einen Morphismus f sind folgende Behauptungen paarweise gleichwertig:*

(1) *f ist ein Isomorphismus.*

(2) *f ist injektiv und epimorph.*

(3) *f ist surjektiv und monomorph.*

(4) *Es existiert ein Morphismus g mit $g \circ f = j$ und $f \circ g = j$.*

BEWEIS. (1) $\rightarrow$ (2) und (1) $\rightarrow$ (3) folgen unmittelbar aus den Definitionen.

(2) $\rightarrow$ (4): Da $f: X \rightarrow Y$ epimorph ist, gilt $f \downarrow j_Y$. Da f außerdem injektiv ist, gibt es einen Morphismus $g: Y \rightarrow X$ mit $j_Y = f \circ g$. Es folgt $f \circ j_X = f = j_Y \circ f = f \circ g \circ f$ und hieraus (f ist monomorph) $j_X = g \circ f$.

Durch Dualisierung von (2) $\rightarrow$ (4) erhält man (3) $\rightarrow$ (4).

(4) $\rightarrow$ (1): Aus $f \circ \varphi = f \circ \varphi'$ folgt $\varphi = j_X \circ \varphi = g \circ f \circ \varphi = g \circ f \circ \varphi' = j_X \circ \varphi' = \varphi'$; d.h. f ist monomorph. Aus $f \downarrow h$ ergibt sich $h = j_Y \circ h = f \circ g \circ h$, weswegen f sogar injektiv ist. Da (4) selbstdual ist, muß f außerdem eine Surjektion und somit ein Isomorphismus sein.

In 1.6 (4) ist g durch f eindeutig bestimmt und wegen der Symmetrie der Voraussetzung ebenfalls ein Isomorphismus. Er heißt der zu f *inverse Isomorphismus* und wird mit f^{-1} bezeichnet. Unmittelbar ergibt sich:

1.7. *Wenn in $h = g \circ f$ zwei der Morphismen f, g, h Isomorphismen sind, so ist auch der dritte ein Isomorphismus.*

$$(f^{-1})^{-1} = f \quad \text{und} \quad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

1.8. *Es gelte $g \circ f = g' \circ f'$, es sei f epimorph und g' injektiv. Dann gibt es genau einen Morphismus h mit $g = g' \circ h$ und $f' = h \circ f$. Ferner gilt:*

Ist f' epimorph und g injektiv, so ist h ein Isomorphismus.

Ist f' surjektiv und g monomorph, so ist h ebenfalls ein Isomorphismus; außerdem ist dann f surjektiv und g injektiv.

BEWEIS. Wegen $g' \circ f' = g \circ f$ gilt $g' \downarrow g \circ f$ und wegen 1.3 (f ist epimorph) sogar $g' \downarrow g$. Da g' injektiv ist, existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus h mit $g = g' \circ h$. Wegen $g' \circ f' = g \circ f = g' \circ h \circ f$ folgt außerdem $f' = h \circ f$, weil g' monomorph ist.

Mit f' ist nach 1.2 auch h ein Epimorphismus. Ist außerdem g injektiv, so ist nach 1.5 auch h eine Injektion, wegen 1.6 also ein Isomorphismus.

Andererseits ist mit f' nach 1.5 auch h eine Surjektion. Außerdem ist nach 1.2 mit g auch h ein Monomorphismus. Wegen 1.6 ist daher h ein Isomorphismus. Es folgt $f = h^{-1} \circ f'$, und wegen 1.4 ist f surjektiv und g injektiv.

§ 2. Punktale Morphismen

In der Kategorie aller topologischen Räume oder auch nur aller T_1-Räume sind diejenigen stetigen Abbildungen $p: X \to Y$, bei denen die Bildmenge $p(X)$ einpunktig ist, durch folgende Eigenschaft gekennzeichnet: Für beliebige Abbildungen φ und φ' eines Raumes in X gilt $p \circ \varphi = p \circ \varphi'$. In der Kategorie aller Gruppen charakterisiert diese Eigenschaft die Null-Homomorphismen; und diese besitzen dann auch die duale Eigenschaft. Im Fall der topologischen Räume wird jedoch die duale Forderung von keiner Abbildung erfüllt. Dieses Beispiel erklärt, warum bei den folgenden Betrachtungen auf die volle Dualität verzichtet werden muß. Hiermit hängt auch zusammen, daß unter den Beziehungen $\uparrow$ und $\downarrow$ die zweite eine wesentlich stärkere Rolle spielen wird.

DEFINITION 2a. *Ein Morphismus $p: X \to$ heiße punktal, wenn für alle Objekte Z und für alle $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}(Z, X)$ stets $p \circ \varphi = p \circ \varphi'$ gilt.*

Unmittelbar aus dieser Definition folgt:

2.1. *Mit p ist auch $p \circ f$ und $g \circ p$ ein punktaler Morphismus.*
Ist g monomorph und $g \circ p$ punktal, so ist auch p punktal.

2.2. *Es gelte $p \downarrow f$, und p sei punktal. Dann ist auch f punktal, es gilt $f \downarrow p$, und es gibt Faktorisierungen $f = p \circ f^*$ und $p = f \circ p^*$*

BEWEIS. Es gelte $p: X \to Y$ und $f: Z \to Y$. Ferner seien die Morphismen $\varphi: Y \to Z$ und $\psi: Z \to X$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$j_Y \circ p = p = p \circ j_X = p \circ \psi \circ \varphi \circ p.$$

Wegen $p \downarrow f$ folgt

$$f = j_Y \circ f = p \circ \psi \circ \varphi \circ f,$$

mit $f^* = \psi \circ \varphi \circ f$ also $f = p \circ f^*$. Hieraus ergibt sich wegen 2.1, daß auch f punktal ist. Setzt man $p^* = \varphi \circ p$, so gilt außerdem $p = p \circ j_X = p \circ f^* \circ p^* = f \circ p^*$. Hieraus folgt schließlich noch $f \downarrow p$.

2.3. *Jeder punktale Monomorphismus ist eine Injektion, jeder punktale Epimorphismus ist eine Surjektion.*

BEWEIS. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus 2.2. Weiter sei $p: X \to Y$ ein punktaler Epimorphismus, und es gelte $p \uparrow q$. Für beliebiges Z und Morphismen $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}(Z, X)$ erhält man dann $p \circ \varphi = p \circ \varphi'$ und daher auch $q \circ \varphi = q \circ \varphi'$; d.h. q ist ebenfalls punktal. Mit einem beliebigen Morphismus $\psi: Y \to X$ ergibt sich somit $q = q \circ j_X = q \circ \psi \circ p$, mit $q^* = q \circ \psi$ also $q = q^* \circ p$. Daher ist p sogar surjektiv.

DEFINITION 2b. *Ein Objekt E soll ein Einsobjekt heißen, wenn für jedes X die Menge $\mathrm{Hom}(X, E)$ einelementig ist.*

Wenn E und E' zwei Einsobjekte sind, so gilt $\mathrm{Hom}(E, E') = \{\lambda\}$ und $\mathrm{Hom}(E', E) = \{\lambda'\}$. Wegen $\mathrm{Hom}(E, E) = \{j_E\}$ und $\mathrm{Hom}(E', E') = \{j_{E'}\}$ folgt $\lambda' \circ \lambda = j_E$ und $\lambda \circ \lambda' = j_{E'}$. Wegen 1.6 sind daher λ und λ' Isomorphismen mit $\lambda' = \lambda^{-1}$. Je zwei Einsobjekte sind also isomorph. Wenn E ein Einsobjekt ist, soll der einzige Morphismus aus $\mathrm{Hom}(X, E)$ stets mit λ_X bezeichnet werden.

2.4. *Es sei $p: E \to$ ein punktaler Monomorphismus. Dann ist E ein Einsobjekt.*

BEWEIS. Es gelte $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}(X, E)$. Da p punktal ist, folgt $p \circ \varphi = p \circ \varphi'$, und da p monomorph ist, weiter auch $\varphi = \varphi'$. Daher ist $\mathrm{Hom}(X, E)$ einelementig.

5.2. *Es sei E ein Einsobjekt. Für jedes X ist dann λ_X eine punktale Surjektion, und jeder Morphismus aus $\mathrm{Hom}(E, X)$ ist eine punktale Injektion.*

BEWEIS. Für beliebige $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ sind $\lambda_X \circ \varphi$ und $\lambda_X \circ \varphi'$ Morphismen aus $\mathrm{Hom}(Y, E)$. Es folgt $\lambda_X \circ \varphi = \lambda_Y = \lambda_X \circ \varphi'$, und λ_X ist somit punktal. Weiter sei $\mu: E \to X$ beliebig. Dann gilt $\lambda_X \circ \mu \in \mathrm{Hom}(E, E)$, also $\lambda_X \circ \mu = j_E$. Aus $\psi \circ \lambda_X = \psi' \circ \lambda_X$ folgt daher

$$\psi = \psi \circ j_E = \psi \circ \lambda_X \circ \mu = \psi' \circ \lambda_X \circ \mu = \psi' \circ j_E = \psi'.$$

Somit ist λ_X auch epimorph, wegen 2.3 also eine Surjektion.

Es gelte jetzt $p: E \to X$. Aus $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}(Y, E)$ folgt $\varphi = \lambda_Y = \varphi'$, also auch $p \circ \varphi = p \circ \varphi'$; d.h. p ist punktal. Umgekehrt folgt aus $p \circ \varphi = p \circ \varphi'$ trivialerweise $\varphi = \varphi'$, weswegen p außerdem monomorph, wegen 2.3 also eine Injektion ist.

2.6. *Es sei E ein Einsobjekt: Ein Morphismus $p: X \to Y$ ist genau dann punktal, wenn er eine Faktorisierung $p = p^* \circ \lambda_X$ gestattet.*

BEWEIS. Es gelte $p = p^* \circ \lambda_X$. Wegen 2.5 ist λ_X, wegen 2.1 aber auch p punktal. Umgekehrt sei p punktal, und $\mu: E \to X$ sei beliebig gewählt. Dann gilt $p = p \circ j_X = p \circ \mu \circ \lambda_X$, mit $p^* = p \circ \mu$ also $p = p^* \circ \lambda_X$.

An die Kategorie $\mathfrak{K}$ soll nun zunächst eine, allerdings sehr scharfe, Forderung gestellt werden, die es unmittelbar ermöglicht, die Morphismen als Abbildungen geeigneter Mengen aufzufassen. Die Kategorie besitze nämlich folgende Eigenschaft:

(E) *$\mathfrak{K}$ enthält ein Einsobjekt E. Zu je zwei verschiedenen Morphismen $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ existiere ferner ein $p: E \to X$ mit $f \circ p \neq g \circ p$.*

Gilt $f: X \to Y$ und $p: E \to X$, so folgt $f \circ p: E \to Y$. Durch $\hat{f}(p) = f \circ p$ wird somit eine Abbildung $\hat{f}: \mathrm{Hom}(E, X) \to \mathrm{Hom}(E, Y)$ definiert. Offenbar gilt $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$. Sind f und g zwei verschiedene Morphismen aus $\mathrm{Hom}(X, Y)$, so gibt es wegen (E) ein $p \in \mathrm{Hom}(E, X)$ mit $f \circ p \neq g \circ p$, also mit $\hat{f}(p) \neq \hat{g}(p)$. Daher sind dann auch $\hat{f}$ und $\hat{g}$ verschiedene Abbildungen. Setzt man noch

$$\hat{X} = \mathrm{Hom}(E, X) \quad \text{und} \quad \mathrm{Hom}(\hat{X}, \hat{Y}) = \{\hat{f}: f \in \mathrm{Hom}(X, Y)\},$$

so bilden die neuen Objekte $\hat{X}$ und die Mengen $\mathrm{Hom}(\hat{X}, \hat{Y})$ eine Kategorie $\hat{\mathfrak{K}}$, in der die Morphismen Abbildungen sind und die Komposition die Hintereinanderschaltung dieser Abbildungen ist. Durch

$$\Phi(X) = \hat{X} \quad \text{und} \quad \Phi(f) = \hat{f}$$

wird ein eineindeutiger Funktor Φ von $\mathfrak{K}$ auf $\hat{\mathfrak{K}}$ definiert. Die Kategorien $\mathfrak{K}$ und $\hat{\mathfrak{K}}$ sind somit isomorph.

Die Kategorie $\hat{\mathfrak{K}}$ und auch jede andere Kategorie, in der die Morphismen Abbildungen sind, kann nun in natürlich ausgezeichneter Weise als Kategorie von T_1-Räumen aufgefaßt werden: Es bedeute $\mathfrak{A}(\hat{X})$ das System aller Teilmengen von $\hat{X}$, die bei einer geeigneten Abbildung aus $\mathrm{Hom}(\hat{X}, .)$ Urbild eines Punktes sind. Da jeder Punkt von $\hat{X}$ Urbild von sich selbst bei der Identität ist, enthält $\mathfrak{A}(\hat{X})$ jedenfalls alle Punkte von $\hat{X}$. Da $\hat{E} = \mathrm{Hom}(E, E)$ eine einpunktige Menge und $\hat{X}$ Urbild von $\hat{E}$ bei der Abbildung $\hat{\lambda}_X$ ist, gilt außerdem $\hat{X} \in \mathfrak{A}(\hat{X})$. Auf $\hat{X}$ gibt es nun bekanntlich genau eine gröbste Topologie $\hat{\tau}$, bei der die Mengen aus $\mathfrak{A}(\hat{X})$ abgeschlossen sind: Eine nichtleere Teilmenge von $\hat{X}$ ist genau dann $\hat{\tau}$-abgeschlossen, wenn sie sich als Durchschnitt von Mengen darstellen läßt, die ihrerseits Vereinigungen von je endlich vielen Mengen aus $\mathfrak{A}(\hat{X})$ sind. Der so bestimmte topologische Raum soll mit $(\hat{X}, \hat{\tau})$ bezeichnet werden. Da $\mathfrak{A}(\hat{X})$ alle Punkte von $\hat{X}$ enthält, ist $\hat{\tau}$ eine T_1-Topologie.

2.7. *Die Topologien $\hat{\tau}$ besitzen folgende Eigenschaften, durch die sie umgekehrt auch eindeutig gekennzeichnet werden:*

(*a*) *Jede Abbildung aus* $\mathrm{Hom}(\hat{X}, \hat{Y})$ *ist eine stetige Abbildung von* $(\hat{X}, \hat{\tau})$ *in* $(\hat{Y}, \hat{\tau})$.

(*b*) *Wenn jedem $\hat{X}$ eine T_1-Topologie τ' so zugeordnet ist, daß* $\mathrm{Hom}(\hat{X}, \hat{Y})$ *aus lauter stetigen Abbildungen von $(\hat{X}, \tau')$ in $(\hat{Y}, \tau')$ besteht, dann sind die Topologien τ' mindestens so fein wie die Topologien $\hat{\tau}$ (d.h. jede $\hat{\tau}$-abgeschlossene Menge ist auch τ'-abgeschlossen).*

BEWEIS. Aus $\hat{f} \in \mathrm{Hom}(\hat{X}, \hat{Y})$ und $A \in \mathfrak{A}(\hat{Y})$ folgt, daß das Urbild von A bei $\hat{f}$ zu $\mathfrak{A}(\hat{X})$ gehört. Hieraus ergibt sich unmittelbar Eigenschaft (a). Sind umgekehrt T_1-Topologien τ' gegeben, hinsichtlich derer alle Morphismen stetige Abbildungen sind, so müssen die Urbilder von Punkten, also die Mengen aus $\mathfrak{A}(\hat{X})$ jedenfalls τ'-abgeschlossen sein. Dann aber sind überhaupt alle $\hat{\tau}$-abgeschlossenen Mengen auch τ'-abgeschlossen; d.h. es gilt (b).

Eine Kategorie $\mathfrak{K}$ soll kurz eine T_1-Kategorie genannt werden, wenn die Objekte X von $\mathfrak{K}$ mit T_1-Topologien τ versehen sind und wenn die Morphismen stetige Abbildungen dieser topologischen Räume sind. Zur Kennzeichnung der Topologien soll dann eine solche T_1-Kategorie genauer mit $(\mathfrak{K}, \tau)$ bezeichnet werden, während $\mathfrak{K}$ allein lediglich die Struktur der Kategorie kennzeichnen soll. Nach der vorangehenden Konstruktion bestimmt jede Kategorie $\mathfrak{K}$ mit der Eigenschaft (E) eindeutig eine T_1-Kategorie $(\hat{\mathfrak{K}}, \hat{\tau})$.

DEFINITION 2c. *Zwei T_1-Kategorien $(\mathfrak{K}, \tau)$ und $(\mathfrak{K}', \tau')$ sollen topologisch isomorph genannt werden, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *$\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ sind als Kategorien isomorph; d.h. es gibt einen eineindeutigen Funktor Φ von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{K}'$.*

(2) *Zu jedem Raum (X, τ) aus $(\mathfrak{K}, \tau)$ gibt es einen Homöomorphismus h_X von (X, τ) auf den Raum $(\Phi(X), \tau')$.*

(3) *Die Homöomorphismen h_X sind mit Φ vertauschbar: Aus $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ folgt $h_Y \circ f = \Phi(f) \circ h_X$.*

2.8. *Es sei $(\mathfrak{K}, \tau)$ eine T_1-Kategorie mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$\mathfrak{K}$ enthält mit jedem Raum X auch jeden Unterraum U von X, und der natürliche Homöomorphismus von U in X ist ein Morphismus aus* $\mathrm{Hom}(U, X)$.

(2) *$\mathfrak{K}$ enthält mit jedem Raum X und mit jeder abgeschlossenen Teilmenge A von X auch den Quotientenraum X/A, und die natürliche Projektion von X auf X/A ist ein Morphismus aus* $\mathrm{Hom}(X, X/A)$.

Dann besitzt $\mathfrak{K}$ die Eigenschaft (E), *und $(\mathfrak{K}, \tau)$ ist zu $(\hat{\mathfrak{K}}, \hat{\tau})$ topologisch isomorph.*

Beweis. Es sei Z ein beliebiges Objekt aus $\mathfrak{K}$ und z ein beliebiger Punkt aus Z. Wegen (1) ist dann die einpunktige Menge $\{z\}$ ein Objekt E von $\mathfrak{K}$ und offenbar auch ein Einsobjekt. Zu je zwei verschiedenen Morphismen $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ gibt es einen Punkt $x \in X$ mit $f(x) \neq g(x)$. Wieder wegen (1) ist $\{x\}$ ein Objekt von $\mathfrak{K}$, und der natürliche Homöomorphismus q von $\{x\}$ in X ist ein punktaler Morphismus mit $f \circ q \neq g \circ q$. Nach 2.6 gilt $q = p \circ \lambda$ mit $p: E \to X$ und $\lambda: \{x\} \to E$. Es folgt $f \circ p \neq g \circ p$; d.h. es gilt (E). Außerdem hat sich gezeigt, daß jeder Punkt $x \in X$ eindeutig einen Morphismus $p_x: E \to X$ mit $p_x(z) = x$ bestimmt. Durch $h_X(x) = p_x$ wird daher eine Abbildung h_X von X in das Objekt $\Phi(X) = \hat{X} = \mathrm{Hom}(E, X)$ von $\hat{\mathfrak{K}}$ definiert, die offensichtlich auch eine 1—1-Abbildung ist. Außerdem erfüllen die Abbildungen h_X die Vertauschungsbedingung (3) aus 2c. Es ist daher nur noch zu zeigen, daß h_X ein Homöomorphismus von (X, τ) auf $(\hat{X}, \hat{\tau})$ ist. Jeder Morphismus $p: E \to X$ bestimmt einen Punkt $x = p(z)$ von X, und es gilt $p = p_x = h_X(x)$. Daher ist h_X jedenfalls eine Abbildung *auf* $\hat{X}$. Nach Voraussetzung sind die Morphismen aus $\mathfrak{K}$ stetig hinsichtlich der Topologien τ. Es seien nun andere T_1-Topologien τ' gegeben, hinsichtlich derer die Morphismen aus $\mathfrak{K}$ ebenfalls stetig sind. Da jede τ-abgeschlossene Teilmenge A von X wegen (2) Urbild eines Punktes bei der natürlichen Projektion von X auf X/A ist, muß A dann auch τ'-abgeschlossen sein. Die Topologien τ besitzen daher ebenfalls die Eigenschaften (a) und (b) aus 2.7, woraus unmittelbar folgt, daß die Abbildungen h_X Homöomorphismen sind.

Der letzte Satz besagt, daß in einer T_1-Kategorie mit den Eigenschaften (1) und (2) die Räume (also die Mengen und die Topologien) bis auf Homöomorphie allein durch die Struktur der Kategorie bestimmt sind. Aus dem Beweis geht hervor, daß die Voraussetzungen noch in mannigfacher Weise abgeschwächt werden können.

§ 3. Bild und Urbild

Die sehr einschränkende Bedingung (E) des vorangehenden Paragraphen soll bei den weiteren Betrachtungen durch mehrere andere Forderungen ersetzt werden.

DEFINITION 3a. *Es gelte* $f, g \in \mathrm{Hom}(.,X)$.

f und g sollen äquivalent genannt werden (in Zeichen: $f \sim g$), wenn $f \downarrow g$ und $g \downarrow f$ gilt.

f und g heißen fremd (in Zeichen: $f|g$), wenn es keinen Morphismus φ mit $f \downarrow \varphi$ und $g \downarrow \varphi$ gibt.

Offenbar ist $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv. Außerdem folgt wegen 1.1 aus $f \sim g$ auch $(h \circ f) \sim (h \circ g)$. Ebenso folgt aus $f|g$ auch $f \circ h | g \circ h$, und die Beziehungen $f \sim g$ und $f|g$ schließen sich gegenseitig aus. Ist E ein Einsobjekt, so gilt für je zwei verschiedene Morphismen $p, q \in \mathrm{Hom}(E, X)$ wegen 2.2 stets $p|q$. Die Eigenschaft (E) besagt daher, daß je zwei verschiedene Morphismen $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ durch einen Morphismus $p: E \to X$ in folgendem Sinn getrennt werden können: $f \circ p | g \circ p$. Die nachstehende Bedingung drückt nun eine entsprechende Trennungseigenschaft aus.

(T) *Zu je zwei verschiedenen Morphismen $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ existiert ein $\varphi \in \mathrm{Hom}(., X)$ mit $f \circ \varphi | g \circ \varphi$.*

Offenbar folgt (T) aus (E). Eine weitere Folgerung aus (E) war, daß sich die Morphismen als Abbildungen auffassen ließen. Diese Konsequenz soll durch eine weitere Forderung erreicht werden, die zunächst jedoch nur eine untergeordnete Rolle spielen wird. Lediglich aus Bequemlichkeitsgründen soll sie schon jetzt gestellt werden.

(M) *Jedem Objekt X ist eine Teilmenge M_X^* der Klasse* $\mathrm{Hom}(., X)$ *mit folgender Eigenschaft zugeordnet: Zu jedem $f \in \mathrm{Hom}(., X)$ existiert ein $\varphi \in M_X^*$ mit $f \sim \varphi$.*

In M_X^* definiert $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Da M_X^* eine Menge ist, kann auf die Äquivalenzklassen von M_X^* das Auswahlaxiom angewandt werden. Es folgt, daß es dann sogar eine Teilmenge M_X von M_X^* mit der zusätzlichen Eigenschaft gibt, daß zu jedem $f \in \mathrm{Hom}(., X)$ nur *genau* ein $\varphi \in M_X$ mit $f \sim \varphi$ existiert. Nachfolgend sollen die Mengen M_X immer diese Bedeutung haben.

Aus (M) und (T) zusammen folgt wiederum, daß die Morphismen als Abbildungen gedeutet werden können: Es gelte nämlich $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ und $\varphi \in M_X$. Dann gibt es zu $f \circ \varphi$ genau ein $\varphi' \in M_Y$ mit $(f \circ \varphi) \sim \varphi'$. Durch $\hat{f}(\varphi) = \varphi'$ wird daher eine Abbildung $\hat{f}: M_X \to M_Y$ definiert. Wieder gilt $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$. Weiter seien f und g zwei verschiedene Morphismen aus $\mathrm{Hom}(X, Y)$. Wegen (T) gibt es dann ein φ mit $f \circ \varphi | g \circ \varphi$. Zu φ existiert ein $\psi \in M_X$ mit $\varphi \sim \psi$, und es gilt dann auch $f \circ \psi | g \circ \psi$. Daher können $f \circ \psi$ und $g \circ \psi$ nicht äquivalent sein; d.h. es gilt $\hat{f}(\psi) \neq \hat{g}(\psi)$, und auch $\hat{f}, \hat{g}$ sind verschiedene Abbildungen. Wie vorher wird somit durch $\Phi(X) = M_X$ und $\Phi(f) = \hat{f}$ ein eineindeutiger Funktor Φ von $\mathfrak{K}$ auf eine Kategorie $\hat{\mathfrak{K}}$ definiert, in der die Morphismen Abbildungen sind.

Ist umgekehrt $\mathfrak{K}$ eine Kategorie, in der die Morphismen Abbildungen sind, so kann man zunächst in $\mathrm{Hom}(., X)$ auf folgende Weise eine neue Äquivalenzbeziehung einführen: Für $f: Y \to X$ und $g: Z \to X$ gelte $f \approx g$ genau dann, wenn $f(Y) = g(Z)$ erfüllt ist. Aus $f \approx g$ folgt dann $f \sim g$. Die Äquivalenzklassen

hinsichtlich $\approx$ sind aber durch die entsprechende Bildmenge, also durch Elemente der Potenzmenge von X eindeutig gekennzeichnet. Daher entsprechen auch die Klassen hinsichtlich $\sim$ eineindeutig den Elementen einer geeigneten Menge. Dieses Entsprechen kann aber im allgemeinen nicht durch eine Abbildung beschrieben werden, weil die Äquivalenzklassen keine Mengen zu sein brauchen. Aus diesem Grund ist auch das Auswahlaxiom nicht anwendbar und die Eigenschaft (M) daher nicht auf diesem Weg ableitbar. Die Betrachtungen zeigen jedoch die nahe Verwandtschaft von (M) mit der Voraussetzung, daß die Morphismen als Abbildungen aufgefaßt werden können.

Bei den folgenden Betrachtungen wird im allgemeinen nur die Gültigkeit von (T) vorausgesetzt.

DEFINITION 3b. *Es gelte $f: X \to Y$. Dann heiße ein Morphismus $b: B \to Y$ ein Bild von f, wenn $f = b \circ k$ gilt, b eine Injektion ist und k folgende Eigenschaft besitzt: Zu jedem $g: \to B$ gibt es Morphismen φ und φ^* mit $g \circ \varphi = k \circ \varphi^*$.*

3.1. *In 3b ist k ein Epimorphismus, der durch f und b eindeutig bestimmt ist.*

BEWEIS. Die Eindeutigkeit von k folgt unmittelbar daraus, daß b als Injektion monomorph ist. Weiter gelte $\psi \circ k = \psi' \circ k$, es werde jedoch $\psi \neq \psi'$ angenommen. Wegen (T) gibt es dann ein χ mit $\psi \circ \chi | \psi' \circ \chi$. Zu χ existieren weiter Morphismen φ und φ^* mit $\chi \circ \varphi = k \circ \varphi^*$. Wegen $\psi \circ k = \psi' \circ k$ gilt dann auch $\psi \circ k \circ \varphi^* = \psi' \circ k \circ \varphi^*$ und somit $\psi \circ \chi \circ \varphi = \psi' \circ \chi \circ \varphi$. Im Widerspruch hierzu folgt aber aus $\psi \circ \chi | \psi' \circ \chi$ auch $\psi \circ \chi \circ \varphi | \psi' \circ \chi \circ \varphi$. Daher ist k ein Epimorphismus.

Sind b und b' zwei Bilder von f mit den zugehörigen Epimorphismen k und k', so gibt es wegen 1.8 einen Isomorphismus h mit $b' = b \circ h$ und $k = h \circ k'$. Ist umgekehrt b ein Bild von f und gilt $b' = b \circ h$ mit einem Isomorphismus h, so ist b' ein Bild von f mit dem zugehörigen Epimorphismus $k' = h^{-1} \circ k$. Zu jedem Morphismus f gibt es also bis auf Isomorphie höchstens ein Bild.

Von der Kategorie $\mathfrak{K}$ soll nun gefordert werden, daß in ihr jeder Morphismus mindestens ein Bild besitzt:

(B) *Jeder Morphismus besitzt mindestens ein Bild.*

3.2. *Es sei b ein Bild von f. Dann gilt $b \sim f$.*

BEWEIS. Wegen $f = b \circ k$ folgt $b \downarrow f$ aus 1.1 und $f \downarrow b$ aus 1.3, weil k nach 3.1 ein Epimorphismus ist.

Hiernach ist wegen (B) jeder Morphismus zu mindestens einer Injektion äquivalent. Ist umgekehrt b eine Injektion mit $b \sim f$, so ist b auch ein Bild von f: Denn wegen (B) gibt es jedenfalls ein Bild b' von f, für das dann $b \sim b'$ gilt, woraus die Isomorphie von b und b' unmittelbar folgt.

Setzt man jetzt noch die Gültigkeit von (M) voraus, so ergibt sich folgende Verschärfung: Zu jedem Objekt X gibt es eine Teilmenge J_X von $\mathrm{Hom}(., X)$, die aus lauter Injektionen besteht und die zu jedem $f \in \mathrm{Hom}(., X)$ genau ein b mit $b \sim f$ enthält. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann außerdem noch vorausgesetzt werden, daß $f \in J_X$ gilt. *Die Forderung* (M) *soll daher von jetzt an immer so verstanden werden, daß jedem Objekt X in eindeutiger Weise eine derartige Menge J_X zugeordnet ist.* Jeder Morphismus $f: \to X$ besitzt

dann genau ein Bild in J_X. Dieses ausgezeichnete Bild von f soll nachstehend immer mit $\mathrm{Im}\, f$ bezeichnet werden. Die Forderung (M) ermöglicht es also, von *dem* Bild eines Morphismus zu sprechen. Nur in diesem Sinn wird die Eigenschaft (M) bei den folgenden Betrachtungen benutzt werden. Alle Sätze gelten jedoch auch ohne Voraussetzung von (M), wenn man in ihnen unter $\mathrm{Im}\, f$ stets ein geeignetes Bild von f versteht.

Der in $f = \mathrm{Im}\, f \circ k$ jetzt bereits durch f eindeutig bestimmte Morphismus k soll der zu f gehörende *kanonische Epimorphismus* genannt werden.

3.3. $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g \circ \mathrm{Im}\, f)$.

BEWEIS. Wegen 3.2 gilt $f \sim \mathrm{Im}\, f$ und daher auch $g \circ f \sim g \circ \mathrm{Im}\, f$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

3.4. *$f \downarrow g$ ist gleichwertig damit, daß es zu jedem h mit $g \downarrow h$ Morphismen φ und φ^* mit $h \circ \varphi = f \circ \varphi^*$ gibt.*

BEWEIS. Wegen $f \downarrow g$, $g \downarrow h$ und 3.2 gilt auch $\mathrm{Im}\, f \downarrow h$. Da $\mathrm{Im}\, f$ injektiv ist, folgt $h = \mathrm{Im}\, f \circ h^*$. Ist k der zu f gehörende kanonische Epimorphismus, so folgt weiter die Existenz von Morphismen φ und φ^* mit $h^* \circ \varphi = k \circ \varphi^*$. Man erhält $h \circ \varphi = \mathrm{Im}\, f \circ h^* \circ \varphi = \mathrm{Im}\, f \circ k \circ \varphi^* = f \circ \varphi^*$. Umgekehrt sei die Bedingung des Satzes erfüllt; es werde jedoch angenommen, daß $f \downarrow g$ nicht gilt. Dann gibt es Morphismen χ, χ' mit $\chi \circ f = \chi' \circ f$, aber $\chi \circ g \neq \chi' \circ g$. Wegen (T) existiert daher ein ψ mit $\chi \circ g \circ \psi \mid \chi' \circ g \circ \psi$. Wegen $g \downarrow g \circ \psi$ gibt es nach Voraussetzung Morphismen φ und φ^* mit $g \circ \psi \circ \varphi = f \circ \varphi^*$. Es folgt $\chi \circ g \circ \psi \circ \varphi = \chi \circ f \circ \varphi^* = \chi' \circ f \circ \varphi^* = \chi' \circ g \circ \psi \circ \varphi$ und damit ein Widerspruch zu $\chi \circ g \circ \psi \mid \chi' \circ g \circ \psi$.

3.5. *Ein Morphismus p ist genau dann punktal, wenn $\mathrm{Im}\, p$ punktal ist. In $\mathfrak{K}$ gibt es genau dann ein Einsobjekt, wenn es in $\mathfrak{K}$ einen punktalen Morphismus gibt.*

BEWEIS. Die erste Behauptung folgt aus 2.2 und 3.2. Ist E ein Einsobjekt, so ist nach 2.5 z.B. j_E ein punktaler Morphismus. Umgekehrt existiere ein punktaler Morphismus p. Wegen des ersten Teils ist dann $\mathrm{Im}\, p$ ein punktaler Monomorphismus, und nach 2.4 folgt die Existenz eines Einsobjekts.

3.6. *Es gelte $f \downarrow p$, und p sei punktal. Dann gestattet p eine Faktorisierung $p = f \circ p^*$.*

BEWEIS. Nach 3.4 gibt es Morphismen φ und φ^* mit $p \circ \varphi = f \circ \varphi^*$. Es gelte $\varphi: Y \to X$, und $\psi: X \to Y$ sei beliebig. Da p punktal ist, erhält man $p = p \circ j_X = p \circ \varphi \circ \psi = f \circ \varphi^* \circ \psi = f \circ p^*$ mit $p^* = \varphi^* \circ \psi$.

Nachfolgend bedeute $f \nmid g$ die Negation von $f \mid g$. Es ist also $f \nmid g$ gleichbedeutend damit, daß es ein φ mit $f \downarrow \varphi$ und $g \downarrow \varphi$ gibt.

DEFINITION 3c. *Es gelte $f: X \to Y$, und $g: \to Y$ sei eine Injektion mit $f \nmid g$. Dann soll eine Injektion $u: \to X$ ein Urbild von g bei f genannt werden, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:*

(1) *Mit einem geeigneten u^* gilt $f \circ u = g \circ u^*$.*

(2) *Aus $f \circ h = g \circ h^*$ folgt $h = u \circ h'$.*

Da g und u Injektionen sind, sind in (1) und (2) die Morphismen u^* und h' durch u bzw. h eindeutig bestimmt. Wenn u und u_1 zwei Urbilder von g

bei f sind, gilt wegen (1) zunächst $f \circ u_1 = g \circ u_1^*$ und daher wegen (2) auch $u_1 = u \circ u_1'$. Ebenso erhält man $u = u_1 \circ u'$. Es folgt $u \circ j = u = u_1 \circ u' = u \circ u_1' \circ u'$ und weiter $u_1' \circ u' = j$, weil u ein Monomorphismus ist. Analog ergibt sich $u' \circ u_1' = j$. Wegen 1.6 sind daher u' und u_1' Isomorphismen. Zwei Urbilder sind hiernach also stets isomorph und daher auch äquivalent. Gilt umgekehrt $u \sim u_1$ und u ist ein Urbild von g bei f, so folgt zunächst die Isomorphie von u und u_1 und hieraus weiter, daß auch u_1 ein Urbild von g bei f ist.

Von der Kategorie $\mathfrak{K}$ soll nun weiter vorausgesetzt werden, daß in ihr stets Urbilder existieren:

(U) *Zu jedem $f: X \to Y$ und jeder Injektion $g: \to Y$ mit $f \nmid g$ existiert mindestens ein Urbild.*

Setzt man jetzt wieder die Gültigkeit von (M) voraus, so folgt wie vorher, daß es unter allen Urbildern von g bei f ein ausgezeichnetes gibt; nämlich das in J_X liegende. Dieses soll nachstehend immer mit $f^-(g)$ bezeichnet werden. Aber auch ohne Voraussetzung von (M) behalten die folgenden Sätze ihre Gültigkeit, wenn man nur unter $f^-(g)$ ein geeignetes Urbild versteht.

3.7. *Es gelte $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, und $h: \to Z$ sei eine Injektion mit $g \circ f \nmid h$. Dann gilt auch $g \nmid h$, $f \nmid g^-(h)$ und*

$$(g \circ f)^-(h) = f^-(g^-(h)).$$

Beweis. Wegen $g \circ f \nmid h$ existiert ein φ mit $g \circ f \downarrow \varphi$ und $h \downarrow \varphi$. Wegen 1.1 folgt $g \downarrow \varphi$ und $h \downarrow \varphi$, also $g \nmid h$. Daher existiert $g^-(h)$, und es gilt $g \circ g^-(h) = h \circ u^*$. Zur Abkürzung werde nun $v = (g \circ f)^-(h)$ gesetzt. Wegen $g \circ (f \circ v) = (g \circ f) \circ v = h \circ v^*$ folgt dann $f \circ v = g^-(h) \circ v'$. Man erhält $f \downarrow f \circ v$ und $g^-(h) \downarrow f \circ v$, also $f \nmid g^-(h)$. Daher existiert weiter $w = f^-(g^-(h))$, und es gilt $f \circ w = g^-(h) \circ w^*$. Hieraus ergibt sich erstens $(g \circ f) \circ w = g \circ g^-(h) \circ w^* = h \circ u^* \circ w^*$. Setzt man $g \circ f \circ \psi = h \circ \psi^*$ voraus, so folgt zunächst $f \circ \psi = g^-(h) \circ \psi'$ und weiter zweitens $\psi = f^-(g^-(h)) \circ \psi''$. Daher ist $f^-(g^-(h))$ ein Urbild von h bei $g \circ f$.

3.8. *Es gelte $f: X \to Y$, und $g: \to Y$, $h: \to Y$ seien Injektionen mit $g \downarrow h$ und $f \nmid h$. Dann folgt auch $f \nmid g$ und $f^-(g) \downarrow f^-(h)$.*

Beweis. Aus $g \downarrow h$ und $f \nmid h$ folgt unmittelbar $f \nmid g$. Es werde nun $\varphi \circ f^-(g) = \varphi' \circ f^-(g)$, aber $\varphi \circ f^-(h) \neq \varphi' \circ f^-(h)$ angenommen. Dann gibt es wegen (T) ein ψ mit $\varphi \circ f^-(h) \circ \psi \mid \varphi' \circ f^-(h) \circ \psi$. Wegen $f \circ f^-(h) = h \circ u^*$ gilt $h \downarrow f \circ f^-(h)$, also auch $h \downarrow f \circ f^-(h) \circ \psi$, und weiter wegen $g \downarrow h$ schließlich $g \downarrow f \circ f^-(h) \circ \psi$. Nach 3.4 existieren somit Morphismen χ und χ^* mit $f \circ f^-(h) \circ \psi \circ \chi = f^-(g) \circ \chi^*$. Es folgt $f^-(h) \circ \psi \circ \chi = f^-(g) \circ \chi'$ und wegen der eingangs gemachten Voraussetzung $\varphi \circ f^-(h) \circ \psi \circ \chi = \varphi' \circ f^-(h) \circ \psi \circ \chi$ im Widerspruch zu $\varphi \circ f^-(h) \circ \psi \mid \varphi' \circ f^-(h) \circ \psi$.

§ 4. Summe und Produkt

Nachfolgend bedeute I stets eine Indexmenge.

Definition 4a. *Ein Objekt X heiße eine Summe der Objektmenge $\{X_\iota : \iota \in I\}$, wenn es Morphismen $\beta_\iota: X_\iota \to X$ mit folgenden Eigenschaften gibt:*

dann genau ein Bild in J_X. Dieses ausgezeichnete Bild von f soll nachstehend immer mit $\mathrm{Im}\, f$ bezeichnet werden. Die Forderung (M) ermöglicht es also, von *dem* Bild eines Morphismus zu sprechen. Nur in diesem Sinn wird die Eigenschaft (M) bei den folgenden Betrachtungen benutzt werden. Alle Sätze gelten jedoch auch ohne Voraussetzung von (M), wenn man in ihnen unter $\mathrm{Im}\, f$ stets ein geeignetes Bild von f versteht.

Der in $f = \mathrm{Im}\, f \circ k$ jetzt bereits durch f eindeutig bestimmte Morphismus k soll der zu f gehörende *kanonische Epimorphismus* genannt werden.

3.3. $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g \circ \mathrm{Im}\, f)$.

BEWEIS. Wegen 3.2 gilt $f \sim \mathrm{Im}\, f$ und daher auch $g \circ f \sim g \circ \mathrm{Im}\, f$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

3.4. *$f \downarrow g$ ist gleichwertig damit, daß es zu jedem h mit $g \downarrow h$ Morphismen φ und φ^* mit $h \circ \varphi = f \circ \varphi^*$ gibt.*

BEWEIS. Wegen $f \downarrow g$, $g \downarrow h$ und 3.2 gilt auch $\mathrm{Im}\, f \downarrow h$. Da $\mathrm{Im}\, f$ injektiv ist, folgt $h = \mathrm{Im}\, f \circ h^*$. Ist k der zu f gehörende kanonische Epimorphismus, so folgt weiter die Existenz von Morphismen φ und φ^* mit $h^* \circ \varphi = k \circ \varphi^*$. Man erhält $h \circ \varphi = \mathrm{Im}\, f \circ h^* \circ \varphi = \mathrm{Im}\, f \circ k \circ \varphi^* = f \circ \varphi^*$. Umgekehrt sei die Bedingung des Satzes erfüllt; es werde jedoch angenommen, daß $f \downarrow g$ nicht gilt. Dann gibt es Morphismen χ, χ' mit $\chi \circ f = \chi' \circ f$, aber $\chi \circ g \neq \chi' \circ g$. Wegen (T) existiert daher ein ψ mit $\chi \circ g \circ \psi \,|\, \chi' \circ g \circ \psi$. Wegen $g \downarrow g \circ \psi$ gibt es nach Voraussetzung Morphismen φ und φ^* mit $g \circ \psi \circ \varphi = f \circ \varphi^*$. Es folgt $\chi \circ g \circ \psi \circ \varphi = \chi \circ f \circ \varphi^* = \chi' \circ f \circ \varphi^* = \chi' \circ g \circ \psi \circ \varphi$ und damit ein Widerspruch zu $\chi \circ g \circ \psi \,|\, \chi' \circ g \circ \psi$.

3.5. *Ein Morphismus p ist genau dann punktal, wenn $\mathrm{Im}\, p$ punktal ist. In $\mathfrak{K}$ gibt es genau dann ein Einsobjekt, wenn es in $\mathfrak{K}$ einen punktalen Morphismus gibt.*

BEWEIS. Die erste Behauptung folgt aus 2.2 und 3.2. Ist E ein Einsobjekt, so ist nach 2.5 z. B. j_E ein punktaler Morphismus. Umgekehrt existiere ein punktaler Morphismus p. Wegen des ersten Teils ist dann $\mathrm{Im}\, p$ ein punktaler Monomorphismus, und nach 2.4 folgt die Existenz eines Einsobjekts.

3.6. *Es gelte $f \downarrow p$, und p sei punktal. Dann gestattet p eine Faktorisierung $p = f \circ p^*$.*

BEWEIS. Nach 3.4 gibt es Morphismen φ und φ^* mit $p \circ \varphi = f \circ \varphi^*$. Es gelte $\varphi: Y \to X$, und $\psi: X \to Y$ sei beliebig. Da p punktal ist, erhält man $p = p \circ j_X = p \circ \varphi \circ \psi = f \circ \varphi^* \circ \psi = f \circ p^*$ mit $p^* = \varphi^* \circ \psi$.

Nachfolgend bedeute $f \nmid g$ die Negation von $f \,|\, g$. Es ist also $f \nmid g$ gleichbedeutend damit, daß es ein φ mit $f \downarrow \varphi$ und $g \downarrow \varphi$ gibt.

DEFINITION 3c. *Es gelte $f: X \to Y$, und $g: \to Y$ sei eine Injektion mit $f \nmid g$. Dann soll eine Injektion $u: \to X$ ein Urbild von g bei f genannt werden, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:*

(1) *Mit einem geeigneten u^* gilt $f \circ u = g \circ u^*$.*

(2) *Aus $f \circ h = g \circ h^*$ folgt $h = u \circ h'$.*

Da g und u Injektionen sind, sind in (1) und (2) die Morphismen u^* und h' durch u bzw. h eindeutig bestimmt. Wenn u und u_1 zwei Urbilder von g

bei f sind, gilt wegen (1) zunächst $f \circ u_1 = g \circ u_1^*$ und daher wegen (2) auch $u_1 = u \circ u_1'$. Ebenso erhält man $u = u_1 \circ u'$. Es folgt $u \circ j = u = u_1 \circ u' = u \circ u_1' \circ u'$ und weiter $u_1' \circ u' = j$, weil u ein Monomorphismus ist. Analog ergibt sich $u' \circ u_1' = j$. Wegen 1.6 sind daher u' und u_1' Isomorphismen. Zwei Urbilder sind hiernach also stets isomorph und daher auch äquivalent. Gilt umgekehrt $u \sim u_1$ und u ist ein Urbild von g bei f, so folgt zunächst die Isomorphie von u und u_1 und hieraus weiter, daß auch u_1 ein Urbild von g bei f ist.

Von der Kategorie $\mathfrak{K}$ soll nun weiter vorausgesetzt werden, daß in ihr stets Urbilder existieren:

(U) *Zu jedem $f: X \to Y$ und jeder Injektion $g: \to Y$ mit $f \nmid g$ existiert mindestens ein Urbild.*

Setzt man jetzt wieder die Gültigkeit von (M) voraus, so folgt wie vorher, daß es unter allen Urbildern von g bei f ein ausgezeichnetes gibt; nämlich das in J_X liegende. Dieses soll nachstehend immer mit $f^-(g)$ bezeichnet werden. Aber auch ohne Voraussetzung von (M) behalten die folgenden Sätze ihre Gültigkeit, wenn man nur unter $f^-(g)$ ein geeignetes Urbild versteht.

3.7. *Es gelte $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, und $h: \to Z$ sei eine Injektion mit $g \circ f \nmid h$. Dann gilt auch $g \nmid h$, $f \nmid g^-(h)$ und*

$$(g \circ f)^-(h) = f^-(g^-(h)).$$

Beweis. Wegen $g \circ f \nmid h$ existiert ein φ mit $g \circ f \downarrow \varphi$ und $h \downarrow \varphi$. Wegen 1.1 folgt $g \downarrow \varphi$ und $h \downarrow \varphi$, also $g \nmid h$. Daher existiert $g^-(h)$, und es gilt $g \circ g^-(h) = h \circ u^*$. Zur Abkürzung werde nun $v = (g \circ f)^-(h)$ gesetzt. Wegen $g \circ (f \circ v) = (g \circ f) \circ v = h \circ v^*$ folgt dann $f \circ v = g^-(h) \circ v'$. Man erhält $f \downarrow f \circ v$ und $g^-(h) \downarrow f \circ v$, also $f \nmid g^-(h)$. Daher existiert weiter $w = f^-(g^-(h))$, und es gilt $f \circ w = g^-(h) \circ w^*$. Hieraus ergibt sich erstens $(g \circ f) \circ w = g \circ g^-(h) \circ w^* = h \circ u^* \circ w^*$. Setzt man $g \circ f \circ \psi = h \circ \psi^*$ voraus, so folgt zunächst $f \circ \psi = g^-(h) \circ \psi'$ und weiter zweitens $\psi = f^-(g^-(h)) \circ \psi''$. Daher ist $f^-(g^-(h))$ ein Urbild von h bei $g \circ f$.

3.8. *Es gelte $f: X \to Y$, und $g: \to Y$, $h: \to Y$ seien Injektionen mit $g \downarrow h$ und $f \nmid h$. Dann folgt auch $f \nmid g$ und $f^-(g) \downarrow f^-(h)$.*

Beweis. Aus $g \downarrow h$ und $f \nmid h$ folgt unmittelbar $f \nmid g$. Es werde nun $\varphi \circ f^-(g) = \varphi' \circ f^-(g)$, aber $\varphi \circ f^-(h) \neq \varphi' \circ f^-(h)$ angenommen. Dann gibt es wegen (T) ein ψ mit $\varphi \circ f^-(h) \circ \psi \mid \varphi' \circ f^-(h) \circ \psi$. Wegen $f \circ f^-(h) = h \circ u^*$ gilt $h \downarrow f \circ f^-(h)$, also auch $h \downarrow f \circ f^-(h) \circ \psi$, und weiter wegen $g \downarrow h$ schließlich $g \downarrow f \circ f^-(h) \circ \psi$. Nach 3.4 existieren somit Morphismen χ und χ^* mit $f \circ f^-(h) \circ \psi \circ \chi = f^-(g) \circ \chi^*$. Es folgt $f^-(h) \circ \psi \circ \chi = f^-(g) \circ \chi'$ und wegen der eingangs gemachten Voraussetzung $\varphi \circ f^-(h) \circ \psi \circ \chi = \varphi' \circ f^-(h) \circ \psi \circ \chi$ im Widerspruch zu $\varphi \circ f^-(h) \circ \psi \mid \varphi' \circ f^-(h) \circ \psi$.

§ 4. Summe und Produkt

Nachfolgend bedeute I stets eine Indexmenge.

Definition 4a. *Ein Objekt X heiße eine Summe der Objektmenge $\{X_\iota : \iota \in I\}$, wenn es Morphismen $\beta_\iota: X_\iota \to X$ mit folgenden Eigenschaften gibt:*

(1) *Zu jedem* $g: \to X$ *existiert ein Index* $\varkappa \in I$ *mit* $\beta_\varkappa \nmid g$.

(2) *Zu Morphismen* $f_\iota: X_\iota \to Y$ *existiert stets ein* $f: X \to Y$ *mit* $f_\iota = f \circ \beta_\iota$ *für alle* $\iota \in I$. *(*f *soll dann eine Summe der Morphismen* f_ι *genannt werden.)*

4.1. *Die Morphismen* β_ι *aus* 4a *sind injektiv.*

BEWEIS. Es sei $\varkappa$ ein fester Index. Für jedes $\iota \neq \varkappa$ sei f_ι ein beliebiger Morphismus aus $\mathrm{Hom}(X_\iota, X_\varkappa)$. Ferner gelte $f_\varkappa = j_{X_\varkappa}$. Wegen (2) gibt es dann ein $f: X \to X_\varkappa$ mit $f_\iota = f \circ \beta_\iota$ für alle $\iota \in I$. Insbesondere gilt $f \circ \beta_\varkappa = j$. Aus $\beta_\varkappa \circ \varphi = \beta_\varkappa \circ \varphi'$ folgt $\varphi = f \circ \beta_\varkappa \circ \varphi = f \circ \beta_\varkappa \circ \varphi' = \varphi'$. Daher ist $\beta_\varkappa$ monomorph. Weiter gelte $\beta_\varkappa \downarrow \psi$. Wegen $j \circ \beta_\varkappa = \beta_\varkappa \circ j = \beta_\varkappa \circ f \circ \beta_\varkappa$ folgt daraus $\psi = j \circ \psi = \beta_\varkappa \circ f \circ \psi$, und $\beta_\varkappa$ ist sogar injektiv.

4.2. *Aus* $f \circ \beta_\iota = f' \circ \beta_\iota$ *für alle* $\iota \in I$ *folgt* $f = f'$. *In* 4a (2) *ist daher* f *durch die Morphismen* f_ι *eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Es gelte $f \circ \beta_\iota = f' \circ \beta_\iota$ für alle $\iota \in I$ und $f \neq f'$. Wegen (T) gibt es dann ein φ mit $f \circ \varphi \mid f' \circ \varphi$. Zu φ gibt es wegen (1) einen Index $\varkappa$ mit $\beta_\varkappa \nmid \varphi$. Daher existiert ein ψ mit $\varphi \downarrow \psi$ und $\beta_\varkappa \downarrow \psi$. Aus der ersten Beziehung folgt $f \circ \varphi \downarrow f \circ \psi$ und $f' \circ \varphi \downarrow f' \circ \psi$. Da $\beta_\varkappa$ nach 4.1 injektiv ist, folgt aus der zweiten Beziehung $\psi = \beta_\varkappa \circ \psi^*$, also $f \circ \psi = f \circ \beta_\varkappa \circ \psi^* = f_\varkappa \circ \psi^*$ und entsprechend $f' \circ \psi = f_\varkappa \circ \psi^*$. Im Widerspruch zu $f \circ \varphi \mid f' \circ \varphi$ gilt daher $f \circ \varphi \downarrow f_\varkappa \circ \psi^*$ und $f' \circ \varphi \downarrow f_\varkappa \circ \psi^*$.

4.3. *Es seien* X *und* X' *zwei Summen der Objektmenge* $\{X_\iota : \iota \in I\}$ *mit den zugehörigen Morphismen* β_ι *und* β'_ι. *Dann gibt es einen Isomorphismus* $h: X \to X'$ *mit* $\beta'_\iota = h \circ \beta_\iota$ *für alle* $\iota \in I$.

BEWEIS. Zu den Morphismen β'_ι gibt es ein $h: X \to X'$ mit $\beta'_\iota = h \circ \beta_\iota$ für alle $\iota \in I$. Ebenso gibt es ein $h': X' \to X$ mit $\beta_\iota = h' \circ \beta'_\iota$ für alle $\iota \in I$. Es gilt $h' \circ h \circ \beta_\iota = h' \circ \beta'_\iota = \beta_\iota = j \circ \beta_\iota$ für alle $\iota \in I$, wegen 4.2 also $h' \circ h = j$. Ebenso erhält man $h \circ h' = j$. Nach 1.6 sind daher h und h' Isomorphismen.

4.4. *Es sei* X *eine Summe der Objektmenge* $\{X_\iota : \iota \in I\}$, *es gelte* $f_\iota: X_\iota \to Y$, *und* $f: X \to Y$ *sei die nach* 4.2 *eindeutig bestimmte Summe der Morphismen* f_ι. *Für ein beliebiges* $g: \to Y$ *gilt dann:*

$g \downarrow f$ *ist gleichwertig mit* $g \downarrow f_\iota$ *für alle* $\iota \in I$.

$g \mid f$ *ist gleichwertig mit* $g \mid f_\iota$ *für alle* $\iota \in I$.

BEWEIS. Wegen $f_\iota = f \circ \beta_\iota$ erhält man $f \downarrow f_\iota$. Aus $g \downarrow f$ folgt daher $g \downarrow f_\iota$ für alle $\iota \in I$. Umgekehrt sei $g \downarrow f_\iota$ für alle $\iota \in I$ erfüllt. Aus $\varphi \circ g = \varphi' \circ g$ folgt dann $\varphi \circ f \circ \beta_\iota = \varphi \circ f_\iota = \varphi' \circ f_\iota = \varphi' \circ f \circ \beta_\iota$ für alle $\iota \in I$, wegen 4.2 also $\varphi \circ f = \varphi' \circ f$ und somit $g \downarrow f$.

Aus $g \nmid f_\varkappa$ für einen Index $\varkappa \in I$ folgt wegen $f \downarrow f_\varkappa$ auch $g \nmid f$. Umgekehrt gelte $g \nmid f$. Es gibt also ein ψ mit $g \downarrow \psi$ und $f \downarrow \psi$. Wegen der zweiten Beziehung und wegen 3.4 existieren Morphismen φ und φ^* mit $\psi \circ \varphi = f \circ \varphi^*$. Wegen der ersten Beziehung gilt auch $g \downarrow f \circ \varphi^*$. Zu φ^* gibt es nach 4a (1) einen Index $\varkappa$ mit $\beta_\varkappa \nmid \varphi^*$; d.h. es gibt ein χ mit $\varphi^* \downarrow \chi$ und $\beta_\varkappa \downarrow \chi$. Aus der ersten Beziehung folgt $f \circ \varphi^* \downarrow f \circ \chi$ und daher auch $g \downarrow f \circ \chi$. Da $\beta_\varkappa$ nach 4.1 injektiv ist, ergibt sich aus der zweiten Beziehung $\chi = \beta_\varkappa \circ \chi^*$, also $f \circ \chi = f \circ \beta_\varkappa \circ \chi^* = f_\varkappa \circ \chi^*$. Zusammen folgt hieraus $g \nmid f_\varkappa$.

Hinsichtlich der Summenbildung soll nun an die Kategorie $\mathfrak{K}$ folgende Forderung gestellt werden:

(S) *Zu jeder Objektmenge gibt es in $\mathfrak{K}$ mindestens eine Summe.*

Zu jeder Menge von Morphismen $f_\iota: X_\iota \to Y$ gibt es dann mindestens einen Summenmorphismus f, der jedoch noch von der Wahl der jeweiligen Summe der Objektmenge abhängt. Wegen 4.3 unterscheiden sich jedoch zwei Summenmorphismen immer nur um einen Isomorphismus und sind somit äquivalent. Wenn man daher außerdem die Gültigkeit von (M) voraussetzt, ist das Bild $\operatorname{Im} f$ nicht mehr von der Wahl des Summenmorphismus abhängig, sondern durch die Morphismen f_ι eindeutig bestimmt. Wegen 4.4 gilt $\operatorname{Im} f \downarrow f_\iota$ für alle ι, und aus $g \downarrow f_\iota$ für alle ι folgt $g \downarrow \operatorname{Im} f$. Daher soll $\operatorname{Im} f$ auch der Vereinigungsmorphismus der Morphismen f_ι genannt und mit $\bigvee f_\iota$ bezeichnet werden.

In $\operatorname{Hom}(.,X)$ definiert $\downarrow$ im allgemeinen keine Ordnungsrelation, weil aus $f \downarrow g$ und $g \downarrow f$ nur $f \sim g$, nicht aber $f = g$ folgt. Sind bei Voraussetzung von (M) jedoch f und g Morphismen aus J_X, so folgt aus $f \sim g$ sogar $f = g$. In J_X induziert also $\downarrow$ eine Ordnungsrelation. Für Morphismen $f, g \in J_X$ soll daher statt $f \downarrow g$ auch $g \leqq f$ geschrieben werden. Für jede Menge von Morphismen $f_\iota \in J_X$ ist dann $\bigvee f_\iota$ gerade die ordnungstheoretische Vereinigung. Erweitert man J_X noch durch ein Nullelement 0, indem man $0 \leqq f$ für jedes $f \in J_X$ definiert, so ist die so erweiterte geordnete Menge J_X^* ein vollständiger Verband: Aus der Existenz beliebiger Vereinigungen folgt nämlich bekanntlich auch die Existenz beliebiger Durchschnitte. Insbesondere ist in J_X^* die Beziehung $f \mid g$ gleichwertig mit $f \wedge g = 0$.

4.5. $\operatorname{Im}(h \circ \bigvee f_\iota) = \bigvee (h \circ f_\iota)$.

Beweis. Es gelte $f_\iota: X_\iota \to Y$, und X sei eine Summe der Objekte X_ι mit den zugehörigen Morphismen β_ι. Ist dann f die entsprechende Summe der f_ι, so gilt $\bigvee f_\iota \sim f$. Wegen $h \circ f \circ \beta_\iota = h \circ f_\iota$ für alle ι ist $h \circ f$ eine Summe der Morphismen $h \circ f_\iota$. Daher gilt weiter $h \circ f \sim \bigvee (h \circ f_\iota)$, wegen $h \circ f \sim h \circ \bigvee f_\iota$ also auch $\bigvee (h \circ f_\iota) \sim h \circ \bigvee f_\iota$. Hieraus folgt die behauptete Gleichung.

4.6. *Es gelte $f: X \to Y$. Ferner seien $g_\iota: Z_\iota \to Y$ Injektionen mit $f \nmid g_\iota$ für alle $\iota \in I$. Dann gilt*

$$f^-(\bigvee g_\iota) = \bigvee f^-(g_\iota).$$

Beweis. Wegen 4.4 gilt auch $f \nmid \bigvee g_\iota$. Neben den Urbildern $f^-(g_\iota)$ existiert daher auch $f^-(\bigvee g_\iota)$.

Es sei Z eine Summe der Objekte Z_ι mit den zugehörigen Morphismen β_ι. Ferner sei g die durch Z eindeutig bestimmte Summe der Morphismen g_ι, und k sei der zu g gehörende kanonische Epimorphismus. Es gilt also $g = \operatorname{Im} g \circ k$ und $\operatorname{Im} g = \bigvee g_\iota$. Weiter sei $u_\iota = f^-(g_\iota)$ mit $u_\iota: Z'_\iota \to X$ und Z' eine Summe der Objekte Z'_ι mit den zugehörigen Morphismen β'_ι. Schließlich sei u die durch Z' bestimmte Summe der Morphismen u_ι, und k' sei der zu u gehörende kanonische Epimorphismus. Wieder gilt $u = \operatorname{Im} u \circ k'$ und $\operatorname{Im} u = \bigvee f^-(g_\iota)$.

Wegen $u_\iota = f^-(g_\iota)$ gilt $f \circ u_\iota = g_\iota \circ u_\iota^*$. Bedeutet h die durch Z' bestimmte Summe der Morphismen $\beta_\iota \circ u_\iota^*$, so erhält man $h \circ \beta'_\iota = \beta_\iota \circ u_\iota^*$. Es folgt

$g \circ h \circ \beta_\iota' = g \circ \beta_\iota \circ u_\iota^* = g_\iota \circ u_\iota^* = f \circ u_\iota = f \circ u \circ \beta_\iota'$ für alle $\iota \in I$, wegen 4.2 also $g \circ h = f \circ u$ und weiter $\mathrm{Im}\, g \circ k \circ h = f \circ \mathrm{Im}\, u \circ k'$. Es ergibt sich $\mathrm{Im} g \downarrow f \circ \mathrm{Im} u \circ k'$ und wegen 1.3 (k' ist epimorph) auch $\mathrm{Im} g \downarrow f \circ \mathrm{Im} u$. Da $\mathrm{Im} u$ injektiv ist, folgt $f \circ \mathrm{Im} u = \mathrm{Im} g \circ f^*$.

Um zu zeigen, daß $\mathrm{Im} u$ das Urbild von $\mathrm{Im} g$ bei f ist, muß nur noch bewiesen werden, daß aus $f \circ t = \mathrm{Im} g \circ t^*$ eine Faktorisierung $t = \mathrm{Im} u \circ t'$, oder gleichwertig $\mathrm{Im} u \downarrow t$ folgt. Zu diesem Zweck werde $\varphi \circ \mathrm{Im} u = \varphi' \circ \mathrm{Im} u$, aber $\varphi \circ t \neq \varphi' \circ t$ vorausgesetzt. Wegen (T) gibt es ein ψ mit $\varphi \circ t \circ \psi | \varphi' \circ t \circ \psi$. Zu $t^* \circ \psi$ existieren Morphismen α und α^* mit $t^* \circ \psi \circ \alpha = k \circ \alpha^*$. Zu α^* gibt es weiter einen Index $\varkappa$ mit $\beta_\varkappa \nmid \alpha^*$, also ein γ mit $\alpha^* \downarrow \gamma$ und $\beta_\varkappa \downarrow \gamma$. Da $\beta_\varkappa$ nach 4.1 injektiv ist, folgt $\gamma = \beta_\varkappa \circ \gamma^*$. Wegen 3.2 gilt auch $\mathrm{Im}\, \alpha^* \downarrow \gamma$ und daher ($\mathrm{Im}\, \alpha^*$ ist injektiv) $\gamma = \mathrm{Im}\, \alpha^* \circ \gamma'$. Bedeutet k^* den zu α^* gehörenden kanonischen Epimorphismus, so gibt es Morphismen δ und δ^* mit $\gamma' \circ \delta = k^* \circ \delta^*$. Es folgt

$$\alpha^* \circ \delta^* = \mathrm{Im}\, \alpha^* \circ k^* \circ \delta^* = \mathrm{Im}\, \alpha^* \circ \gamma' \circ \delta = \gamma \circ \delta$$

und weiter

$$g_\varkappa \circ \gamma^* \circ \delta = g \circ \beta_\varkappa \circ \gamma^* \circ \delta = g \circ \gamma \circ \delta = g \circ \alpha^* \circ \delta^* = \mathrm{Im}\, g \circ k \circ \alpha^* \circ \delta^*$$
$$= \mathrm{Im}\, g \circ t^* \circ \psi \circ \alpha \circ \delta^* = f \circ t \circ \psi \circ \alpha \circ \delta^*.$$

Wegen $u_\varkappa = f^-(g_\varkappa)$ ergibt sich hieraus $t \circ \psi \circ \alpha \circ \delta^* = u_\varkappa \circ \zeta = \mathrm{Im} u \circ k' \circ \beta_\varkappa' \circ \zeta$. Nun gilt aber $\varphi \circ \mathrm{Im} u = \varphi' \circ \mathrm{Im} u$, wegen der letzten Gleichung also auch $\varphi \circ t \circ \psi \circ \alpha \circ \delta^* = \varphi' \circ t \circ \psi \circ \alpha \circ \delta^*$. Dies ist ein Widerspruch zu $\varphi \circ t \circ \psi | \varphi' \circ t \circ \psi$.

DEFINITION 4b. *Ein Objekt Y soll ein Produkt der Objektmenge $\{Y_\iota : \iota \in I\}$ genannt werden, wenn es Morphismen $\pi_\iota : Y \to Y_\iota$ mit folgender Eigenschaft gibt:*

Zu Morphismen $f_\iota : X \to Y_\iota$ gibt es genau ein $f : X \to Y$ mit $f_\iota = \pi_\iota \circ f$ für alle $\iota \in I$.

Der in dieser Definition auftretende Morphismus f soll ein *Produkt* der Morphismen f_ι genannt werden. Da er definitionsgemäß durch das Produkt Y eindeutig bestimmt ist, ergibt sich ebenso wie im Beweis von 4.3, daß je zwei Produkte einer Objektmenge isomorph sind. Entsprechend ergibt sich durch Dualisierung des Beweises von 4.1 unmittelbar:

4.7. *Die Morphismen π_ι aus* 4b *sind surjektiv.*

Statt der Eigenschaft (S) soll nun von der Kategorie $\mathfrak{K}$ die folgende, im wesentlichen duale Eigenschaft gefordert werden:

(P) *Zu jeder Objektmenge existiert in $\mathfrak{K}$ mindestens ein Produkt.*

Die folgenden Betrachtungen zeigen, daß auch mit Hilfe dieser Eigenschaft die Existenz von beliebigen Durchschnitten und Vereinigungen nachgewiesen werden kann.

4.8. *Zu den Injektionen $f_\iota : X_\iota \to Y$ ($\iota \in I$) existiere ein ψ mit $f_\iota \downarrow \psi$ für alle $\iota \in I$. Dann gibt es eine Injektion $d : \to Y$ mit folgenden Eigenschaften, durch die sie bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist:*

(a) *$f_\iota \downarrow d$ für alle $\iota \in I$.*

(b) *Aus $f_\iota \downarrow g$ für alle $\iota \in I$ folgt $d \downarrow g$.*

BEWEIS. Es gelte $Z_\iota = Y$ für alle Indizes $\iota \in I$, und Y^* sei ein Produkt der Objektmenge $\{Z_\iota : \iota \in I\}$ mit den zugehörigen Morphismen π_ι^*. Dann gibt es genau ein $h: Y \to Y^*$ mit $\pi_\iota^* \circ h = j$ für alle ι. Wegen 1.2 ist h außerdem ein Monomorphismus. Weiter sei X ein Produkt der Objektmenge $\{X_\iota : \iota \in I\}$ mit den zugehörigen Morphismen π_ι. Dann gibt es genau ein $f: X \to Y^*$ mit $f_\iota \circ \pi_\iota = \pi_\iota^* \circ f$ für alle ι. Da die f_ι injektiv sind, folgt aus $f_\iota \downarrow \psi$ eine Faktorisierung $\psi = f_\iota \circ \psi_\iota^*$. Zu den Morphismen ψ_ι^* gibt es genau ein $\psi^*: \to X$ mit $\psi_\iota^* = \pi_\iota \circ \psi^*$ für alle ι. Man erhält $\pi_\iota^* \circ f \circ \psi^* = f_\iota \circ \pi_\iota \circ \psi^* = f_\iota \circ \psi_\iota^* = \psi = j \circ \psi = \pi_\iota^* \circ h \circ \psi$ für alle ι und daher $f \circ \psi^* = h \circ \psi$. Es folgt $f \downarrow f \circ \psi^*$ und $h \downarrow f \circ \psi^*$, also $f \nmid h$. Daher existiert ein Urbild u von h bei f, und es gilt $f \circ u = h \circ d$ mit einem geeigneten Morphismus d. Wegen $\pi_\iota^* \circ h = j$ ergibt sich außerdem $d = \pi_\iota^* \circ h \circ d = \pi_\iota^* \circ f \circ u$ bei beliebiger Wahl des Index ι. Wegen $\pi_\iota^* \circ f = f_\iota \circ \pi_\iota$ gilt $d = f_\iota \circ \pi_\iota \circ u$ und daher $f_\iota \downarrow d$ für alle $\iota \in I$; d.h. es gilt (a).

Es werde jetzt $f \circ \varphi = f \circ \varphi'$ vorausgesetzt. Für jeden Index ι gilt dann $f_\iota \circ \pi_\iota \circ \varphi = \pi_\iota^* \circ f \circ \varphi = \pi_\iota^* \circ f \circ \varphi' = f_\iota \circ \pi_\iota \circ \varphi'$ und weiter auch $\pi_\iota \circ \varphi = \pi_\iota \circ \varphi'$, weil f_ι als Injektion monomorph ist. Da dies für jeden Index ι gilt, folgt $\varphi = \varphi'$; d.h. f ist monomorph. Da auch u als Urbild und h monomorph sind, muß wegen $h \circ d = f \circ u$ ebenfalls $h \circ d$ und weiter d monomorph sein. Wenn nun $f_\iota \downarrow g$ für alle $\iota \in I$ erfüllt ist (wegen (a) folgt dies speziell aus $d \downarrow g$), erhält man in derselben Weise wie oben eine Faktorisierung $h \circ g = f \circ g^*$. Daher gestattet g^* eine Faktorisierung $g^* = u \circ g'$, und bei beliebiger Wahl von ι erhält man $g = \pi_\iota^* \circ h \circ g = \pi_\iota^* \circ f \circ g^* = \pi_\iota^* \circ f \circ u \circ g' = d \circ g'$. Hieraus folgt einerseits $d \downarrow g$, also Eigenschaft (b). Andererseits folgt aber auch, daß d injektiv ist.

Daß in dem letzten Satz die Morphismen f_ι als Injektionen vorausgesetzt wurden, bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit: Sind nämlich die Morphismen f_ι beliebig, so ersetze man sie durch ihre Bilder $\operatorname{Im} f_\iota$. Auf diese ist dann der Satz anwendbar, und die resultierende Injektion d besitzt wegen $f_\iota \sim \operatorname{Im} f_\iota$ (3.2) die Eigenschaften (a) und (b) auch hinsichtlich der Morphismen f_ι.

Bei dem letzten Schluß wurde die Eigenschaft (M) noch nicht benutzt, weil man statt der ausgezeichneten Bilder $\operatorname{Im} f_\iota$ natürlich auch irgendwelche anderen Bilder der f_ι benutzen kann. Setzt man jetzt jedoch die Gültigkeit von (M) voraus, so besitzt auch $\operatorname{Im} d$ die Eigenschaften (a) und (b). Es soll daher $\operatorname{Im} d$ der Durchschnitt der Morphismen f_ι genannt und mit $\wedge f_\iota$ bezeichnet werden. Ebenso wie vorher ergibt sich, daß in der geordneten Menge J_Y^* der Morphismus $\wedge f_\iota$ gerade der ordnungstheoretische Durchschnitt ist und daß J_Y^* daher ein vollständiger Verband ist. Hinsichtlich der Verbandsstruktur von J_Y^* sind also die Forderungen (S) und (P) gleichberechtigt.

Setzt man statt (P) wieder (S), aber nicht (M) voraus, so kann die Existenz von d in 4.8 nicht gefolgert werden: Hierzu müßte man nämlich die Summe aller Morphismen g bilden können, die die Eigenschaft $f_\iota \downarrow g$ für alle Indizes ι besitzen. Diese Morphismen bilden aber im allgemeinen keine Menge. Die Summenbildung war jedoch nur für Mengen von Morphismen definiert.

4.9. *Aus $\wedge g_\iota \nmid f$ folgt $f^-(\wedge g_\iota) = \wedge f^-(g_\iota)$. Hierbei seien die Morphismen g_ι Injektionen.*

BEWEIS. Es werde $d=\wedge g_\iota$, $u_\iota=f^-(g_\iota)$ und $\delta=\wedge u_\iota$ gesetzt. Es gilt $f\circ u_\iota=g_\iota\circ u_\iota^*$. Da u_ι injektiv ist, erhält man wegen $u_\iota\downarrow\delta$ außerdem $\delta=u_\iota\circ\delta_\iota^*$ und somit $f\circ\delta=f\circ u_\iota\circ\delta_\iota^*=g_\iota\circ u_\iota^*\circ\delta_\iota^*$. Es folgt $g_\iota\downarrow f\circ\delta$ für alle Indizes ι, also auch $d\downarrow f\circ\delta$. Da d injektiv ist, ergibt sich schließlich $f\circ\delta=d\circ\delta^*$.

Zum Nachweis der zweiten Eigenschaft des Urbildes werde $f\circ h=d\circ h^*$ vorausgesetzt. Da die Morphismen g_ι injektiv sind, folgt wegen $g_\iota\downarrow d$ auch $d=g_\iota\circ d_\iota^*$ und somit $f\circ h=d\circ h^*=g_\iota\circ d_\iota^*\circ h^*$. Hieraus folgt weiter $h=u_\iota\circ h_\iota'$, also $u_\iota\downarrow h$ für alle Indizes ι, und somit $\delta\downarrow h$. Da δ injektiv ist, ergibt sich schließlich $h=\delta\circ h''$. Daher ist δ das Urbild von d bei f.

Die Existenz der Durchschnitte je endlich vieler Morphismen aus J_X kann auch ohne Voraussetzung von (S) oder (P) nachgewiesen werden:

4.10. *Es gelte $f, g\in J_X$ und $f\nmid g$. Dann ist $d=f\circ f^-(g)$ eine Injektion, und es gilt*

$$\mathrm{Im}\,(f\circ f^-(g))=f\wedge g=\mathrm{Im}\,(g\circ g^-(f)).$$

BEWEIS. Aus $d=f\circ f^-(g)$ folgt $f\downarrow d$, und wegen $f\circ f^-(g)=g\circ u^*$ erhält man auch $g\downarrow d$. Aus $f\downarrow h$ und $g\downarrow h$ folgt, weil f und g Injektionen sind, $h=f\circ h'=g\circ h''$ und weiter $h'=f^-(g)\circ h^*$. Daher gilt $h=f\circ f^-(g)\circ h^*=d\circ h^*$ und somit $d\downarrow h$. Aus beiden Ergebnissen zusammen folgt $\mathrm{Im}\,(f\circ f^-(g))=f\wedge g$. Wegen der Symmetrie der Voraussetzungen können hier noch die Rollen von f und g vertauscht werden. Mit f und $f^-(g)$ ist nach 1.1 auch d ein Monomorphismus. Aus $d\downarrow h$ folgt $f\downarrow h$ und $g\downarrow h$ und ebenso wie vorher $h=d\circ h^*$. Daher ist d sogar injektiv.

Setzt man von der Kategorie $\mathfrak{K}$ neben den Eigenschaften (T), (M), (B) und (U) lediglich noch voraus, daß (S) für endliche Objektmengen gilt, daß also in J_X die Vereinigung je endlich vieler Morphismen existiert, so ist wegen des letzten Satzes auch dann J_X^* ein Verband (allerdings kein vollständiger Verband). Der nächste Satz zeigt, daß dieser Verband sogar distributiv ist.

4.11. *Für die Morphismen $f_1, f_2, g\in J_X$ gelte $g\wedge f_1\neq 0$ und $g\wedge f_2\neq 0$. Dann folgt*

$$g\wedge(f_1\vee f_2)=(g\wedge f_1)\vee(g\wedge f_2).$$

BEWEIS. Es muß nur $(g\wedge f_1)\vee(g\wedge f_2)\downarrow g\wedge(f_1\vee f_2)$ bewiesen werden.

Zur Abkürzung werde $f_1\vee f_2=u$, $g\wedge u=d$, $g\wedge f_1=v_1$, $g\wedge f_2=v_2$ und $v_1\vee v_2=v$ gesetzt. Es muß also $v\downarrow d$ bewiesen, oder gleichwertig die Annahme $\varphi\circ v=\varphi'\circ v$ und $\varphi\circ d\neq\varphi'\circ d$ widerlegt werden. Wegen (T) gibt ein ψ mit $\varphi\circ d\circ\psi\,|\,\varphi'\circ d\circ\psi$. Wegen $d=g\wedge u$ gilt $d=g\circ d'=u\circ d''$. Es sei nun s eine Summe von f_1 und f_2. Man erhält $u=\mathrm{Im}\,s$, und es gibt Morphismen χ und χ^* mit $u\circ d''\circ\psi\circ\chi=s\circ\chi^*$. Für mindestens einen der beiden zu der Summe gehörenden Morphismen β_1, β_2 — etwa für β_1 — gilt $\beta_1\nmid\chi^*$. Es existieren daher weiter Morphismen μ und μ^* mit $\chi^*\circ\mu=\beta_1\circ\mu^*$. Mit $\psi\circ\chi\circ\mu=\omega$ folgt jetzt $d\circ\omega=g\circ d'\circ\omega$ und

$$d\circ\omega=u\circ d''\circ\omega=s\circ\chi^*\circ\mu=s\circ\beta_1\circ\mu^*=f_1\circ\mu^*,$$

also $g\downarrow d\circ\omega$ und $f_1\downarrow d\circ\omega$. Hieraus ergibt sich weiter $v_1\downarrow d\circ\omega$ und erst recht $v\downarrow d\circ\omega$. Wegen $\varphi\circ v=\varphi'\circ v$ müßte auch $\varphi\circ d\circ\omega=\varphi'\circ d\circ\omega$ gelten, was $\varphi\circ d\circ\psi\,|\,\varphi'\circ d\circ\psi$ widerspricht.

§ 5. T_1-Kategorien

In diesem Paragraphen bedeute $\mathfrak{K}$ eine Kategorie, die neben den Eigenschaften (T), (M), (B) und (U) noch eine der Eigenschaften (S) oder (P) erfüllt, oder zumindest (S) für endliche Objektmengen. In jedem Fall sind dann die Mengen J_X^* hinsichtlich $\downarrow$ als Ordnungsrelation distributive Verbände.

DEFINITION 5a. *Eine nicht-leere Teilmenge $\mathfrak{a}$ von J_X soll ein P-Filter genannt werden, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:*

(1) *Aus $f\in\mathfrak{a}$, $g\in J_X$ und $f\leqq g$ folgt $g\in\mathfrak{a}$.*

(2) *Aus $f, g\in\mathfrak{a}$ folgt $f\wedge g\in\mathfrak{a}$.*

(3) *Aus $f, g\in J_X$ und $f\vee g\in\mathfrak{a}$ folgt $f\in\mathfrak{a}$ oder $g\in\mathfrak{a}$.*

Die Eigenschaften (1) und (2) kennzeichnen $\mathfrak{a}$ als Filter von J_X^*. Wegen $\mathfrak{a}\subsetneqq J_X$ gilt $0\notin\mathfrak{a}$ und für $f, g\in\mathfrak{a}$ wegen (2) insbesondere $f\wedge g\neq 0$.

5.1. *Zu jedem $h\in J_X$ gibt es einen P-Filter $\mathfrak{a}$ mit $h\in\mathfrak{a}$.*

BEWEIS. Mit Hilfe des Zornschen Lemmas folgt unmittelbar die Existenz einer maximalen Teilmenge $\mathfrak{a}$ von J_X mit $h\in\mathfrak{a}$ und mit den Eigenschaften (1) und (2) aus 5a. ($\mathfrak{a}$ ist ein Ultrafilter des Verbandes J_X^*.) Es gelte nun $f\vee g\in\mathfrak{a}$ mit $f, g\in J_X$, aber $f\notin\mathfrak{a}$ und $g\notin\mathfrak{a}$. Aus $f\wedge f^*\neq 0$ für alle $f^*\in\mathfrak{a}$ würde wegen der Maximalität von $\mathfrak{a}$ auch $f\in\mathfrak{a}$ folgen. Daher gibt es ein $f^*\in\mathfrak{a}$ mit $f\wedge f^*=0$. Ebenso existiert ein $g^*\in\mathfrak{a}$ mit $g\wedge g^*=0$. Setzt man $d^*=f^*\wedge g^*$, so gilt wegen (2) auch $d^*\in\mathfrak{a}$ und nach 4.11 außerdem $d^*\wedge(f\vee g)=(d^*\wedge f)\vee(d^*\wedge g)=0$ im Widerspruch zu $f\vee g\in\mathfrak{a}$.

Aus diesem Beweis folgt noch, daß allgemein jeder Ultrafilter des Verbandes J_X^* ein P-Filter ist. Umgekehrt braucht aber ein P-Filter kein Ultrafilter zu sein, weil J_X^* im allgemeinen kein komplementärer Verband ist.

5.2. *Es sei $p\colon\to X$ ein punktaler Morphismus. Dann ist*

$$\mathfrak{a}=\{f\colon f\in J_X,\ f\downarrow p\}$$

ein P-Filter.

BEWEIS. Wegen $\mathrm{Im}\,p\in J_X$ gibt es nach 5.1 einen P-Filter $\mathfrak{b}$ mit $\mathrm{Im}\,p\in\mathfrak{b}$. Aus $f\in\mathfrak{a}$, also $f\downarrow p$, folgt wegen 3.2 auch $f\geqq\mathrm{Im}\,p$ und somit $f\in\mathfrak{b}$. Umgekehrt gelte $f\in\mathfrak{b}$. Wegen $\mathrm{Im}\,p\in\mathfrak{b}$ ist dann $d=f\wedge\mathrm{Im}\,p$ ein Morphismus aus $\mathfrak{b}$. Da nach 3.5 auch $\mathrm{Im}\,p$ ein punktaler Morphismus ist, gilt wegen $\mathrm{Im}\,p\downarrow d$ und wegen 2.2 umgekehrt $d\downarrow\mathrm{Im}\,p$, erst recht also $f\downarrow\mathrm{Im}\,p$. Wegen 3.2 ergibt sich $f\downarrow p$, also $f\in\mathfrak{a}$. Daher gilt $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, und $\mathfrak{a}$ selbst ist ein P-Filter.

5.3. *Es gelte $h\colon X\to Y$, und $\mathfrak{a}\subsetneqq J_X$ sei ein P-Filter. Dann ist auch*

$$\mathfrak{a}_h=\{f'\colon f'\in J_Y,\ f'\nmid h,\ h^-(f')\in\mathfrak{a}\}$$

ein P-Filter in J_Y.

BEWEIS. Aus $f'\in\mathfrak{a}_h$ und $f'\leqq g'$ folgt wegen 3.8 auch $g'\nmid h$ und $h^-(f')\leqq h^-(g')$. Wegen $h^-(f')\in\mathfrak{a}$ erhält man $h^-(g')\in\mathfrak{a}$, also $g'\in\mathfrak{a}_h$. Zweitens gelte $f', g'\in\mathfrak{a}_h$. Wegen 4.9 folgt dann $h^-(f'\wedge g')=h^-(f')\wedge h^-(g')\in\mathfrak{a}$ und daher $f'\wedge g'\in\mathfrak{a}_h$. Schließlich werde $f', g'\in J_Y$ und $f'\vee g'\in\mathfrak{a}_h$ vorausgesetzt. Wegen 4.6 erhält man dann $h^-(f')\vee h^-(g')=h^-(f'\vee g')\in\mathfrak{a}$. Es folgt $h^-(f')\in\mathfrak{a}$ oder $h^-(g')\in\mathfrak{a}$, also $f'\in\mathfrak{a}_h$ oder $g'\in\mathfrak{a}_h$.

Es bezeichne jetzt $\tilde{X}$ die Menge aller P-Filter von J_X. (Da J_X eine Menge ist, muß auch $\tilde{X}$ als Teilmenge der Potenzmenge von J_X eine Menge sein.) Nach dem letzten Satz bestimmt dann jeder Morphismus $h: X \to Y$ eindeutig die durch $\tilde{h}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}_h$ definierte Abbildung $\tilde{h}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$. Wegen 3.7 gilt offenbar $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$.

5.4. *Aus $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ und $f \neq g$ folgt $\tilde{f} \neq \tilde{g}$.*

BEWEIS. Wegen (T) gibt es ein φ mit $f \circ \varphi \mid g \circ \varphi$. Nach 5.1 existiert weiter ein P-Filter $\mathfrak{a} \in \tilde{X}$ mit $\mathrm{Im}\varphi \in \mathfrak{a}$. Wegen $f^-(\mathrm{Im}(f \circ \varphi)) \supseteq \mathrm{Im}\varphi$ erhält man $f^-(\mathrm{Im}(f \circ \varphi)) \in \mathfrak{a}$, also $\mathrm{Im}(f \circ \varphi) \in \tilde{f}(\mathfrak{a})$. Ebenso ergibt sich $\mathrm{Im}(g \circ \varphi) \in \tilde{g}(\mathfrak{a})$. Da aber wegen $f \circ \varphi \mid g \circ \varphi$ auch $\mathrm{Im}(f \circ \varphi) \wedge \mathrm{Im}(g \circ \varphi) = 0$ gilt, kann $\mathrm{Im}(g \circ \varphi)$ nicht in $\tilde{f}(\mathfrak{a})$ liegen. Es folgt $\tilde{f}(\mathfrak{a}) \neq \tilde{g}(\mathfrak{a})$, also $\tilde{f} \neq \tilde{g}$.

Die neuen Objekte $\tilde{X}$ und die Mengen $\mathrm{Hom}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \{\tilde{f}: f \in \mathrm{Hom}(X, Y)\}$ bilden hinsichtlich der Hintereinanderschaltung der Abbildungen als Komposition eine Kategorie $\tilde{\mathfrak{K}}$. Diese ist zu $\mathfrak{K}$ isomorph, weil wegen 5.4 durch $\Phi(X) = \tilde{X}$ und $\Phi(f) = \tilde{f}$ ein eineindeutiger Funktor Φ von $\mathfrak{K}$ auf $\tilde{\mathfrak{K}}$ definiert wird.

Da jeder Morphismus $\tilde{h}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$ aus $\tilde{\mathfrak{K}}$ eine Abbildung ist, ist seine Bildmenge $\tilde{h}(\tilde{X})$ definiert. Sie soll nachfolgend mit $\mathrm{Bd}\tilde{h}$ bezeichnet werden.

5.5. *$\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}\tilde{h}$ ist gleichwertig mit $\mathrm{Im}h \in \mathfrak{a}$.*

BEWEIS. Es gelte $h: X \to Y$. Aus $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}\tilde{h}$ folgt die Existenz eines P-Filters $\mathfrak{b} \in \tilde{X}$ mit $\tilde{h}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$. Wegen $j_X \in \mathfrak{b}$ und $j_X = h^-(\mathrm{Im}h)$ erhält man (vgl. 5.3) $\mathrm{Im}h \in \mathfrak{a}$. Umgekehrt werde jetzt $\mathrm{Im}h \in \mathfrak{a}$ vorausgesetzt. Dann gilt $h \nmid f$ für alle $f \in \mathfrak{a}$, und $\{h^-(f): f \in \mathfrak{a}\}$ ist Basis eines Filters $\mathfrak{b}$ des Verbandes J_X^*. Ein einfacher Wohlordnungsschluß liefert die Existenz eines Filters $\mathfrak{c}$ in J_X mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{c}$.

(b) Aus $f' \in \mathfrak{c}$ folgt $\mathrm{Im}(h \circ f') \in \mathfrak{a}$.

(c) Aus $g' \in J_X$ und $\mathrm{Im}(h \circ (f' \wedge g')) \in \mathfrak{a}$ für alle $f' \in \mathfrak{c}$ folgt $g' \in \mathfrak{c}$.

Um zu zeigen, daß $\mathfrak{c}$ sogar ein P-Filter ist, werde weiter $g_1' \vee g_2' \in \mathfrak{c}$ vorausgesetzt. Dann gilt $f' \wedge (g_1' \vee g_2') \in \mathfrak{c}$ und wegen 4.11 auch $(f' \wedge g_1') \vee (f' \wedge g_2') \in \mathfrak{c}$ für alle $f' \in \mathfrak{c}$. Wegen (b) und 4.5 folgt weiter $[h \circ (f' \wedge g_1')] \vee [h \circ (f' \wedge g_2')] \in \mathfrak{a}$ und daher $\mathrm{Im}(h \circ (f' \wedge g_1')) \in \mathfrak{a}$ oder $\mathrm{Im}(h \circ (f' \wedge g_2')) \in \mathfrak{a}$ für alle $f' \in \mathfrak{c}$. Nimmt man $\mathrm{Im}(h \circ (f_1' \wedge g_1')) \notin \mathfrak{a}$ und $\mathrm{Im}(h \circ (f_2' \wedge g_2')) \notin \mathfrak{a}$ mit geeigneten Morphismen $f_1', f_2' \in \mathfrak{c}$ an und setzt $f' = f_1' \wedge f_2'$, so gilt $f' \in \mathfrak{c}$ und nach dem soeben Bewiesenen $\mathrm{Im}(h \circ (f' \wedge g_1')) \in \mathfrak{a}$ oder $\mathrm{Im}(h \circ (f' \wedge g_2')) \in \mathfrak{a}$, im Widerspruch zur Annahme also auch $\mathrm{Im}(h \circ (f_1' \wedge g_1')) \in \mathfrak{a}$ oder $\mathrm{Im}(h \circ (f_2' \wedge g_2')) \in \mathfrak{a}$. Daher folgt sogar $\mathrm{Im}(h \circ (f' \wedge g_1')) \in \mathfrak{a}$ für alle $f' \in \mathfrak{c}$ oder $\mathrm{Im}(h \circ (f' \wedge g_2')) \in \mathfrak{a}$ für alle $f' \in \mathfrak{c}$. Somit ist $\mathfrak{c}$ ein P-Filter. Unmittelbar erhält man $\tilde{h}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}$ und daher $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}\tilde{h}$.

5.6. *In $\tilde{\mathfrak{K}}$ ist $\tilde{f} \downarrow \tilde{g}$ gleichwertig mit $\mathrm{Bd}\tilde{g} \subseteq \mathrm{Bd}\tilde{f}$.*

BEWEIS. Aus $\mathrm{Bd}\tilde{g} \subseteq \mathrm{Bd}\tilde{f}$ und der Definition von $\downarrow$ folgt unmittelbar $\tilde{f} \downarrow \tilde{g}$. Weiter werde angenommen, daß $\tilde{f} \downarrow \tilde{g}$ gilt, aber $\mathrm{Bd}\tilde{g} \subseteq \mathrm{Bd}\tilde{f}$ nicht erfüllt ist.

Dann gibt es einen P-Filter $\mathfrak{a}$ mit $\tilde{g}(\mathfrak{a}) \notin \mathrm{Bd}\tilde{f}$. Wegen 5.5 folgt $\mathrm{Im}f \notin \tilde{g}(\mathfrak{a})$ und $\mathrm{Im}g \in \tilde{g}(\mathfrak{a})$. Da $\mathfrak{R}$ und $\tilde{\mathfrak{R}}$ isomorph sind, folgt aus $\tilde{f} \downarrow \tilde{g}$ auch $f \downarrow g$ und nach 3.2 weiter $\mathrm{Im}f \downarrow \mathrm{Im}g$. Wegen $\mathrm{Im}g \in \tilde{g}(\mathfrak{a})$ ergibt sich hieraus der Widerspruch $\mathrm{Im}f \in \tilde{g}(\mathfrak{a})$.

5.7. $\mathrm{Bd}(\mathrm{Im}\tilde{f}) = \mathrm{Bd}\tilde{f}$.

Beweis. Wegen der Isomorphie von $\mathfrak{R}$ und $\tilde{\mathfrak{R}}$ gilt $\mathrm{Im}\tilde{f} = \widetilde{\mathrm{Im}f}$. Aus $\mathrm{Im}(\mathrm{Im}f) = \mathrm{Im}f$ und 5.5 folgt daher unmittelbar die Behauptung.

5.8. *Für $f, g \in J_X$ mit $f \wedge g \neq 0$ gilt*

$$\mathrm{Bd}(\tilde{f} \wedge \tilde{g}) = (\mathrm{Bd}\tilde{f}) \cap (\mathrm{Bd}\tilde{g}) \quad \textit{und} \quad \mathrm{Bd}(\tilde{f} \vee \tilde{g}) = (\mathrm{Bd}\tilde{f}) \cup (\mathrm{Bd}\tilde{g}).$$

Beweis. Wegen 5.6 ergibt sich unmittelbar $\mathrm{Bd}(\tilde{f} \wedge \tilde{g}) \subseteq (\mathrm{Bd}\tilde{f}) \cap (\mathrm{Bd}\tilde{g})$ und $\mathrm{Bd}(\tilde{f} \vee \tilde{g}) \supseteq (\mathrm{Bd}\tilde{f}) \cup (\mathrm{Bd}\tilde{g})$. Weiter gelte $\mathfrak{a} \in (\mathrm{Bd}\tilde{f}) \cap (\mathrm{Bd}\tilde{g})$. Wegen $f, g \in J_X$ gilt $f = \mathrm{Im}f$, $g = \mathrm{Im}g$ usw. Wegen 5.5 folgt daher $f \in \mathfrak{a}$ und $g \in \mathfrak{a}$, also auch $f \wedge g \in \mathfrak{a}$ und somit ($\mathfrak{R}$ und $\tilde{\mathfrak{R}}$ sind isomorph) $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}(\tilde{f} \wedge \tilde{g})$. Entsprechend folgt aus $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}(\tilde{f} \vee \tilde{g})$ zunächst $f \vee g \in \mathfrak{a}$, also ($\mathfrak{a}$ ist ein P-Filter) $f \in \mathfrak{a}$ oder $g \in \mathfrak{a}$ und daher $\mathfrak{a} \in (\mathrm{Bd}\tilde{f}) \cup (\mathrm{Bd}\tilde{g})$.

Da ein Morphismus $\tilde{h}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$ von $\tilde{\mathfrak{R}}$ gleichzeitig eine Abbildung ist, existiert zu jeder Teilmenge $\tilde{M}$ von $\tilde{Y}$ die Urbildmenge hinsichtlich $\tilde{h}$. Zur Unterscheidung von dem Urbild-Morphismus soll sie mit $\tilde{h}^{=}(\tilde{M})$ bezeichnet werden. Es ist also $\tilde{h}^{=}(\tilde{M})$ die Menge aller $\mathfrak{a} \in \tilde{X}$ mit $\tilde{h}(\mathfrak{a}) \in \tilde{M}$.

5.9. *Für jedes $h: X \to Y$ und jede Injektion $f: \to Y$ mit $h \nmid f$ gilt*

$$\tilde{h}^{=}(\mathrm{Bd}\tilde{f}) = \mathrm{Bd}(\tilde{h}^{-}(\tilde{f})).$$

Beweis. Es gelte $u = h^{-}(f)$, wegen der Isomorphie von $\mathfrak{R}$ und $\tilde{\mathfrak{R}}$ also auch $\tilde{u} = \tilde{h}^{-}(\tilde{f})$. Aus $\mathfrak{a} \in \tilde{h}^{=}(\mathrm{Bd}\tilde{f})$ folgt $\tilde{h}(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Bd}\tilde{f}$ und wegen 5.5 auch $\mathrm{Im}f \in \tilde{h}(\mathfrak{a})$. Hieraus ergibt sich wegen $h^{-}(\mathrm{Im}f) = \mathrm{Im}(h^{-}(f)) = \mathrm{Im}u$ weiter $\mathrm{Im}u \in \mathfrak{a}$. Wieder wegen 5.5 erhält man $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}\tilde{u}$, also $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}(\tilde{h}^{-}(\tilde{f}))$. Umgekehrt werde $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}(\tilde{h}^{-}(\tilde{f})) = \mathrm{Bd}\tilde{u}$ vorausgesetzt. Es folgt $h^{-}(\mathrm{Im}f) = u = \mathrm{Im}u \in \mathfrak{a}$ und somit $\mathrm{Im}f \in \tilde{h}(\mathfrak{a})$, also $\tilde{h}(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Bd}\tilde{f}$ und $\mathfrak{a} \in \tilde{h}^{=}(\mathrm{Bd}\tilde{f})$.

Ebenso wie in §2 ergibt sich auch hier: Zu den Objekten $\tilde{X}$ von $\tilde{\mathfrak{R}}$ gibt es eindeutig bestimmte T_1-Topologien $\tilde{\tau}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) Jede Abbildung aus $\mathrm{Hom}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ ist hinsichtlich der Topologien $\tilde{\tau}$ stetig.

(b) Sind den Objekten aus $\tilde{\mathfrak{R}}$ Topologien τ' zugeordnet, hinsichtlich derer die Morphismen aus $\tilde{\mathfrak{R}}$ ebenfalls stetige Abbildungen sind, so sind die Topologien τ' mindestens so fein wie die Topologien $\tilde{\tau}$; d.h. jede $\tilde{\tau}$-abgeschlossene Menge ist auch τ'-abgeschlossen.

Jede Kategorie $\mathfrak{R}$ der in diesem Paragraphen vorausgesetzten Art bestimmt hiernach eindeutig eine T_1-Kategorie $(\tilde{\mathfrak{R}}, \tilde{\tau})$.

Neben der Kategorie $\mathfrak{K}$ sei jetzt weiterhin eine T_1-Kategorie $(\mathfrak{K}', \tau')$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

(α) Als Kategorie ist $\mathfrak{K}'$ zu $\mathfrak{K}$ isomorph; d.h. es gibt einen eineindeutigen Funktor Φ' von $\mathfrak{K}'$ auf $\mathfrak{K}$.

(β) In $\mathfrak{K}'$ gelte

$$\mathrm{Bd}(f' \wedge g') = (\mathrm{Bd}\, f') \cap (\mathrm{Bd}\, g'), \qquad \mathrm{Bd}(f' \vee g') = (\mathrm{Bd}\, f') \cup (\mathrm{Bd}\, g'),$$
$$\mathrm{Bd}(\mathrm{Im}\, f') = \mathrm{Bd}\, f' \quad \text{und} \quad h'^{-}(\mathrm{Bd}\, f') = \mathrm{Bd}\,(h'^{-}(f')).$$

(γ) Zu je zwei verschiedenen Punkten x_1', x_2' eines Objekts X' existiere ein Morphismus $f'\colon \to X'$ mit $x_1' \notin \mathrm{Bd}\, f'$ und $x_2' \notin \mathrm{Bd}\, f'$ (bzw. umgekehrt).

Wegen der in (α) geforderten Isomorphie besitzt auch $\mathfrak{K}'$ die Eigenschaften, die am Anfang des Paragraphen von $\mathfrak{K}$ gefordert wurden. Insbesondere kann also jedem Objekt X' wieder eine Menge $J_{X'}'$ zugeordnet werden; und diese Zuordnung kann so getroffen werden, daß $\Phi'(J_{X'}') = J_{\Phi'(X')}$ gilt. Die in (β) enthaltenen Forderungen sind z.B. dann erfüllt, wenn $(\mathfrak{K}', \tau')$ die durch Bildmengen und deren Vereinigungen, Durchschnitte und Urbildmengen bestimmten Unterräume als Objekte, sowie die zugehörigen natürlichen Homöomorphismen als Injektionen enthält. Oder aber man setzt den Eigenschaften (S) oder (P) entsprechend voraus, daß $(\mathfrak{K}', \tau')$ mit einer Objektmenge auch den topologischen Summenraum bzw. den topologischen Produktraum als Objekt und die zugehörigen natürlichen Abbildungen als Morphismen enthält.

Der nach (α) existierende Funktor Φ' ordnet jedem Objekt X' von $\mathfrak{K}'$ ein Objekt $X = \Phi'(X')$ von $\mathfrak{K}$ zu; und diesem entspricht wieder eineindeutig ein Objekt $\tilde{X}$ von $\tilde{\mathfrak{K}}$. Ebenso ist jedem Morphismus f' von $\mathfrak{K}'$ ein Morphismus $f = \Phi'(f')$ von $\mathfrak{K}$ und diesem wieder der Morphismus $\tilde{f}$ von $\tilde{\mathfrak{K}}$ zugeordnet. Nachstehend werden immer die sich so entsprechenden Objekte bzw. Morphismen mit demselben Buchstaben bezeichnet.

5.10. *Zu jedem Objekt X' von $\mathfrak{K}'$ gibt es genau eine $1-1$-Abbildung $\vartheta_X\colon X' \to \tilde{X}$ mit folgenden Eigenschaften: Für jeden Morphismus $h'\colon X' \to Y'$ gilt*

$$\vartheta_Y \circ h' = \tilde{h} \circ \vartheta_X \quad \textit{und} \quad \vartheta_Y(\mathrm{Bd}\, h') = (\mathrm{Bd}\, \vartheta_Y) \cap (\mathrm{Bd}\, \tilde{h}).$$

Es ist ϑ_X eine stetige Abbildung von (X', τ') in (X, τ).

BEWEIS. Es sei x' ein beliebiger Punkt von X', und es gelte

$$\mathfrak{a}_{x'} = \{\Phi'(f')\colon f' \in J_{X'}',\ x' \in \mathrm{Bd}\, f'\} = \{f\colon f \in J_X,\ x' \in \mathrm{Bd}\, f'\}.$$

Jedenfalls gilt $j_X \in \mathfrak{a}_{x'}$. Aus $f \leqq g$ folgt $f = f \wedge g$ und wegen der Isomorphie von $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}$ auch $f' = f' \wedge g'$. Wegen (β) ergibt sich $\mathrm{Bd}\, f' = \mathrm{Bd}(f' \wedge g') = (\mathrm{Bd}\, f') \cap (\mathrm{Bd}\, g') \subseteqq \mathrm{Bd}\, g'$. Gilt daher $f \in \mathfrak{a}_{x'}$, also $x' \in \mathrm{Bd}\, f'$, so folgt auch $x' \in \mathrm{Bd}\, g'$ und somit $g \in \mathfrak{a}_{x'}$. Ebenso folgt aus $f, g \in \mathfrak{a}_{x'}$ zunächst $x' \in (\mathrm{Bd}\, f') \cap (\mathrm{Bd}\, g') = \mathrm{Bd}(f' \wedge g')$ und somit $f \wedge g \in \mathfrak{a}_{x'}$. Schließlich werde $f, g \in J_X$ und $f \vee g \in \mathfrak{a}_{x'}$ vorausgesetzt. Dann gilt wieder $x' \in \mathrm{Bd}(f' \vee g') = (\mathrm{Bd}\, f') \cup (\mathrm{Bd}\, g')$ und daher $f \in \mathfrak{a}_{x'}$ oder $g \in \mathfrak{a}_{x'}$. Somit ist $\mathfrak{a}_{x'}$ ein P-Filter, also ein Punkt von $\tilde{X}$. Durch $\vartheta_X(x') = \mathfrak{a}_{x'}$ wird daher eine Abbildung $\vartheta_X\colon X' \to \tilde{X}$ definiert.

Es seien jetzt x_1' und x_2' zwei verschiedene Punkte von X'. Wegen (γ) gibt es dann ein $f'\colon \to X'$ mit $x_1' \in \mathrm{Bd} f'$ und $x_2' \notin \mathrm{Bd} f'$. Wegen $\mathrm{Bd} f' = \mathrm{Bd}(\mathrm{Im} f')$ kann dabei sogar $f' \in J_{X'}$, also $f \in J_X$ vorausgesetzt werden. Es folgt $f \in \vartheta_X(x_1')$ und $f \notin \vartheta_X(x_2')$, also $\vartheta_X(x_1') \neq \vartheta_X(x_2')$. Daher ist ϑ_X eine 1–1-Abbildung.

Es gelte jetzt $\mathfrak{a} = \vartheta_Y(h'(x'))$. Dann ist $f \in \mathfrak{a}$ gleichwertig mit $h'(x') \in \mathrm{Bd} f'$, also gleichwertig mit $x' \in h'^{=}(\mathrm{Bd} f') = \mathrm{Bd}(h'^{-}(f'))$. Dies aber ist wiederum gleichwertig mit $h^{-}(f) \in \vartheta_X(x')$ und daher auch gleichwertig mit $f \in \tilde{h}(\vartheta_X(x'))$. Insgesamt folgt hieraus $\vartheta_Y \circ h' = \tilde{h} \circ \vartheta_X$.

Weiter gelte nun $\mathfrak{a} \in \vartheta_Y(\mathrm{Bd} h')$. Dann folgt trivialerweise $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}\, \vartheta_Y$. Zweitens gilt $\mathfrak{a} = \vartheta_Y(h'(x'))$ mit einem geeigneten Punkt $x' \in X'$ und wegen $\vartheta_Y \circ h' = \tilde{h} \circ \vartheta_X$ dann auch $\mathfrak{a} = \tilde{h}(\vartheta_X(x'))$, also $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd} \tilde{h}$. Umgekehrt werde $\mathfrak{a} \in (\mathrm{Bd}\, \vartheta_Y) \cap (\mathrm{Bd} \tilde{h})$ vorausgesetzt. Wegen 5.5 folgt aus $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd} \tilde{h}$ zunächst $\mathrm{Im} h \in \mathfrak{a}$. Wegen $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}\, \vartheta_Y$ gibt es einen Punkt $y' \in Y'$ mit $\mathfrak{a} = \vartheta_Y(y')$. Aus $\mathrm{Im} h \in \mathfrak{a}$ folgt daher $y' \in \mathrm{Bd}(\mathrm{Im} h') = \mathrm{Bd} h'$ und somit $\mathfrak{a} \in \vartheta_Y(\mathrm{Bd} h')$. Zusammen hat sich damit auch die zweite Gleichung $\vartheta_Y(\mathrm{Bd} h') = (\mathrm{Bd}\, \vartheta_Y) \cap (\mathrm{Bd} \tilde{h})$ ergeben.

Umgekehrt seien jetzt 1–1-Abbildungen $\vartheta_Y\colon Y' \to \tilde{Y}$ mit den Eigenschaften $\vartheta_Y \circ h' = \tilde{h} \circ \vartheta_X$ und $\vartheta_Y(\mathrm{Bd} h') = (\mathrm{Bd}\, \vartheta_Y) \cap (\mathrm{Bd} \tilde{h})$ gegeben. Aus $f \in \mathfrak{a} = \vartheta_Y(y')$ folgt einerseits $f \in J_Y$ und daher auch $f = \mathrm{Im} f$. Andererseits ergibt sich wegen 5.5 $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd} \tilde{f}$, also auch $\mathfrak{a} \in (\mathrm{Bd}\, \vartheta_Y) \cap (\mathrm{Bd} \tilde{f}) = \vartheta_Y(\mathrm{Bd} f')$. Wegen der Eineindeutigkeit von ϑ_Y ergibt sich hieraus schließlich $y' \in \mathrm{Bd} f'$. Umgekehrt werde $f \in J_Y$ und $y' \in \mathrm{Bd} f'$ mit $f\colon X \to Y$ vorausgesetzt. Dann gilt $y' = f'(x')$ mit einem geeigneten Punkt $x' \in X'$. Es folgt $\vartheta_Y(y') = \vartheta_Y(f'(x')) = \tilde{f}(\vartheta_X(x'))$, also $\vartheta_Y(y') \in \mathrm{Bd} \tilde{f}$ und daher nach 5.5 (wegen $f \in J_Y$ gilt $f = \mathrm{Im} f$) auch $f \in \vartheta_Y(y')$. Zusammen besagt dies, daß $\vartheta_Y(y')$ gerade der oben definierte P-Filter $\mathfrak{a}_{y'}$ sein muß. Die 1–1-Abbildungen ϑ_Y sind also durch die angegebenen Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Schließlich sei $\tilde{A}$ eine Teilmenge von $\tilde{X}$, die bei einem geeigneten Morphismus $\tilde{h}\colon \tilde{X} \to \tilde{Y}$ Urbildmenge eines Punktes $\mathfrak{a} \in \tilde{Y}$ ist. Es gilt also $\tilde{A} = \tilde{h}^{=}(\mathfrak{a})$, und $\tilde{A}$ ist eine $\tilde{\tau}$-abgeschlossene Menge. Weiter sei nun A' die Urbildmenge von $\tilde{A}$ bei der Abbildung ϑ_X. Aus $x' \in A'$ folgt $\vartheta_Y(h'(x')) = \tilde{h}(\vartheta_X(x')) \in \tilde{h}(\tilde{A})$, also $\vartheta_Y(h'(x')) = \mathfrak{a}$. Wegen der Eineindeutigkeit von ϑ_Y gibt es aber nur genau einen Punkt $y' \in Y'$ mit $\vartheta_Y(y') = \mathfrak{a}$. Man erhält $h'(x') = y'$ und somit $h'(A') = \{y'\}$. Umgekehrt folgt aus $h'(x') = y'$ auch $\tilde{h}(\vartheta_X(x')) = \vartheta_Y(h'(x')) = \vartheta_Y(y') = \mathfrak{a}$, also $\vartheta_X(x') \in \tilde{A}$ und $x' \in A'$. Daher gilt $A' = h'^{=}(y')$, und auch A' ist Urbildmenge eines Punktes bei der stetigen Abbildung h'. Es ist somit A' eine τ'-abgeschlossene Menge. Aus der Definition der Topologien $\tilde{\tau}$ folgt nun sofort, daß überhaupt die Urbildmenge jeder $\tilde{\tau}$-abgeschlossenen Menge bei der Abbildung ϑ_X eine τ'-abgeschlossene Menge ist; d.h. ϑ_X ist eine stetige Abbildung von (X', τ') in $(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\tau})$.

Nach den vorher bewiesenen Sätzen ist speziell $(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\tau})$ eine T_1-Kategorie mit den Eigenschaften (α) bis (γ). Es werde nun angenommen, daß $(\mathfrak{X}^*, \tau^*)$

ebenfalls eine T_1-Kategorie mit den Eigenschaften (α) bis (γ) ist, für die 5.10 bei Ersetzung von $(\widetilde{\mathfrak{R}}, \tilde{\tau})$ durch $(\mathfrak{R}^*, \tau^*)$ gilt. Dann gibt es eindeutig bestimmte, stetige 1—1-Abbildungen $\vartheta_X^*: \widetilde{X} \to X^*$ und $\vartheta_X: X^* \to \widetilde{X}$ mit den in dem Satz angegebenen Eigenschaften. Es ist dann $\eta_X = \vartheta_X \circ \vartheta_X^*$ eine stetige 1—1-Abbildung von $\widetilde{X}$ in $\widetilde{X}$, die durch diese Eigenschaften ebenfalls eindeutig bestimmt ist. Da andererseits die Identität von $\widetilde{X}$ trivialerweise diese Eigenschaften besitzt, muß η_X die Identität, die Abbildungen ϑ_X und ϑ_X^* müssen also Homöomorphismen sein. Damit hat sich ergeben:

5.11. *$(\widetilde{\mathfrak{R}}, \tilde{\tau})$ ist bis auf topologische Isomorphie die einzige T_1-Kategorie mit den Eigenschaften (α) bis (γ), in die jede andere solche T_1-Kategorie im Sinn von* 5.10 *stetig eingebettet werden kann.*

Literatur

[1] BUCHSBAUM, D. A.: Exact categories and duality. Trans. Amer. Math. Soc. **80**, 1—34 (1955).

[2] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological algebra. Princeton Mathematical Series 19. Princeton University Press 1956.

[3] EILENBERG, S., and S. MACLANE: General theory of natural equivalences. Trans. Amer. Math. Soc. **58**, 231—294 (1945).

[4] —, and N. E. STEENROD: Foundations of algebraic topology. Princeton Mathematical Series 15. Princeton University Press 1952.

[5] GROTHENDIECK, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math. J. **9**, 119—183 (1957).

[6] HOFMANN, F.: Über eine die Kategorie der Gruppen umfassende Kategorie. Sitzungsberichte der Bayerischen Akad. d. Wiss. (1960).

[7] MACLANE, S.: Groups, categories and duality. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **34**, 263—267 (1948).

[8] — Duality for groups. Bull. Amer. Math. Soc. **56**, 485—516 (1950).

Erlangen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 7. April 1961)

HLAWKA, E.
Math. Zeitschr. 77, 273–284 (1961)

Über die Diskrepanz mehrdimensionaler Folgen mod. 1

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

EDMUND HLAWKA

Einleitung

Ist x ein Punkt im euklidischen R^s $(s \geqq 1)$ mit den Koordinaten $p_1(x), \ldots, p_s(x)$, so heißt der Punkt $\bar{x}$ im Einheitswürfel E^s: $0 \leqq \xi_j < 1$ $(j = 1, \ldots, s)$ mit den Koordinaten $p_j(x) - [p_j(x)]$ $(j = 1, \ldots, s)$ ($[p]$ = nächst kleinere ganze Zahl an p) der reduzierte Punkt zu x modulo 1, $\bar{x} \equiv x \bmod 1$. Ist nun ω eine unendliche Folge $x_1, x_2, \ldots$ von Punkten im R^s, ω_n $(n \geqq 1)$ die endliche Teilfolge $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so betrachten wir die zugehörigen Folgen $\bar{\omega}$ bzw. $\bar{\omega}_n$ der reduzierten Punkte. Es sei nun $Q = Q^s$: $\alpha_j \leqq \xi_j < \beta_j$ $(j = 1, \ldots, s)$ ein beliebiges Intervall in $E = E^s$, $v_n(Q, \omega) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \chi_Q(\bar{x}_j)$ (χ_Q charakteristische Funktion von Q). Nach HERMANN WEYL heißt die Folge ω bzw. $\bar{\omega}$ gleichverteilt mod 1, wenn für jedes Q die Folge v_n einen Grenzwert besitzt und stets

$$\lim_{n \to \infty} v_n(Q, \omega) = V(Q) = \int_E \chi_Q(\xi)\, d\xi \tag{1}$$

ist, wo $V(Q)$ also das Volumen von Q ist ($d\xi$ bedeutet das Volumselement $d\xi_1 \ldots d\xi_s$). Man nennt

$$D_n(\omega) = D(\omega_n) = \sup_{Q \subset E} |v_n(Q, \omega) - V(Q)| \tag{2}$$

die Diskrepanz von ω_n, welche stets $\leqq 1$ ist. Es ist bekannt, daß aus (1) folgt, daß $D_n(\omega)$ eine Nullfolge ist. Es ist eine wichtige Aufgabe, bei gegebener Folge ω, schärfere Aussagen über die Diskrepanz zu erhalten. Es ist ω genau dann gleichverteilt, wenn für jede auf E definierte komplexwertige, im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion f

$$\lim_{n \to \infty} A_n(f) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_E f(\xi)\, d\xi = \mu(f), \tag{3}$$

und (3) gilt genau dann, wenn (3) für alle Funktionen $\exp(\langle h x \rangle)$ erfüllt ist (h Gitterpunkt im R^s, $\langle h x \rangle$ skalares Produkt von h und x, $\exp \alpha = e^{2\pi i \alpha}$). Es ist also ω genau dann gleichverteilt, wenn für alle $h \neq 0$

$$\lim_{n \to \infty} S_n(h, \omega) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp(\langle h\, x_k \rangle) = 0 \tag{3'}$$

ist (Weylsches Kriterium[1]), S_n oder nS_n heißen Weylsche Summen). Zwei Sätze sind nun fundamental in der Theorie der Gleichverteilung. Der eine Satz folgt sofort aus (3'): Bezeichnen wir mit $\omega(h)$ die eindimensionale Folge: $\langle hx_1\rangle, \langle hx_2\rangle, \ldots$, welche wir der Folge ω: $x_1, x_2, \ldots$ zuordnen, dann ist die Folge ω genau dann gleichverteilt, wenn alle Folgen $\omega(h)$ gleichverteilt sind. Der zweite Satz, von J. G. VAN DER CORPUT Hauptsatz der Gleichverteilung genannt, lautet folgendermaßen: Es sei ω_j (j natürliche Zahl) die Folge $x_{j+1}-x_1,\ x_{j+2}-x_2, \ldots$.

Dann ist ω sicher gleichverteilt, wenn für jedes j die Folge ω_j gleichverteilt ist. Die Aufgabe dieser Arbeit ist es, diese qualitativen durch quantitative Aussagen zu ersetzen, d.h. die Diskrepanz $D_n(\omega)$ durch die Diskrepanzen der zugehörigen Folgen $\omega(h)$ bzw. ω_j so abzuschätzen, daß die oben erwähnten Sätze als Spezialfall erhalten werden können.

Ist z.B. für die Diskrepanz von ω_j mehr bekannt als nur $o(1)$, so erhält man schärfere Aussagen über die Diskrepanz von ω als nur die Tatsache der Gleichverteilung. Bei dem Hauptsatz der Gleichverteilung und zwar für eindimensionale Folgen, geht diese Untersuchungsrichtung wohl auf J. M. VINOGRADOW zurück. Diese Untersuchungen wurden von J. G. VAN DER CORPUT und A. PISOT[2]) systematisch durchgeführt und von J. W. S. CASSELS[3]) zu einem gewissen Abschluß gebracht. Der mehrdimensionale Fall wurde von diesen Autoren nicht behandelt. Der erste oben zitierte Satz, welcher der Sache nach mehrdimensional ist, wurde, abgesehen von einer Arbeit von W. S. COLES[4]) für $s=2$, noch nie behandelt. Die zitierten Autoren vermeiden bei ihren Untersuchungen die Theorie der Weylschen Summen (sog. elementare Theorie der Gleichverteilung). Wir dagegen verwenden ausgiebig diese Summen, stützen uns dabei auf einen Satz von P. ERDÖS, P. TURAN und J. F. KOKSMA[5]), welcher die Diskrepanz von ω durch diese Summen schätzt. Wir verwenden weiter einen Gedanken, welchen wohl zuerst H. BEHNKE für die Untersuchung der Diskrepanz gewisser eindimensionaler Folgen angewandt und J. F. KOKSMA[6]) ebenfalls für $s=1$ allgemein formuliert hat. Doch scheint dieser Satz weiter nicht benutzt worden zu sein. Ich habe mich in letzter Zeit mit der Verallgemeinerung dieses Satzes auf mehrere Dimensionen befaßt[7])

---

[1]) Vgl. zur ganzen Theorie J. F. KOKSMA: Diophantische Approximationen. Ergebnisse der Mathematik, Bd. IV, 1936.

[2]) CORPUT, J. G. VAN DER, et CH. PISOT: Sur la discrépance modulo un. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. **42**, 476–486, 554–565, 713–722 (1939).

[3]) CASSELS, J. W. S.: A new inequality with application to the theory of diophantine approximation. Math. Annalen **126**, 108–118 (1953).

[4]) COLES, W. J.: On a theorem of van der Corput on uniform distribution. Proc. Cambridge **53**, 781–789 (1957).

[5]) KOKSMA, J. F.: Some theorems on Diophantine inequalities. Math. Centrum Amsterdam, Scriptum **5**, 51 S. (1950).

[6]) KOKSMA, J. F.: Ein allgemeiner Satz über die Gleichverteilung modulo 1. Einige Integrale in der Theorie der Gleichverteilung modulo 1. Mathematica, Zutphen B **11**, 7–11, 49–52 (1942). [Holl.]

[7]) Funktionen von beschränkter Variation in der Theorie der Gleichverteilung. Annali di Matematica (IV) **54**, 325–334 (1961).

und seine Nützlichkeit für viele Fragen gezeigt. Wir werden hier nur einen Spezialfall brauchen, der einfacher hergeleitet werden kann. Mit den erwähnten Methoden werden wir die gestellten Aufgaben behandeln[8]) (Satz 2 bis 5).

§1. Zur bequemeren Formulierung wollen wir noch einige Festsetzungen treffen. Sind $t_1, \dots, t_s$ Zahlen mit $0 < t_j \leqq 1$ $(j = 1, 2, \dots, s)$, und sind $t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_i}$ alle < 1 ($i = 0$ bedeute, daß dies nicht zutrifft), während die übrigen gleich 1 sind, so nennen wir $k_1, \dots, k_i$ den Index $\iota(t)$ und $i = i(\iota) = \dim t$ die Ordnung von ι oder auch „Dimension" von $t = (t_1, \dots, t_s)$. Es gibt 2^s verschiedene Indizes. Es sei $T(t)$ der Quader: $0 \leqq \xi_j < t_j$ $(j = 1, \dots, s)$. Ist $i = 0$ dann nennen wir den Index uneigentlich. Ist $\chi_T(x)$ die charakteristische Funktion von T, dann ist $\int_E \chi_T(x)\,dx = V(T)$ das $i =$ Volumen von T. Ist eine Funktion f auf E^s gegeben, dann können wir sie stets auf den ganzen R^s als periodische Funktion mit der Periode 1 erweitern. Wir wollen diese erweiterte Funktion ebenfalls mit f bezeichnen. Sie nimmt also auf gegenüberliegenden Seitenflächen des abgeschlossenen Einheitswürfels $\bar{E}^s$ gleiche Werte an. Wir wollen nun stets $\operatorname{Max}(|h_1|, \dots, |h_s|) = \|h\|$, $\prod_{j=1}^{s} \operatorname{Max}(1, |h_j|) = N(h)$ setzen.

Wir behaupten zunächst:

HILFSSATZ 1. *Es sei $f(x)$ eine komplexwertige Funktion auf E^s, welche alle stetigen gemischten partiellen Ableitungen bis zur Ordnung s besitzt. Liegt nun eine endliche Folge ω von Punkten $x_1, \dots, x_n$ im E^s vor, ist $D_n(\omega)$ ihre Diskrepanz, so ist stets*

$$(4)\quad |A_n(f) - \mu(f)| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_E f(x)\,dx \right| \leqq D_n(\omega) \sum_{\iota}{}' \int_E \left| \frac{\partial^{i(\iota)} f(t)}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_i}} \right| dt,$$

wo die Summation rechts sich über alle $2^s - 1$ eigentlichen Indizes erstreckt, also die Ordnung $i = i(\iota)$ stets $\geqq 1$ ist.

BEWEIS. Wir zeigen zuerst, daß für jedes $x \in E$

$$(5)\quad f(x) = \sum_{\iota} (-1)^{i(\iota)} \int_E \chi_{T(t)}(x) \frac{\partial^i f(t)}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_i}}\,dt.$$

(Die Summation erstreckt sich jetzt über alle Indizes. Für $i = 0$ ist das Integral $= f(1, \dots, 1)$).

Für $s = 1$ ist die Formel richtig, denn dann steht rechts in (5), da i nur 0 oder 1 ist

$$(5')\quad f(1) - \int_0^1 \chi_T(x) f'(t)\,dt = f(1) - \int_x^1 f'(t)\,dt = f(x),$$

da $\chi_T(x)$ genau dann $\neq 0$ ist, wenn $x \leqq t$ ist. Wir können also (5) für s als richtig annehmen und zeigen es für E^{s+1}: Jeder Punkt $t' \in E^{s+1}$ hat die Gestalt (τ, t), wo t im E^s liegt. Es ist $\iota' = \iota(t') = \iota(t)$, wenn $\tau = 1$, und $\iota(t') = \iota(t) + 1$, wenn $\tau < 1$, und es ist stets $\chi_{T(t')}^{(\xi,x)} = \chi_\tau^{(\xi)} \chi_{T(t)}^{(x)}$, wenn wir $T(\tau) = \tau$

[8]) Die Resultate wurden ohne Beweis vorgetragen im Institute for Advanced Study, Princeton, Wintersemester 1959.

setzen. Es ist also nach (5') und (5)

$$f(x') = f(\xi, x) = f(1, x) - \int_0^1 \chi_\tau(\xi) \frac{\partial f(\tau, x)}{\partial \tau} d\tau$$

$$= \sum_i (-1)^{i(i)} \int_E \chi_T(x) \frac{\partial^i f(1, t)}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_i}} dt - \sum_i (-1)^i \int_0^1 \int_E \frac{\partial^{i+1} f(\sigma, t)}{\partial \tau \, \partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_i}} \chi_\tau(\xi) \chi_T(x) \, d\tau \, dt$$

und dies ist gerade die Behauptung für $s+1$.

Aus (5) folgt

$$\int_E f(x) \, dx = \sum_i (-1)^{i(i)} \int_{E^s} V(T(t)) \frac{\partial^i f}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_i}} dt,$$

also

$$f(x) - \mu(f) = \sum_i{}' (-1)^{i(i)} \int_E (\chi_T(x) - V(T)) \frac{\partial^i f}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_i}} dt.$$

(Für $i=0$ heben sich ja die Glieder weg.) Daraus folgt für die linke Seite von (4) innerhalb des Absolutbetrages

$$\sum_i{}' (-1)^{i(i)} \int_E (\nu_n(T, \omega) - V(T)) \frac{\partial^i f}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_i}} dt. \tag{6}$$

Nun ist nach Definition von $D_n(\omega)$ die Klammer in (6) dem Betrage nach stets $\leqq D_n$, und daraus folgt die Behauptung. Aus Hilfssatz folgt sofort

SATZ 1. *Für jeden Gitterpunkt $g \neq 0$ ist*

$$|S_n(g, \omega)| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp(\langle g \, x_k \rangle) \right| < (4\pi)^s D_n(\omega) N(g). \tag{7}$$

Dabei ist ω: $x_1, \dots, x_n$ eine beliebige endliche Folge.

BEWEIS. Wir nehmen im Hilfssatz 1 $f(x) = \exp\langle g \, x \rangle$. Für $g \neq 0$ ist $\mu(f) = 0$. Ist $g = (g_1, \dots, g_s)$, so ist jede gemischte Ableitung von einer Ordnung k von einem Betrag $\leqq (2\pi)^k N(g) < (2\pi)^s N(g)$. Da die Summe in (4) höchstens 2^s Summanden hat, so ist (7) bereits bewiesen.

HILFSSATZ 2. *Es ist für jedes natürliche $M \geqq 1$*

$$\left| \sum_{0 < \|g\| \leq M} S_n(g, \omega)/N(g) \right| < 4^{4s} (1 + \log M)^s D_n(\omega). \tag{8}$$

BEMERKUNG. Formel (7) würde für die linke Seite von (8) nur eine Abschätzung $\ll M^s D_n$ liefern.

BEWEIS. Wir nehmen jetzt in Hilfssatz 1

$$f(x) = \sum_{0 < \|g\| \leq M} N^{-1}(g) \exp\langle g \, x \rangle = \prod_{j=1}^{s} \left(\sum_{|h|=1}^{M} \frac{1}{|h|} \exp(h p_j(x)) + 1 \right) - 1.$$

Es ist

$$\left| \frac{\partial^i f}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_i}} \right| \leqq (4\pi)^i \left| \prod_{j=1}^{i} \left(\sum_{h=1}^{M} \sin 2\pi h \, t_{k_j} \right) \right| \left(1 + 2 \sum_{h=1}^{M} \frac{1}{h} \right)^{s-i},$$

also

$$(9)\qquad \int_E \left|\frac{\partial^i f}{\partial t_{k_1}\dots\partial t_{k_i}}\right| dt < (4\pi)^i (3+2\log M)^{s-i}\left(\int_0^1 \left|\sum_{h=1}^{M}\sin 2\pi h t\right| dt\right)^i .$$

Nun ist das Integral rechts in (9) bekanntlich $<4(3+\log M)$ und daraus folgt die Behauptung.

§2. Satz 2. *Ist $\omega(h)$ die Folge $\langle h x_1\rangle, \dots, \langle h x_n\rangle$, so ist für jede natürliche Zahl M*

$$(10)\qquad D_n(\omega) < 16\cdot 30^s\left(\frac{1}{M}+\sum_{0<|||h|||\le M} D_n\left(\omega(h)\right) N^{-1}(h)\right).$$

Bemerkung. Ist ω: $x_1, x_2, \dots$ eine unendliche Folge und für jedes $h\neq 0$ die Folge $\omega(h)$ gleichverteilt, so ist also

$$\lim_{n\to\infty} D_n\omega(h) = 0, \quad \text{also nach (10)} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} D_n(\omega) \ll \frac{1}{M},$$

und da M beliebig, so folgt, daß ω gleichverteilt ist. Mit (10) ist also eines der gesteckten Ziele erreicht.

Beweis. Nach Erdös-Turan-Koksma ist stets

$$(11)\qquad D_n(\omega) < 30^s\left(\frac{1}{M}+\sum_{0<|||h|||\le M} N^{-1}(h)\, S_n(h,\omega)\right).$$

Nun ist nach (7) mit $s=1$ angewendet auf die Folge $\omega(h)$ und $g=1$

$$|S_n(h,\omega)| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp\langle h x_k\rangle\right| < 4\pi D_n\left(\omega(h)\right),$$

und damit ist (10) bereits bewiesen.

Wir wollen nun eine Verschärfung von Satz 2 beweisen.

Satz 3. *Gelten die gleichen Bezeichnungen wie in Satz 2, so ist sogar*

$$(12)\qquad D_n(\omega) < (31)^{s+1}\left(\frac{1}{M}+\sum_{0<|||h|||\le M}^{*} D_n\left(\omega(h)\right) N^{-1}(h)\right),$$

wo sich die Summation rechts jetzt nur über die primitiven Gitterpunkte h, d.h. jene mit größtem gemeinsamen Teiler 1 erstreckt.

Dabei kann angenommen werden, daß die erste von 0 verschiedene Koordinate in h stets >0 ist.

Bemerkung. (10) liefert nur

$$D_n(\omega) \ll \frac{1}{M} + M\sum{}^{*} D_n\left(\omega(h)\right) N^{-1}(h).$$

Der Beweis von (12) ist bedeutend schwieriger als jener von (10) und erfordert ein Eingehen auf den Gedankengang des Beweises von (11). Es seien r und M natürliche Zahlen, $\lambda=\left[\frac{M}{r}\right]+1$, γ reell mit $0\le\gamma<1$; dann sei

$$\varphi(M,r,\gamma,\xi) = \varphi(\xi,\gamma)$$
$$= \frac{1}{R}\int_0^{\gamma}\left(\frac{\sin\pi\lambda(t-\xi)}{\sin\pi(t-\xi)}\right)^{2r} dt = \gamma + \sum_{|||h|||=1}^{M} P_h \exp h\xi,$$

wo R durch $\varphi(0,1)=1$ definiert ist. Es seien weiter $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ reelle Zahlen mit $0\leqq\gamma_j<1\,(j=1,\ldots,s)$ $x=(\xi_1,\ldots,\xi_s)$, $\psi(x)=\prod_{j=1}^{s}\varphi_j(\xi_j)$, wo $\varphi_j(\xi_j)=\varphi(M,r,\gamma_j,\xi_j)$ oder $\equiv 1$ für alle ξ_j. Es ist

$$\psi(x)=c_0+\sum_{0<\|h\|\leqq M}c_h\exp\langle h\,x\rangle,\qquad 0\leqq\psi\leqq 1$$

und

$$|c_0|\leqq\gamma_1,\ldots,\gamma_s,\ |c_h|\leqq N^{-1}(h)\qquad(h\neq 0).$$

Für einen festen primitiven Gitterpunkt $h\neq 0$ betrachten wir nun die Summe

$$\psi_h(\xi)=\sum_{|t|=1}^{L}c_{ht}\exp(t\,\xi),\quad\text{wo}\quad L=[M/\|h\|],$$

und wir behaupten:

Es ist stets

$$\int_0^1|\psi_h'(\xi)|\,d\xi<4/N(h).\tag{13}$$

BEWEIS. Es seien l der Komponenten von h von 0 verschieden. Es sei zunächst $l=1$, dann ist h ein Einheitsvektor und wir können o.B.d.A. $h=(1,0,\ldots,0)$ annehmen. Dann ist $\psi_h=\varphi_1(\xi)-c_0$, also das Integral in (13) gleich $\int_0^1|\varphi_1'(\xi)|\,d\xi$. Nun ist

$$|\varphi'(\xi,\gamma)|=\frac{1}{R}\left|\left(\frac{\sin\pi\lambda(\gamma-\xi)}{\sin\pi(\gamma-\xi)}\right)^{2r}-\left(\frac{\sin\pi\lambda\,\xi}{\sin\pi\,\xi}\right)^{2r}\right|,\tag{14}$$

also ist das Integral $\leqq 2$, wenn $\varphi_1=\varphi(M,r,\gamma,\xi)$. Ist $\varphi_1\equiv 1$, dann ist alles trivial. Damit ist (13) für $l=1$ bewiesen, da ja dann $N(h)=1$ ist. Es sei jetzt also $l>1$ angenommen, also z.B. $h=(h_1,\ldots,h_l,0,\ldots,0)$. Es ist

$$\psi_h'(\xi)=2\pi i\sum_{|t|=1}^{L}t\,c_{ht}\exp(t\,\xi).$$

Beachten wir, daß

$$c_h=\int_E\psi(x)\exp(-\langle h\,x\rangle)\,dx,$$

so folgt durch partielle Integration sofort

$$(2\pi i)^{l-1}N(h)\,\psi_h'=\int_E\left(\sum_{|t|=1}^{L}t^{1-l}\left(\exp(\xi-\langle h\,x\rangle)\,t\right)X(x)\,dx\right),\tag{14}$$

wo $X(x)=\prod_{j=1}^{s}\varphi_j'(\xi_j)$ gesetzt wurde, also ist

$$(2\pi)^{l-1}N(h)\int_0^1|\psi_h'(\xi)|\,d\xi\leqq\int_E|X(x)|\,dx\int_0^1 d\xi\left|\sum_{|t|=1}^{L}t^{1-l}\exp t(\xi-\langle h\,x\rangle)\right|.$$

Das Integral über ξ ist von $\langle h\,x\rangle$ unabhängig und gleich

$$\int_0^1 d\xi\left|\sum_{|t|=1}^{L}t^{1-l}\exp\xi\,t\right|\leqq\left(\int_0^1 d\xi\,|\,|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{|t|=1}^{L}t^{2(1-l)}\right)^{\frac{1}{2}}<2.$$

Es ist

$$\int_E |X(x)|\,dx = \prod_{j=1}^{l} \int_0^1 |\varphi_j'(\xi)|\,d\xi \leqq 2^l$$

wie schon bemerkt wurde, also ist tatsächlich das Integral in (13) kleiner als

$$\frac{4\pi 2^l}{(2\pi)^l N(h)} < \frac{4}{N(h)}.$$

Aus Hilfssatz 1 folgt damit sofort

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \psi_h(\langle h x_k\rangle)\right| < 4 D_n(\omega(h))/N(h). \tag{15}$$

Wir nehmen jetzt $r = 4 + [\log s]$ und setzen $M \geqq 4 + [\log s]$ voraus. Wir gehen nun analog wie beim Beweis von (11) nach J. F. Koksma vor. Dabei benützen wir, daß für $\varphi = \varphi(M, r, \gamma, \xi)$ stets gilt

$$\varphi \geqq 1 - 2\cdot 4^{-r} r^{-\frac{1}{2}}\left((\lambda\xi)^{1-2r} + (\lambda(\gamma-\xi))^{1-2r}\right) \quad \text{für} \quad 0 < \xi < \gamma, \tag{16}$$

$$\varphi \leqq 2\cdot 4^{-r} r^{-\frac{1}{2}}\left((\lambda(\xi-\gamma))^{1-2r} + (\lambda(1-\xi))^{1-2r}\right) \quad \text{für} \quad \gamma < \xi < 1. \tag{17}$$

Ist χ_P die charakteristische Funktion eines Parallelepipeds P: $\alpha_j \leqq \xi_j \leqq \alpha_j + \delta_j$ im E^s, dann schreiben wir $\nu_n(P, \omega) = \Lambda(P) = \Lambda(\chi_P)$; $V(P)$ ist stets das Volumen von P. Dann ist zunächst

$$\Lambda(P) < 2\left(V(P) + 4\cdot 2^s A\right). \tag{18}$$

Dabei sei stets

$$A = \frac{1}{\lambda} + \sum_{1<\|h\|\leqq M}^{*} D_n(\omega(h))\, N^{-1}(h). \tag{19}$$

(Die Summation erstreckt sich über die primitiven Gitterpunkte.) Zum Beweis von (18) betrachten wir zunächst das Parallelepiped P^*: $\frac{1}{\lambda} \leqq \xi_j \leqq \operatorname{Min}\left(\delta_j + \frac{1}{\lambda}, 1\right)$ $(j = 1, \ldots, s)$ und setzen $\varphi_j(\xi_j) = \varphi\left(M, r, \delta_j + \frac{2}{\lambda}, \xi_j\right)$, wenn $\delta_j < 1 - \frac{2}{\lambda}$, und sonst $\equiv 1$, und betrachten die Funktion

$$\psi(x) = \prod_{j=1}^{s} \varphi_j(\xi_j) = c_0 + \sum_{0<\|h\|\leqq M} c_h \exp\langle h x\rangle.$$

Es ist

$$|c_0| \leqq \prod_{j=1}^{s}\left(\delta_j + \frac{2}{\lambda}\right) \leqq V(P^*) + 2^{s+1}\lambda^{-1}.$$

Für jedes $x \in P^*$ ist wegen (16) stets $\psi(x) > (1 - 4^{1-r} r^{-\frac{1}{2}})^s = C$, also ist

$$\Lambda(\psi) \geqq \Lambda(\psi\chi_{P^*}) > C\,\Lambda(\chi_{P^*}),$$

also, da

$$r = 4 + [\log s], \quad C^{-1} < (1 + 8\cdot 4^{-r} r^{-\frac{1}{2}})^s < \left(1 + \frac{1}{4s}\right)^s < e^{\frac{1}{4}} < 2,$$

also

$$\Lambda(P^*) < 2\Lambda(\psi) < 2\left(V(P^*) + 2^{s+1}\lambda^{-1} + \sum_{0<\|g\|\leqq M} c_g\, S(g, \omega)\right).$$

Nun ist

$$|\sum c_g S_n(g,\omega)| = \left| \sum_{0<||h||\leq M}^{*} \sum_{|t|=1}^{L} c_{ht} S_n(th,\omega) \right| \leq 4 \sum_{0<||h||\leq M}^{*} D_n(\omega(h)) N^{-1}(h)$$

nach (15), und daraus folgt (18) zunächst für P^*. Liegt das Parallelepiped P vor, dann ersetzen wir die Folge $\langle x_k \rangle$ durch die Folge $\langle x_k^* \rangle$ mit

$$p_j(x_k^*) = p_j(x_k) - \left(\alpha_j - \frac{1}{\lambda}\right) \qquad (j=1,\ldots,s).$$

Liegt x_k in P, dann x_k^* in P^*. Es ist

$$\langle h\, x_k^* \rangle - \langle h\, x_k \rangle = -\sum_{j=1}^{s} h_j \left(\alpha_j - \frac{1}{\lambda}\right)$$

unabhängig von k, also $D(\omega(h)) = D(\omega^*(h))$ und damit ist (18) vollständig bewiesen. Für das offene Parallelepiped P^0: $0 \leq \alpha_j < \xi_j < \alpha_j + \gamma_j < 1$ $(j=1,\ldots,s)$ ist

$$A(P^0) \geq V(P^0) - 16^{s+1} A. \tag{20}$$

Wir können wie vorher o.B.d.A. $\alpha_j = 0$ $(j=1,\ldots,s)$ annehmen. P sei die Hülle von P^0, ∂P der Rand, dann ist also $\chi_P = \chi_{P^0} + \chi_{\partial P}$. Es sei $\psi(x) = \prod_{j=1}^{s} \varphi_j(\xi_j)$, wo jetzt für alle $\varphi_j = \varphi(M, r, \gamma_j, \xi_j)$. Dann ist

$$A(\psi) = A(\psi \chi_{P^0}) + A(\psi \chi_{\partial P}) + A(\psi(1-\chi_P)) = A_1 + A_2 + A_3.$$

Da $0 \leq \psi \leq 1$, so ist $A_1 \leq A(P^0)$, also $A(P^0) \geq A(\psi) - (A_2 + A_3)$. Es ist

$$\psi(x) = V(P^0) + \sum_{0<||h||\leq M} c_h \exp\langle h\, x \rangle,$$

also

$$A(\psi) \geq V(P_0) - \left| \sum_{h \neq 0} c_h S_n(h,\omega) \right|,$$

also wie vorher

$$A(\psi) > V(P_0) - 16^s A. \tag{20'}$$

Es ist ∂P die Vereinigungsmenge der s uneigentlichen Parallelepipede

$$Q_j\colon \quad 0 \leq \xi_j < \gamma_j \qquad (j \neq k), \qquad \xi_k = 0 \qquad (k=1,\ldots,s).$$

Es ist also

$$A_2 = \sum_{k=1}^{s} A(\psi \chi_{Q_k}) \leq \sum_{k=1}^{s} A(\chi_{Q_k}) < 8s \cdot 2^s A < 4^{s+1} A \tag{21}$$

nach (18), da $V(Q_k) = 0$.

Jeder Punkt mit $\chi_P(x) = 0$ liegt in einem der $2^s - 1$ Parallelepipede P_H: $0 \leq \xi_j < \gamma_j$ für l Werte j^* und $\gamma_j \leq \xi_j < 1$ für die übrigen $m = s - l$ Indizes j^{**}, und es muß $l < s$ sein, denn sonst liegt x in P. Es ist also $A_3 = \sum_H A(\psi \chi_{P_H})$.

Jedes P_H überdecken wir durch Parallelepipede $P_H(k_1,\ldots,k_m) = P_H(k)$

$$\begin{cases} 0 \leq \xi_j < \gamma_j & (j=j^*), \qquad \gamma_j + \dfrac{2k_j}{\lambda} \leq \xi_j < \gamma_j + \dfrac{2k_j}{\lambda} + \\ & \quad + \operatorname{Min}\left(\dfrac{2}{\lambda}, 1-\gamma_j\right), \quad (j=j^{**}) \end{cases} \tag{22}$$

mit $0 \leqq k_j \leqq K_j$, wo K_j die nächst kleinere natürliche Zahl $\geqq \frac{\lambda(1-\gamma_j)}{2} - 1$. Ist $K_j = 0$, dann ersetzen wir in der Definition von P_H das j^{**}-Intervall durch $\gamma_j \leqq \xi_j < 1$. Wir wenden nun (18) auf $P_H(k)$ an und beachten, daß

$$V(P_H(k)) \leqq \prod \gamma_{j^*} \prod (1-\gamma_{j^{**}}) \leqq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{s-l} \leqq \frac{2}{\lambda},$$

also ist

$$\Lambda(P_H(k)) < 10 \cdot 2^s A. \tag{23}$$

Liegt nun x im $P_H(k)$, dann ist stets $0 \leqq \varphi_j \leqq 1$, aber für $j = j^{**}$ und $1 \leqq k_j \leqq K_j - 2$ ist nach (17) sogar $\varphi_j < 2^{-7}(k_j^{-7} + (K_j - k_j)^{-7}) = L_j$ (da $r \geqq 4$), also ist für $x \in P_H(k)$

$\psi(x) \leqq \prod_{j^{**}} C_j(k) = \prod^{**} C_j(k)$, wo $C_j(k) = 1$, wenn $k_j = 0, K_j - 1, K_j - 2$ und sonst L_j. Es ist also

$$\Lambda(\psi \chi_{P_H(k)}) \leqq \prod^{**} C_j(k) \Lambda(P_H(k)) < 10 \cdot 2^s A \prod^{**} C_j(k),$$

also

$$\Lambda(\psi \chi_{P_H}) \leqq 10 \cdot 2^s A \sum_k \prod^{**} C_j(k). \tag{24}$$

Nun ist die Summe rechts in (24) ja $< \prod_{j^{**}} \sum_k C_j(k)$. Nun ist

$$\sum_k C_j(k) < 3 + 2^{-6} \sum_{k=1}^{K_j - 2} k^{-7} < 3 + 2^{-6} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-7} < 4,$$

also

$$\Lambda(\psi \chi_{P_H}) < 10 \cdot 8^s A,$$

also

$$\Lambda_3 < 16 \cdot 10^s A. \tag{25}$$

(20'), (24), (25) liefern die Behauptung (20).

Betrachten wir jetzt das abgeschlossene Parallelepiped P, dann ist

$$\Lambda(P) \leqq V(P) + 16^{s+1} A. \tag{26}$$

Es ist

$$\Lambda(P) = \Lambda(\chi_P \psi) + \Lambda(\chi_P (1-\psi)), \quad \text{also} \quad \Lambda(P) \leqq \Lambda(\psi) + \Lambda(\chi_P (1-\psi)).$$

Es ist

$$\Lambda(\psi) \leqq V(P) + 4 \cdot 2^s A,$$

wie wir ja schon gezeigt haben. Es ist

$$\psi = \prod_j (1 - (1-\varphi_j)) \geqq 1 - \sum_{j=1}^{s} (1-\varphi_j),$$

$$\text{also} \quad \Lambda_4 = \Lambda(\chi_P (1-\psi)) \leqq \sum_j \Lambda(\chi_P (1-\varphi_j)).$$

Wir überdecken nun P durch Parallelepipede $G = G_k(m)$

$$0 \leqq \xi_j \leqq \gamma_j \quad (j \neq k), \qquad \frac{2m}{\lambda} \leqq \xi_k \leqq \frac{2m}{\lambda} + \operatorname{Min}\left(\frac{2}{\lambda}, \gamma_k\right)$$

mit $0 \leqq m \leqq M_j$ (M_j nächst kleinere natürliche Zahl $\geqq \frac{\lambda \gamma_j}{2} - 1$; wenn $M_j = 0$ dann G: $0 \leqq \xi_j \leqq \gamma_j$). Dann ist

$$\Lambda\left(\chi_P(1-\varphi_k)\right) \leqq \sum_m \Lambda\left(\chi_{G_k(m)}(1-\varphi_k)\right) \leqq \sum_m \Lambda\left(\chi_{G_k(m)}\right) \operatorname*{Max}_{\xi_k \in G_k(m)} \left(1-\varphi_k(\xi_k)\right).$$

Nach (18) ist, da $V\left(G_k(m)\right) < \frac{2}{\lambda}$, $\Lambda\left(G_k(m)\right) < 8 \cdot 2^s A$. Weiter ist $1-\varphi_k(\xi_k)$ in $G_k(m)$ sicher $\leqq 1$, und für $1 \leqq m \leqq M_j - 2$ nach (16) sogar $< 2^{-7}\left(m^{-7} + (M_j - m)^{-7}\right)$, und wir erhalten analog wie vorher $\Lambda\left(\chi_P(1-\varphi_k)\right) < 12 \cdot 8^s A$, also $A_4 < 6 \cdot 16^s A$ und damit (26). Aus (26) und (20) folgt, daß für jeden Quader Q:

$$|\Lambda(Q) - V(Q)| < 16^{s+1} A$$

ist, und dies ist die Behauptung des Satzes 3. Für $M \leqq 4 + [\log s]$ ist Satz 3 trivial.

Wir wollen jetzt $D(\omega)$ nach unten mit Hilfe von $D\left(\omega(h)\right)$ abschätzen und behaupten:

SATZ 4: *Für jedes* $h \neq 0$

$$D_n^s\left(\omega(h)\right) \leqq 12^s N(h)\, D_n(\omega). \tag{27}$$

Sind höchstens r *Komponenten von* h *von Null verschieden, dann ist sogar*

$$D_n^r\left(\omega(h)\right) \leqq 12^r N(h)\, D_n(\omega). \tag{27'}$$

BEWEIS. Es sei zuerst $h = (1, 1, \ldots, 1) = e$. Dann haben wir die reduzierten Punkte von $\langle e\, x_k \rangle$, also Punkte $\xi_k = \sum_{j=1}^{s} \left(p_j(x_k) - [p_j(x_k)]\right)$ zu betrachten und für jedes Intervall q:

$$\alpha \leqq \xi < \beta \text{ in } E\colon \quad 0 \leqq \xi < 1, \qquad \Delta(q) = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_q(\xi_k) - (\beta - \alpha) \right|$$

abzuschätzen. Es kann o.B.d.A. $\alpha = 0$ angenommen werden. Es liegt genau dann ξ_k in q, wenn

$$0 \leqq \sum_{j=1}^{s} p_j(x_k) - \sum_{j=1}^{s} [p_j(x_k)] < \beta,$$

also wenn x_k im s-dimensionalen Bereich

$$0 \leqq \sum_{j=1}^{s} p_j(x) - \sum_{j=1}^{s} [p_j(x)] < \beta, \qquad 0 \leqq p_j(x) < 1 \qquad (j = 1, \ldots, s)$$

liegt. Dieser Bereich ist die Vereinigungsmenge der s Bereiche U_l:

$$0 \leqq \sum_{j=1}^{s} p_j(x) - l < \beta,\ l \leqq \sum_{j=1}^{s} p_j(x) < l+1, \qquad 0 \leqq p_i(x) < 1$$

$$(l = 0, 1, \ldots, s-1),$$

und es ist

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_q(\xi_k) - \beta = \sum_{l=0}^{s-1} \Lambda(U_l) - V(U_l).$$

Es genügt $U_0 = U$ zu betrachten. Es ist U die Vereinigungsmenge der Streifen

$$S_h: \frac{h_j - 1}{t} \leqq \xi_j < \frac{h_j}{t}\ (j = 1, \ldots, s-1), \quad 0 \leqq \xi_1 + \cdots + \xi_s < \beta$$

$(1 \leqq h_j \leqq t;\ t$ beliebige natürliche Zahl)

also

$$\Lambda(U) - V(U) = \sum_h \left(\Lambda(S_h) - V(S_h)\right).$$

Ihre Anzahl ist t^{s-1}. Jedes S_h ist aber die Vereinigungsmenge des Parallelepipeds

$$Q_h: \frac{h_j - 1}{t} \leqq \xi_j < \frac{h_j}{t}\ (j = 1, \ldots, s-1), \quad 0 \leqq \xi_s < \beta - \frac{h_1 + \cdots + h_{s-1}}{t}$$

und des Bereichs

$$R_h: \frac{h_j - 1}{t} \leqq \xi_j < \frac{h_j}{t}\ (j \neq s),$$

$$\beta - \frac{h_1 + \cdots + h_{s-1}}{t} \leqq \xi_s < \operatorname{Min}\left(1, \beta - (\xi_1 + \cdots + \xi_{s-1})\right).$$

Es liegt R_h im Quader

$$T_h\left(0 \leqq \xi_j - \frac{h_j - 1}{t} \leqq \frac{1}{t}\ (j \neq s), \quad 0 \leqq \xi_s - \frac{h_1 + \cdots + h_{s-1}}{t} < \frac{s-1}{t} \cap E^s\right),$$

mit einem Volumen $V(T_h) < \frac{s-1}{t^s}$. Es ist also

$$|\Lambda(S_h) - V(S_h)| \leqq |\Lambda(Q_h) - V(Q_h)| + |\Lambda(R_h) - V(R_h)|.$$

Es ist nach Definition

$$|\Lambda(Q_h) - V(Q_h)| \leqq D_n(\omega)$$

$$\Lambda(R_h) - V(R_h) \leqq |\Lambda(T_h) - V(T_h)| + V(T_h) \leqq D_n(\omega) + V(T_h),$$

$\Lambda(R_h) - V(R_h) \geqq -V(R_h) > -V(T_h)$ also $|\Lambda(R_h) - V(R_h)| \leqq D_n(\omega) + V(T_h)$ also

$$|\Lambda(S_h) - V(S_h)| \leqq 2D_n(\omega) + \frac{s-1}{t^s}, \quad \text{also} \quad |\Lambda(U) - V(U)| \leqq 2t^{s-1}D + \frac{s-1}{t}.$$

Nehmen wir jetzt $t = [D_s^{-\frac{1}{s}}]$, so erhalten wir die Behauptung (27) für $h = e$ mit $D_n^s(\omega(e)) \leqq 4^s D_n(\omega)$.

Beachten wir nun, daß wenn x' der Punkt $(h\,p_1(x), p_2(x), \ldots, p_s(x))$ (h ganz $\neq 0$) ist und ω' die Folge $x_1', \ldots, x_n'$, dann ist stets $D_n(\omega') \leqq 3\,|h|\,D_n(\omega)$. Ist $h \geqq 1$, dann liegt $\bar{x}'$ genau dann in einem Quader $Q: 0 \leqq \xi_1 < \alpha_1, \ldots, 0 \leqq \xi_s < \alpha_s$, wenn x in einem der Quader $Q_k: \left(\frac{k}{h} \leqq \xi_1 < \frac{k+1}{h} \cap Q\right)$ also in $\frac{k}{h} \leqq \xi_1 < \frac{k+\alpha_1}{h}$, $0 \leqq \xi_2 < \alpha_2, \ldots, 0_s \leqq \xi < \alpha_s$ $(k = 0, 1, \ldots, h-1)$, also

$$|\Lambda(Q; \omega') - V(Q)| = \left|\sum_k \left(\Lambda(Q_k, \omega) - V(Q_k)\right)\right| \leqq h\,D_n(\omega).$$

Ist $h = -1$, dann liegt $\bar{x}'$ genau dann in Q, wenn $\bar{x}$ in Q': $\xi_1 = 0$, $0 \leqq \xi_2 < \alpha_2, \ldots,$ $0 \leqq \xi_s < \alpha_s$ oder in Q'': $1 - \alpha_1 < \xi_1 < 1$, $0 < \xi_2 \leqq \alpha_2, \ldots, 0 < \xi_s \leqq \alpha_s$, also

$$|\Lambda(Q, \omega') - V(Q)| \leqq 2D_n(\omega).$$

Es ist also $D_n(\omega^{(h)}) \leqq 3^s N(h) D_n(\omega)$, wo $\omega^{(h)}$ die Folge $x_1^{(h)}, \ldots, x_n^{(h)}$ sei mit

$$x^{(h)} = \left(h_1 p_1(x), h_2 p_2(x), \ldots, h_s p_s(x)\right),$$

also ist

$$D_n^s\left(\omega(h)\right) = D_n^s\left(\omega^{(h)}(e)\right) \leqq 4^s D_n(\omega^{(h)}) \leqq 12^s N(h) D_n(\omega).$$

Die weitere Behauptung (27') zeigt man analog, man hat nur die obigen Überlegungen mit r statt mit s anzuwenden.

§3. Zum Abschluß zeigen wir

SATZ 5. *Es sei ω die Folge $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, ω_j die Folge*

$$x_{j+1} - x_1, x_{j+2} - x_2, \ldots, x_n - x_{n-j} \qquad j \geqq 1.$$

Dann ist für jede natürliche Zahl q mit $1 \leqq q \leqq n$

$$D_n(\omega) < 16^s \sqrt{B}\left(1 + \log^s \frac{1}{B}\right), \tag{28}$$

wo

$$B = \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{h}\right)\left(1 + 2\sum_{j=1}^{q-1} D_{n-j}(\omega_j)\right). \tag{29}$$

Ist für die unendliche Folge ω: $x_1, x_2, \ldots, \omega_j = x_{j+1} - x_1, x_{j+2} - x_2, \ldots$ gleichverteilt, dann folgt aus (28), daß $\overline{\lim_n} D_n(\omega) \ll \frac{1}{q}$ und da q beliebig, so folgt, daß auch ω gleichverteilt ist.

BEWEIS. Wir haben nach (11) unter Benützung der Cauchyschen Ungleichung

$$D_n(\omega) < 16^s\left(\frac{1}{M} + \left(\sum_{0 < ||h|| \leq M} N^{-1}(h)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{0 < ||h|| \leq M} N^{-1}(h)\left|S_n(h,\omega)\right|^2\right)\right).$$

Nun ist nach der Fundamentalungleichung von VAN DER CORPUT

$$\left|S_n(h,\omega)\right|^2 \leqq \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{n}\right)\left(1 + 2\sum_{j=1}^{q-1}\left(1 - \frac{l}{q}\right)\left(1 - \frac{n}{q}\right)\text{Real } S_{n-j}(h,\omega_j)\right),$$

also

$$\sum_{0 < ||h|| \leq M} N^{-1}(h)\left|S_n(h,\omega)\right|^2 \leqq \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{n}\right)\left(1 + 2\sum_{j=1}^{q-1}\left|\sum_{0 < ||h|| \leq M} N^{-1}(h)\, S_{n-j}(h,\omega_j)\right|\right)$$

und dies ist nach Hilfssatz 2 sicher kleiner als

$$\left(64(1 + \log M)\right)^s B,$$

also ist

$$D_n(\omega) < 16^s\left(\frac{1}{M} + \left(64(1 + \log M)\right)^s \sqrt{B}\right).$$

Wir nehmen jetzt $M = [B^{-\frac{1}{2}}] + 1$ und erhalten die Behauptung.

Wien, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 10. April 1961)

NEUBAUER, G.
Math. Zeitschr. 77, 285–294 (1961)

Einige Bemerkungen zur Theorie der maximalen Ideale

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

GERHARD NEUBAUER

Im Buch von HILLE-PHILLIPS [3], p. 718, findet sich eine Bemerkung zum bekannten Satz von GELFAND [1] für kommutative Banach-Algebren (s. z. B. [3], Theor. 24.13.1), in der darauf hingewiesen wird, daß er sich auch auf gewisse nichtkommutative Fälle ausdehnen läßt. Bei näherer Betrachtung stellt sich heraus, daß die dort angedeutete Bedingung — nämlich Existenz einer „ausreichenden" Schar zweiseitiger maximaler Ideale — sogar notwendig ist und zu einigen weiteren Kriterien für die Gültigkeit des Satzes führt. Diese Kriterien werden im folgenden abgeleitet. Es wird außerdem versucht, sie auch auf andere als Banach-Algebren auszudehnen. Um die verschiedenen Aussagen abzugrenzen, ist eine Reihe von Beispielen angefügt.

Zuvor einiges zur Bezeichnungsweise: A sei eine Algebra über den komplexen Zahlen, nicht notwendig mit Einselement e. Wo Aussagen topologischer Natur gemacht werden, sei A ein topologischer Vektorraum und die Multiplikation in den einzelnen Variablen getrennt stetig. A braucht im allgemeinen nicht lokalkonvex zu sein. Ist $x+y-xy=0$, so heißt y Rechtsquasiinverse zu x, entsprechend sind Linksquasiinverse und Quasiinverse x^- definiert (im folgenden mit R.q.i. bzw. L.q.i. bzw. Q.i. bezeichnet). Man vgl. z. B. HILLE-PHILLIPS [3], p. 681. $\sigma'(x)$, das „algebraische" Spektrum, sei die Menge aller komplexen λ, für die x/λ keine Q.i. besitzt, und $\lambda=0$ liege in $\sigma'(a)$, wenn x keine Inverse hat. Ψ (bzw. Φ) sei die Gesamtheit aller (bzw. aller stetigen) multiplikativen linearen Funktionale auf A, die in e nicht verschwinden (falls es zu A gehört). $\Psi(x)$ bzw. $\Phi(x)$ sei die Menge aller $\psi(x)$ mit $\psi\in\Psi$ bzw. aller $\varphi(x)$ mit $\varphi\in\Phi$.

HILFSSATZ 1. $\Phi(x)\subset\Psi(x)\subset\sigma'(x)$.

BEWEIS. Es genügt zu zeigen: $\Psi(x)\subset\sigma'(x)$. Sei $\lambda=\psi(x)$. Ist $\lambda=0$, $e\notin A$, dann liegt 0 in jedem Falle in $\sigma'(x)$. Ist $e\in A$, so ist $\psi(e)\neq 0$, aber $\psi(xy)=\psi(x)\,\psi(y)=0$, also $xy\neq e$ für jedes y, d. h. $0\in\sigma'(x)$. Sei $\lambda\neq 0$, $y=x/\lambda$, dann ist $\psi(y)=1$, $\psi(y+z-yz)=\psi(y)+\psi(z)-\psi(y)\psi(z)=1\neq 0$, also $y+z-yz\neq 0$, $\lambda\in\sigma'(x)$.

Der Satz von GELFAND läßt sich nun reduzieren auf die Aussage

(G) $$\Phi(x)=\sigma'(x).$$

Alle übrigen Aussagen folgen unmittelbar (vgl. z.B. [3], Th. 24.13.1). Außer (G) wird noch folgende schwächere Eigenschaft betrachtet:

$$(G') \qquad \Psi(x) = \sigma'(x).$$

Zur Definition der regulären Ideale und ihrem Zusammenhang mit der Quasiinversion sei auf LOOMIS [6], §§ 20 und 21 verwiesen.

HILFSSATZ 2. *Jedes zweiseitige reguläre maximale Rechts-(Links-)ideal M ist ein reguläres zweiseitiges Ideal und jede Links-(Rechts-)einheit bezüglich M ist eine Einheit bezüglich M.*

BEWEIS. Sei j Linkseinheit bezüglich M, dann ist $j^2 \notin M$, A/M ist also keine Nullalgebra, nach [3], Th. 24.6.1 daher ein Schiefkörper, enthält mithin ein Einselement, das natürlich mit der Linkseinheit j zusammenfallen muß. M ist folglich ein reguläres zweiseitiges Ideal mit relativer Einheit j.

Dies braucht für beliebige (nicht maximale) Ideale nicht zu gelten:

BEISPIEL 1. A sei die durch die Relationen $b^2 = ba = 0$, $ab = b$, $a^2 = a$ ihrer Basiselemente a und b bestimmte zweidimensionale (Banach-)Algebra. a ist hier Linkseinheit, eine Rechtseinheit existiert nicht. Das (zweiseitige) Nullideal ist also nur als Rechtsideal regulär.

HILFSSATZ 3. *In A sei jedes x, das keine R.q.i. besitzt, Einheit bezüglich eines regulären zweiseitigen maximalen Ideals. Dann besitzt x genau dann eine Q.i., wenn es eine R.q.i. oder eine L.q.i. besitzt. (Das gleiche gilt natürlich auch, wenn in der Voraussetzung R.q.i. durch L.q.i. ersetzt wird.*[1])

BEWEIS. x besitze keine R.q.i. Dann gibt es ein reguläres zweiseitiges maximales Ideal M mit x als relativer Einheit. x kann daher auch keine L.q.i. besitzen. Es folgt: Wenn x eine L.q.i. besitzt, dann auch eine R.q.i., also auch eine Q.i. Sei nun y die R.q.i. von x, dann ist x die L.q.i. von y, y hat eine Q.i., diese muß gleich x sein, y ist die Q.i. von x.

Eine Umkehrung gilt nicht. Insbesondere ist die Folgerung des Satzes (im Gegensatz zur Voraussetzung) keine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von (G) in Banach-Algebren:

BEISPIEL 2. A sei die Banach-Algebra $\mathfrak{E}(\mathbf{C}^n)$ aller linearen Endomorphismen des n-dimensionalen komplexen Vektorraums. Eine singuläre Matrix hat weder Rechts- noch Linksinverse. A erfüllt also die Folgerung des Hilfssatzes, hat aber bekanntlich kein nichttriviales zweiseitiges Ideal.

SATZ 1. (G') (*bzw.* (G)) *gilt genau dann, wenn jedes x, das keine R.q.i. besitzt, Linkseinheit bezüglich eines regulären (bzw. abgeschlossenen regulären) Rechtsideals der Kodimension 1 ist. Eine analoge Aussage gilt für Linksideale.*

BEWEIS. 1. Diese Ideale sind sämtlich maximal und zweiseitig. Sei j eine Linkseinheit zu I. Dann hat jedes $y \in A$ die Form $\alpha j + i$, $i \in I$, also $yI \subset I$, da $jI \subset I$. Die Maximalität folgt unmittelbar. Die Regularität ist notwendig

[1]) Diesen Hilfssatz wie auch einige weitere Anregungen verdanke ich Herrn ULRICH BECK, Metzingen.

für den Schluß. Das von a in Beispiel 1 erzeugte Linksideal hat die Kodimension 1, ist aber nicht zweiseitig.

2. Es gelte nun (G'). x besitze keine R.q.i., also auch keine Q.i., d.h. $1 \in \sigma'(x)$. Es gibt ein ψ mit $\psi(x)=1$. Sei $I=\{y \mid \psi(y)=0\}$. $\psi(xz-z)=\psi(x)\psi(z)-\psi(z)=0$, also ist $xz-z \in I$ für alle z. Außerdem hat I die Kodimension 1. Gilt (G), so kann man $\psi \in \Phi$ wählen und I ist abgeschlossen.

3. Sei umgekehrt die Bedingung erfüllt und $\lambda \in \sigma'(x)$. Es gilt, ein ψ zu finden mit $\psi(x)=\lambda$. Für $\lambda=0$, $e \notin A$ erfüllt $\psi \equiv 0$ die Forderung. Ist $\lambda=0$, $e \in A$, so setze man $y=e-x$, ist $\lambda \neq 0$, so sei $y=x/\lambda$. Man kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda=1$ annehmen: x hat keine Q.i., nach 1. und Hilfssatz 3 also auch keine R.q.i., x ist mithin nach Voraussetzung Einheit bezüglich eines regulären zweiseitigen maximalen Ideals M der Kodimension 1, d.h. $A/M \cong \mathbf{C}$, $x \notin M$, $x^2-x \in M$. Der durch A/M definierte Homomorphismus ψ bildet x auf 1 ab. Ist M abgeschlossen, so ist ψ sogar stetig.

Das Quasiradikal Q besteht aus allen Elementen x mit $\sigma'(x) \subset \{0\}$, das Radikal R ist das größte in Q enthaltene zweiseitige Ideal (vgl. Hille-Phillips [3], p. 699. Es handelt sich hier um das Jacobsonsche Radikal). Q braucht selbst kein Ideal zu sein, ist es eines, so ist $Q=R$.

Hilfssatz 4. *Gilt* (G'), *so ist* $Q=R$.

Beweis. Q besteht aus allen Elementen mit $\sigma'(x)=\{0\}$. Denn da z.B. $\sigma'(0)=\{0\}$, kann Ψ nicht leer sein, also kann auch $\sigma'(x)$ nicht leer sein. Q ist der Durchschnitt aller Nullideale der Abbildungen ψ, mithin selbst ein Ideal, d.h. $Q=R$.

Die Umkehrung braucht selbst für Banach-Algebren nicht zu gelten:

Beispiel 3. Die formalen Potenzprodukte in zwei Variablen sind abzählbar. Sei $\{z_\nu\}$ eine solche Abzählung, d.h. die z_ν haben die Gestalt $a_1 a_2, \ldots, a_n$, wo $a_\mu = x$ oder $a_\mu = y$. A bestehe aus allen formalen Reihen $\sum \alpha_\nu z_\nu$, für die $\sum |\alpha_\nu|$ konvergiert. In A sei die Norm $\|\sum \alpha_\nu z_\nu\| = \sum |\alpha_\nu|$ eingeführt. Damit ist A offenbar ein (zu l^1 isomorpher) Banach-Raum. Nun ist $\sum\limits_\nu |\alpha_\nu| \sum\limits_\mu |\beta_\mu| = \sum\limits_{\nu,\mu} |\alpha_\nu|\,|\beta_\mu|$, wobei die zweite Reihe konvergiert und sich beliebig umordnen und zusammenfassen läßt. Definiert man das (nichtkommutative!) Produkt von $\sum\limits_\nu \alpha_\nu z_\nu$ und $\sum\limits_\mu \beta_\mu z_\mu$, wie sich dies aus dem Produkt der einzelnen Monome ergibt, so erhält man eine Reihe der Gestalt $\sum\limits_\tau \gamma_\tau z_\tau$, wo $\gamma_\tau = \sum\limits_{\langle \nu,\mu\rangle=\tau} \alpha_\nu \beta_\mu$ und $\langle \nu, \mu\rangle = \tau$, wenn $z_\nu z_\mu = z_\tau$. Offenbar gibt es für jedes τ nur endlich viele Paare (ν, μ) mit $\langle \nu, \mu\rangle = \tau$ und jedes Paar bestimmt genau ein τ. Also ist

$$\sum_\tau |\gamma_\tau| \leqq \sum_\tau \sum_{\langle \nu,\mu\rangle=\tau} |\alpha_\nu \beta_\mu| = \sum_{\nu,\mu} |\alpha_\nu|\,|\beta_\mu| = \sum_\nu |\alpha_\nu| \sum_\mu |\beta_\mu|.$$

Das Produkt liegt in A und die Norm ist multiplikativ. A ist eine Banach-Algebra. Sei nun $a \in A$, $a \neq 0$. a hat ein Monom kleinsten Grades mit nichtverschwindendem Koeffizienten: $\alpha_\nu z_\nu$. Es soll gezeigt werden: a^2 hat ein Monom

kleinsten Grades $z_\tau = z_\nu z_\nu$ mit dem Koeffizienten α_ν^2. Daß $z_\tau = z_\nu z_\nu$ in a^2 von kleinstem Grade ist, folgt unmittelbar. Außerdem kommt α_ν^2 in der Summe von γ_τ vor. Sei nun $\tau = \langle \nu', \mu' \rangle$. Dann sind die Grade von $z_{\nu'}$ und $z_{\mu'}$, wenn ihre Koeffizienten in a nicht verschwinden, mindestens gleich dem von z_ν und, da ihre Summe gerade zweimal den Grad von z_ν ausmachen soll, sogar gleich diesem. Dann besteht aber $z_{\nu'}$ gerade aus der ersten und $z_{\mu'}$ aus der zweiten Hälfte der Faktoren von z_τ, d.h. aber $z_{\nu'} = z_{\mu'} = z_\nu$, also ist α_ν^2 der einzige Summand in γ_τ, $\gamma_\tau = \alpha_\nu^2$. Es folgt durch Induktion: a^{2^n} hat ein Monom kleinsten Grades mit Koeffizienten $\alpha_\nu^{2^n}$. Also ist $\|a^{2^n}\| \geqq |\alpha_\nu|^{2^n}$ und, da nach einer bekannten Formel in Banach-Algebren $\max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma'(a)\} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$ gilt, ist $\max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma'(a)\} \geqq |\alpha_\nu| > 0$. Es folgt $Q = \{0\}$, also auch $R = \{0\} = Q$. Da aber $xy - yx \neq 0$, also $xy - yx \notin R$, gilt nach dem folgenden Hilfssatz auch nicht (G').

HILFSSATZ 5. *Gilt* (G'), *so liegen alle Kommutatoren* $xy - yx$ *im Radikal* R.

BEWEIS. Für jedes ψ gilt $\psi(xy - yx) = \psi(x)\psi(y) - \psi(y)\psi(x) = 0$. Also liegt $xy - yx$ in Q. Q ist aber nach Hilfssatz 4 gleich R.

HILFSSATZ 6. *Besitzt jeder Kommutator* $xy - yx$ *eine R.q.i., so ist jedes reguläre maximale Rechtsideal zweiseitig. Der Satz gilt auch, wenn man „Rechts" durch „Links" ersetzt.*

BEWEIS. Sei M ein solches Ideal, j eine Linkseinheit dazu. Es ist zu zeigen $AM \subset M$. Angenommen $AM \not\subset M$, dann gibt es ein x, so daß $xM \not\subset M$. $xM + M$ ist ein Rechtsideal, das M echt enthält, also ist $xM + M = A$. Es gibt folglich Elemente y und m in M mit $xy + m = j$. Sei z die R.$q.i.$ von $xy - yx$, also $xy - yx + z - (xy - yx)z = 0$. Durch Elimination von xy erhält man $j - m - yx + z - (j - m - yx)z = 0$ oder $j = (jz - z) - mz + m - y(xz) + yx$. Die rechte Seite liegt in M, also auch j im Widerspruch zur Voraussetzung, daß j Linkseinheit bezüglich M ist.

Es läßt sich nun leicht zeigen (Satz 3 unten), daß ein Teil der vorangehenden Aussagen im Fall einer Banach-Algebra mit (G) äquivalent ist. Dabei werden jedoch nur folgende Eigenschaften der Banach-Algebren benutzt:

(B) 1. *Besitzt* x *keine R.q.i.* (*keine L.q.i.*), *so ist* x *Linkseinheit (Rechtseinheit) bezüglich eines abgeschlossenen regulären maximalen Rechtsideals (Linksideals).* 2. *Jedes abgeschlossene reguläre zweiseitige maximale Ideal hat Kodimension* 1.

(B.1) folgt aus (G) (s. Satz 1), (B.2) nicht:

BEISPIEL 4. Sei A die Algebra aller komplexen Folgen $a = \{\alpha_\nu\}$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation. Offenbar besteht $\sigma'(a)$ aus den Elementen der Folge. $\psi_n(a) = \alpha_n$ ist ein multiplikatives Funktional, also gilt (G'). Sei $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter von Teilmengen der ganzen Zahlen $\mathbf{N}$, der keine endlichen Mengen enthält. Die Existenz solcher Ultrafilter folgt aus dem Satz von ZORN. I enthalte alle Folgen a, die auf einer Menge $\mathbf{N}' \in \mathfrak{U}$ verschwinden. I ist ein zweiseitiges maximales Ideal, seine Kodimension ist nicht 1 (sie ist nicht einmal abzählbar). Daß I ein Ideal ist, folgt aus der Filter-

eigenschaft von $\mathfrak{U}$. Sei $a \notin I$, dann gehört die Menge der ν, für die $\alpha_\nu = 0$, nicht zu $\mathfrak{U}$, folglich gehört, da $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter ist, ihr Komplement M zu $\mathfrak{U}$. Sei $\beta_\nu = \alpha_\nu^{-1}$ für $\nu \in \mathsf{M}$, im übrigen beliebig, $b = \{\beta_\nu\}$. Dann verschwindet $ab - e$ auf M, gehört also zu I. A/I ist ein Körper, I ist maximal. Sei $a = \{\nu\}$. Es gibt kein λ und keine unendliche Teilmenge M für die $\lambda - \nu = 0$ ist für $\nu \in \mathsf{M}$. Also gilt $a - \lambda e \notin I$ für alle λ, I hat nicht die Kodimension 1. Nun sei in A eine Topologie so eingeführt, daß alle ψ_n stetig sind (dann gilt (G)) und I abgeschlossen ist (dann gilt (B.2) nicht): Sei in A/I die feinste lokalkonvexe Topologie eingeführt, $\hat{q}$ eine (stetige) Halbnorm darin, dann ist auch $\hat{q}'(\hat{x}) = \hat{q}(\hat{a}\hat{x})$ eine Halbnorm und daher stetig. Sei $q(x) = \hat{q}(\hat{x})$, wo $\hat{x} = x + I$, $\|x\|_n = |\psi_n(x)|$. Die Topologie in A sei nun durch die Halbnormen $q_n(x) = q(x) + \|x\|_n$ eingeführt. $q_n(ax) = q'(x) + |\alpha_n| \, \|x\|_n$, also ist die Multiplikation stetig. Die ψ_n sind ebenfalls stetig und I ist abgeschlossen, da es der Durchschnitt der Nullräume der stetigen Halbnormen q ist. Es bleibt zu bemerken, daß A nicht folgenvollständig ist (A/I dagegen ist vollständig, vgl. KÖTHE [5], p. 217). Sei nämlich $a_n = \{\alpha_\nu^{(n)}\}$ mit $\alpha_\nu^{(n)} = 1$ für $\nu \leqq n$, $\alpha_\nu^{(n)} = 0$ für $\nu > n$. Alle a_n liegen in I. Daher ist $q(a_m - a_k) = 0$ für jedes q, außerdem $\|a_m - a_k\|_n = |\psi_n(a_m - a_k)| = 0$ für $m, k \geqq n$. Der Limes müßte in I liegen, also mindestens eine (sogar unendlich viele) verschwindende Komponenten besitzen, z. B. die ν-te. Daraus würde aber $\|a - a_n\|_\nu = 1$ folgen für $n \geqq \nu$, a_n konvergiert also gegen kein $a \in A$. Sei nun andererseits N mit der diskreten Topologie versehen. Dann ist $A = C(\mathsf{N})$. Mit der m-Topologie (HEWITT [2], Def. 3, p. 48[3])) wird A zu einem topologischen Q-Ring ([2], Th. 3 und Th. 39). Es folgt, daß die ψ_n alle stetig sind und I abgeschlossen. Es gilt also (G), aber nicht (B.2). A ist in diesem Falle sogar vollständig, wie man leicht nachprüfen kann, aber nicht lokalkonvex (es ist nicht einmal ein topologischer Vektorraum).

Es bleibt ungeklärt, ob etwa (B.2) in einer vollständigen lokalkonvexen Algebra aus (G) folgt.

A heißt eine Q-Algebra (KAPLANSKY [4]), wenn es eine Nullumgebung gibt, deren Elemente alle Q.i. besitzen. $(x/\lambda)^-$ heißt die Dissolvente von x im Punkte λ. x heißt spektralbeschränkt (in A), wenn die Dissolvente von x für genügend großes λ existiert, dort stetig ist und gegen 0 geht für $\lambda \to \infty$.

SATZ 2. (a) *Ist A eine Q-Algebra so gilt* (B.1).

(b) *Ist A lokalkonvex und ist jedes Element in A spektralbeschränkt, so gilt* (B.2).

BEWEIS. a) Läßt man das Wort „abgeschlossen" aus, so gilt (B.1) für jede Algebra (LOOMIS [6], 21.D). In einer Q-Algebra ist aber jedes reguläre maximale Ideal abgeschlossen (HILLE-PHILLIPS [3], Th. 24.6.4). Also gilt (B.1).

b) Sei M ein abgeschlossenes zweiseitiges reguläres maximales Ideal mit relativer Einheit j. A/M ist ein Schiefkörper mit Einselement $\hat{j}$, wo $\hat{x} = x + M$. Sei x gegeben. Für große λ existiert die Dissolvente $y(\lambda) = (x/\lambda)^-$. Aus

[3]) HEWITT betrachtet reelle Algebren. Der komplexe Fall läßt sich völlig analog behandeln.

$\frac{x}{\lambda}+y(\lambda)-\frac{x}{\lambda}y(\lambda)=0$ folgt $\frac{1}{\lambda}(\hat{\jmath}-\hat{y}(\lambda))(\lambda\hat{\jmath}-\hat{x})=\hat{\jmath}$ und damit $\frac{1}{\lambda}(\hat{\jmath}-\hat{y}(\lambda))=(\lambda\hat{\jmath}-\hat{x})^{-1}$. Da die Abbildung stetig ist, folgt aus der Voraussetzung, daß jedes $\hat{x}$ spektralbeschränkt ist. Die Resolvente $(\lambda\hat{\jmath}-\hat{x})^{-1}$ ist sogar überall, wo sie definiert ist, stetig und ihr Definitionsbereich ist offen. Sei nämlich $\hat{z}=(\lambda_0\hat{\jmath}-\hat{x})^{-1}$. $\hat{z}$ ist spektralbeschränkt. Damit ergibt sich unmittelbar (vgl. [8], 2.17), daß $(\lambda\hat{\jmath}-\hat{x})^{-1}$ in einer Umgebung von λ_0 definiert und stetig ist. Damit ist für A/M die Bedingung (iv') in WILLIAMSON [12], Theorem 1 erfüllt. Die Bedingungen (i'), (ii) und (iii) gelten ohnehin, da M abgeschlossen ist. Also ist $A/M\cong\mathbf{C}$, d.h. M hat die Kodimension 1.

Unter die Algebren, für die Satz 2 gilt, fallen insbesondere die Banach-Algebren oder allgemeiner die Algebren mit stetigen Inversen (WAELBROECK [9]), für die im kommutativen Falle die Gültigkeit von (G) bekannt ist. Die Voraussetzungen von Satz 2 sind jedoch noch etwas allgemeiner, wie folgendes Beispiel zeigt:

BEISPIEL 5. Sei I eine überabzählbare Indexmenge. Sei A das direkte Produkt von A_1 und A_2, wo $B_i\cong\mathbf{C}$ $(i\in I)$ und A_1 (bzw. A_2) die topologische (bzw. lokalkonvexe) direkte Summe der B_i ist (vgl. KÖTHE [5], p. 217). Sei $a\in A$ d.h. $a=\{\alpha_i;\beta_i\}$, wobei nur endlich viele α_i und β_i nicht verschwinden. A ist vollständig. Die Multiplikation sei durch $\{\alpha_i;\beta_i\}\{\alpha_i';\beta_i'\}=\{0;\alpha_i\alpha_i'\}$ erklärt. A ist eine Q-Algebra. Denn jedes Element von A besitzt die Q.i. $\{\alpha_i;\beta_i\}^-=\{-\alpha_i;-(\alpha_i^2+\beta_i)\}$, wie man leicht nachprüfen kann. Für beliebiges $\lambda\neq 0$ ist $\left(\frac{1}{\lambda}\{\alpha_i;\beta_i\}\right)^-=\left\{-\frac{\alpha_i}{\lambda};-\left(\frac{\alpha_i^2}{\lambda^2}+\frac{\beta_i}{\lambda}\right)\right\}$. Die Dissolvente ist stetig in λ und geht gegen 0 für $\lambda\to\infty$. Also sind alle a spektralbeschränkt. A ist nach Konstruktion lokalkonvex. Die Quasiinversion ist aber nicht stetig. Die Ungleichung $\sum_i|\beta_i|<1$ definiert eine Nullumgebung U in A_2. Es genügt zu zeigen, daß es in A_1 in jeder beliebigen Nullumgebung Elemente gibt, deren Q.i. in A_2 eine Komponente außerhalb U hat. Die Nullumgebungen in A_1 kann man sich in der Form $\sup_i M_i|\alpha_i|<1$ geben, wo die M_i beliebige nichtnegative reelle Zahlen sind. Sei eine solche Umgebung vorgegeben. Da I nicht abzählbar ist, muß es ein n geben, für das $M_i<\sqrt{n}$ gilt für unendlich viele i, insbesondere also für Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_{2n}$. Sei $\alpha_i=\sqrt{n^{-1}}$ für $i=i_\nu$, $\alpha_i=0$ sonst. Dann ist $\sup_i M_i|\alpha_i|<\sqrt{n}\sqrt{n^{-1}}=1$, a liegt also in der Umgebung. Für a^- gilt aber $\sum_i|\alpha_i^2|=\sum_{\nu=1}^{2n}n^{-1}=2$, a^- liegt nicht in U. Adjungiert man noch ein Einselement, so erhält man eine Algebra, die den Voraussetzungen von Satz 2 genügt, in der die Inversion aber nicht stetig ist.

Die Voraussetzungen von Satz 2 sind jedoch nicht notwendig für die Gültigkeit von (B). So gibt es kommutative lokal m-konvexe Algebren (MICHAEL [7]), die keine Q-Algebren sind und deren Elemente auch nicht alle spektralbeschränkt sind. Diese erfüllen aber alle (B). Auch die Lokalkonvexität ist nicht notwendig, wie die p-normierten Algebren zeigen (ŻELAZKO [13], Th. 7). Andererseits gibt es selbst vollständige lokalkonvexe Q-Algebren

— so die Algebra $\Phi(\Omega, \emptyset; \Omega)$ in [8], p. 161 — oder nicht lokalkonvexe Q-Algebren, deren Elemente alle spektralbeschränkt sind — so die erste Topologisierung von $C(t)$ in [12], p. 731 —, in denen (B.2) nicht gilt. Führt man schließlich in der Algebra A aller im Innern des Einheitskreises holomorphen und auf dem Rande noch stetigen Funktionen die Norm $\|x\| = \max\{|x(t)| \mid t$ reell, $|t| \leqq 1\}$ ein, so ist A lokalkonvex und jedes x in A spektralbeschränkt. A ist jedoch keine Q-Algebra und erfüllt auch (B.1) nicht. Die beiden letzten Algebren sind allerdings nicht vollständig.

Satz 3. *Man betrachte die folgenden Aussagen:*

1. Es gilt (G). 2. Es gilt (G'). 3. Besitzt x keine R.q.i., so ist es Einheit bezüglich eines regulären zweiseitigen abgeschlossenen maximalen Ideals. 4. Besitzt x keine L.q.i., so ist es Einheit bezüglich eines regulären zweiseitigen abgeschlossenen maximalen Ideals. 5. Jedes maximale reguläre Rechtsideal ist zweiseitig. 6. Jedes maximale reguläre Linksideal ist zweiseitig. 7. Jeder Kommutator $xy - yx$ liegt im Radikal. 8. Jeder Kommutator liegt im Quasiradikal. 9. Jeder Kommutator besitzt eine Q.i. 10. Jeder Kommutator besitzt eine R.q.i. 11. Jeder Kommutator besitzt eine L.q.i.

Zwischen ihnen bestehen die durch das Diagramm dargestellten Abhängigkeiten:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 3 & & & & & & & & 10 & \to & 5 \\ & \searrow & & & & & & \nearrow & & & \\ & & 1 & \to & 2 & \to & 7 & \to & 8 & \to & 9 \\ & \nearrow & & & & & & \searrow & & & \\ 4 & & & & & & & & 11 & \to & 6. \end{array}$$

Aus (B.1) *folgt außerdem* $5 \to 3$ *und* $6 \to 4$, *aus* (B.2) $3 \to 1$ *und* $4 \to 1$.

Gilt insbesondere (B), *so sind alle Aussagen äquivalent.*

Beweis. Die Folgerungen $1 \to 2$, $7 \to 8$, $8 \to 9$, $9 \to 10$, $9 \to 11$ ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen. $2 \to 7$ ist der Inhalt von Hilfssatz 5. Hilfssatz 6 liefert $10 \to 5$ und $11 \to 6$. $1 \to 3$ und $1 \to 4$ folgen aus Satz 1. Es mögen nun (B.1) und 5 gelten. x besitze keine R.q.i., sei also Einheit bezüglich eines abgeschlossenen regulären maximalen Rechtsideals. Dieses ist aber nach 5 und Hilfssatz 2 ein reguläres zweiseitiges maximales Ideal mit Einheit x. Analog folgt $6 \to 4$. Sei (B.2) erfüllt. Es genügt $3 \to 1$ zu zeigen. Jedes der in 3 aufgeführten Ideale hat Kodimension 1. Damit folgt die Behauptung aus Satz 1.

Die in Satz 3 enthaltene Implikation $5 \to 1$ verallgemeinert den üblichen Satz für kommutative und auch den für zweiseitige Banach-Algebren (vgl. [3], 24.9.9). Dazu zwei Beispiele:

Beispiel 6. Sei A_1 (bzw. A_2) die dreidimensionale Algebra mit den Basiselementen a, b, c und den Relationen $cx = xc = 0$ für alle x, $a^2 = b^2 = 0$, $ab = -ba = c$ (bzw. $cx = xc = 0$, $a^2 = b^2 = ba = 0$, $ab = c$). Sei A_1^+ (bzw. A_2^+) die durch Adjunktion eines Einselementes aus A_1 (bzw. A_2) erhaltene (Banach-) Algebra. Die Ideale in A_1^+ sind alle zweiseitig. A_1^+ ist jedoch nicht kommutativ. In A_2^+ sind alle maximalen Rechtsideale zweiseitig (A_2 ist das einzige), dagegen erzeugt b ein (nicht zweiseitiges) Rechtsideal und a ein ebensolches Linksideal. A_2^+ ist also nicht zweiseitig.

Daß einige der in den Beispielen vorkommenden Algebren Radikalalgebren sind, die vom Standpunkt des Satzes von GELFAND wenig Bedeutung haben, da er in ihnen trivialerweise gilt, hat seinen Grund darin, daß es bei den behandelten Kriterien im wesentlichen um Eigenschaften des Radikals geht. Man kann leicht Beispiele finden, die keine Radikalalgebren sind. Man erweitere etwa diese Radikalalgebren oder betrachte z.B. passende Algebren von Dreiecksmatrizen oder Integraloperatoren.

Zum Abschluß noch zwei Fälle, die in Satz 3 nicht oder nur unbefriedigend behandelt sind:

Für die vollständigen lokal m-konvexen Algebren gilt ebenfalls, wenn sie kommutativ sind, der Satz von GELFAND (MICHAEL [7], 5.6). Es gelten dort auch (B.1) und (B.2). Für die Ableitung von (B.1) wird aber auch die Kommutativität benutzt ([7], 5.9). Es ist also nicht möglich, ohne weiteres Satz 3 auf vollständige lokal m-konvexe Algebren zu übertragen. Es bleibt insbesondere die Frage, ob Kommutativität modulo dem Radikal genügt, damit (B.1) gilt (vgl. dazu [7], § 9). Dagegen ergibt sich unmittelbar eine hinreichende Bedingung aus der Darstellung der vollständigen lokal m-konvexen Algebren als projektiver Limes von Banach-Algebren. Man vgl. auch [13], § 8.

SATZ 4. *Ist A projektiver Limes (bzw. topologischer projektiver Limes) von Algebren A_i und gilt in jedem A_i* (G′) (*bzw.* (G)), *so auch in A*[3]).

BEWEIS. Es genügt zu zeigen: Wenn x keine Q.i. besitzt, so existiert ein $\varphi \in \Psi$ (bzw. $\in \Phi$) mit $\varphi(x)=1$. Es gibt ein i, so daß $x_i=\pi_i(x)$ keine Q.i. besitzt. Der Beweis verläuft wie in [7], Th. 5.2.a. Folglich gibt es ein $\varphi_i \in \Psi_i$ mit $\varphi_i(x_i)=1$. $\varphi(x)=\varphi_i(\pi_i(x))$ ist das gewünschte Funktional. Ist A topologischer projektiver Limes und gilt (G) in A_i, so sind φ_i und π_i stetig und damit auch φ.

Es bleibt die Frage offen, ob bei vollständigen lokal m-konvexen Algebren die Umkehrung gilt: Es gelte (G). Existiert dann ein Fundamentalsystem von multiplikativ konvexen Nullumgebungen U_i, so daß (G) für alle $\bar{A}_i$ gilt?

Der zweite Fall betrifft ein Ergebnis von WAELBROECK ([10], § 5) über die Gültigkeit von (G′), das in Satz 5 verallgemeinert wird.

HILFSSATZ 7. *Es existiere in A eine submultiplikative Halbnorm $h(a)$ mit der Eigenschaft* $\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma'(a)\} \leqq h(a)$. *Außerdem liege jeder Kommutator $xy-yx$ im Radikal. Dann gilt* (G′).

BEWEIS. x besitze keine Q.i., sei also Einheit bezüglich eines regulären maximalen einseitigen Ideals M. Sei $M'=\{a \mid \inf\{h(a-m) \mid m \in M\} \neq 0\}$. M' ist ein (einseitiges) Ideal, das M enthält, nach Hilfssatz 6 ist es daher zweiseitig. $x-m$ ist Einheit modulo M für jedes $m \in M$, d.h. $1 \in \sigma'(x-m)$, also $h(x-m) \geqq 1$ für alle m, $x \notin M'$. Es folgt $M=M'$. M' ist offenbar bezüglich der Halbnorm h abgeschlossen. Also ist A/M ein normierter Körper. Es folgt $A/M \cong \mathbf{C}$, M hat Kodimension 1. Damit folgt die Behauptung aus Satz 1.

[3]) Zu den Definitionen vgl. man MICHAEL [7] und KÖTHE [5], p. 232. Man beachte nur, daß die benutzten Abbildungen hier Algebrenhomomorphismen sein müssen.

SATZ 5. *Sei A lokalkonvex und folgenvollständig. Das von den Kommutatoren erzeugte zweiseitige abgeschlossene Ideal I liege im Radikal. Dann gibt es eine alle spektralbeschränkten Elemente x umfassende Teilalgebra A^*, für die (G') gilt.*

BEWEIS. Sei $a \in A$, $\hat{a}$ die Restklasse in A/I, $\tilde{a}$ die Restklasse in A/R. Dann ist bekanntlich $\sigma'(a)=\sigma'(\tilde{a})$. Andererseits gilt $\sigma'(a) \geq \sigma'(\hat{a}) \geq \sigma'(\tilde{a})$. Also gilt $\sigma'(a)=\sigma'(\hat{a})$. Sei $h(a)=\inf\{M \mid \{a^n M^{-n}\}$ beschränkt$\}$. a ist genau dann spektralbeschränkt, wenn $h(a)<\infty$. A/I braucht als lokalkonvexe Algebra nicht mehr folgenvollständig zu sein. Sei darum in A die durch die lokalkonvexe Topologie bestimmte Schrankenstruktur eingeführt[4]). A ist dann eine vollständige Schrankenalgebra (algèbre à bornés). I ist auch für die Schrankenstruktur abgeschlossen. A/I ist eine vollständige Schrankenalgebra. Von der Schrankenstruktur in A/I ausgehend kann man nun definieren $h(\hat{a})=\inf\{M \mid \{\hat{a}^n M^{-n}\}$ beschränkt$\}$. Dann ist $h(\hat{a}) \leqq h(a)$. Sei $\hat{h}(a)=h(\hat{a})$. A^* bestehe aus allen a mit $\hat{h}(a)<\infty$. A/I ist kommutativ, man erhält daher in gleicher Weise wie in [*10*], p. 47, daß $h(\hat{a})$ in A^*/I eine submultiplikative Halbnorm ist. Damit folgt das gleiche für $\hat{h}(a)$ in A^*. Es bleibt nur zu zeigen, daß für $|\lambda|>\hat{h}(a)$ die Dissolvente $(a/\lambda)^-$ existiert und in A^* liegt. Dann läßt sich Hilfssatz 7 anwenden und ergibt die Behauptung. Man kann wieder auf $\lambda=1$ reduzieren. Sei also $\hat{h}(a)<q'<q<1$. Dann ist $\{\hat{a}^n q'^{-n}\}$ beschränkt, nach [*11*], 2.5 konvergiert also $-\sum_1^\infty \hat{a}^n$ gegen ein Element aus A/I und es folgt unmittelbar aus der Stetigkeit der Multiplikation in der Schrankenalgebra A/I, daß dieser Limes gleich $\hat{a}^-$ ist. Da aber $\sigma'(\hat{a})=\sigma'(a)$, existiert auch a^- und es ist $\widehat{a^-}=\hat{a}^-$. Es bleibt zu zeigen $\hat{h}(a^-)=h(\hat{a}^-)<\infty$. Aus den Voraussetzungen folgt, daß $(\hat{a}^-)^m=\sum_m^\infty \gamma_{n,m}\hat{a}^n$, wo $\sum \gamma_{n,m}\hat{a}^n$ die formal gebildete Potenz der Reihe für $\hat{a}^-$ ist. $\{\hat{a}^n q'^{-n}\}$ ist beschränkt, also gibt es eine beschränkte Menge B, so daß $\sum \alpha_n \hat{a}^n \in B$, wenn $\sum |\alpha_n|\, q'^n \leqq q(1-q)^{-1}$ ist. Es ist $\gamma_{n,2}=n$. Sei $M=(1-q'q^{-1})^{-1}$, M_1 so, daß $n \leqq M_1 M^2 (qq'^{-1})^n$. Aus $\gamma_{n,m}=\sum_\mu \gamma_{\mu,m-1}$ folgt durch Induktion $\gamma_{n,m} \leqq M_1 M^m (qq'^{-1})^n$ und damit $\sum_n |\gamma_{n,m} M^{-m}|\, q'^n \leqq M_1 \sum q^n \leqq M_1 q(1-q)^{-1}$. Also ist $\{(\hat{a}^-)^m M^{-m}\} < M_1 B$ und daher $h(\hat{a}^-) \leqq M$.

Literatur

[*1*] GELFAND, I.: Normierte Ringe. Matemat. Sbornik, N.S. **9** (51), 3–24 (1941).

[*2*] HEWITT, E.: Rings of real-valued continuous functions. I. Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 45–99 (1948).

[*3*] HILLE, E., and R. S. PHILLIPS: Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **31** (1957).

[*4*] KAPLANSKY, I.: Topological Rings. Amer. J. Math. **69**, 153–183 (1947).

[*5*] KÖTHE, G.: Topologische lineare Räume. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[4]) Zu den Definitionen und Sätzen über Schrankenalgebren s. WAELBROECK [*11*], insbes. die Abschnitte 1.6, 2.2, 2.5 und 7.4.

[6] LOOMIS, L. H.: An introduction to abstract harmonic analysis. New York 1953.
[7] MICHAEL, E. A.: Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc. **11** (1952).
[8] NEUBAUER, G.: Zur Spektraltheorie in lokalkonvexen Algebren. Math. Ann. **142**, 131–164 (1961).
[9] WAELBROECK, L.: Les algèbres a inverse continu. C. R. Acad. Sci. (Paris) **238**, 640–641 (1954).
[10] — Algèbres commutatives: éléments réguliers. Bull. Soc. Math. de Belgique. **9**, 42–48 (1957).
[11] — Étude spectrale des algèbres complètes. Mem. de l'Acad. Royale de Belgique, Cl. d. Sci. **31**, Fasc. 7 (1960).
[12] WILLIAMSON, J. H.: On topologizing the field $C(t)$. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 729–734 (1954).
[13] ŻELAZKO, W.: On the locally bounded and m-convex topological algebras. Studia Math. **19**, 333–356 (1960).

Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

(Eingegangen am 14. April 1961)

JÖRGENS, K.
Math. Zeitschr. 77, 295–308 (1961)

Das Anfangswertproblem im Großen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

KONRAD JÖRGENS

Einleitung

In einer früheren Arbeit [3] wurden nichtlineare Wellengleichungen betrachtet, die als Feldgleichungen einer nichtlinearen klassischen Mesonentheorie in Betracht kommen. Unter diesen wurde eine ausgezeichnete Klasse durch Bedingungen charakterisiert, die für die Lösbarkeit des Anfangswertproblems *im Großen* notwendig sind. Auf die umgekehrte Frage, ob für die so ausgezeichneten Wellengleichungen und zu beliebigen Anfangswerten stets eine Lösung im Großen existiert, wurde nur eine recht unvollständige Antwort gegeben, wobei die wesentliche Einschränkung die auf den Fall *einer* Raumvariablen war.

Die vorliegende Arbeit enthält einen weiteren Beitrag zu diesem Problem. Es werden die *semilinearen* Wellengleichungen der Form

$$u_{tt} - \Delta u + F'(|u|^2)\, u = 0$$

in *drei* Raumvariablen betrachtet und es wird gezeigt, daß zu beliebigen Anfangswerten, die den üblichen Differenzierbarkeitsbedingungen genügen, stets eine wohlbestimmte, zweimal stetig differenzierbare Lösung im Großen existiert, falls die Funktion $F(s)$, die durch $F(0)=0$ normiert sei, den Bedingungen $A+F(s)>0$ und

$$|F'(s)| \leqq a\,[A+F(s)]^{\alpha}$$

mit geeigneten positiven Konstanten a, A und $\alpha<\frac{2}{3}$ genügt. Dies ist im wesentlichen eine *Wachstumsbeschränkung* für $F(s)$, denn es folgt daraus

$$-A < F(s) \leqq \{A^{1-\alpha} + a\,(1-\alpha)\,s\}^{\frac{1}{1-\alpha}} - A$$

mit $\frac{1}{1-\alpha}<3$. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist $F(s)=\mu^2 s+\frac{1}{2}\eta^2 s^2$; die zugehörige Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u + \mu^2 u + \eta^2 |u|^2 u = 0$$

ist die Mesonengleichung von SCHIFF [5].

Es liegt nahe, ausgehend von den gewonnenen Lösungen, durch Grenzübergang *allgemeinere* Lösungen zu konstruieren. Dies ergibt sich ganz von

selbst, wenn man eine Topologie gefunden hat derart, daß die Lösungen im Sinne dieser Topologie stetig von ihren Anfangswerten abhängen. Die verallgemeinerten Lösungen genügen dann auch sog. fortsetzbaren Anfangsbedingungen im Sinne von FRIEDRICHS und LEWY [2]. Es zeigt sich nun, daß man verallgemeinerte Lösungen zu beliebigen Anfangswerten finden kann, die den allgemeinsten in [2] für die lineare Wellengleichung formulierten Bedingungen genügen, d.h. Lösungen, die samt ihren ersten Ableitungen für jedes feste t lokal quadratisch bezüglich der Raumvariablen integrierbar sind. Allerdings muß dazu von der Funktion $F(s)$ zusätzlich $F(s) \geqq 0$ und $|F''(s)| \leqq b$ mit einer geeigneten Konstanten b verlangt werden. Auch diese Bedingungen sind für die Mesonengleichung von SCHIFF offenbar erfüllt.

Alle Beweise stützen sich auf den Energiesatz, der aus der Wellengleichung folgt; die verschiedenen Bedingungen für $F(s)$ hängen eng mit dieser Methode zusammen, und es wird keinerlei Aussage darüber gewonnen, ob sie *notwendig* sind. Für den Fall *einer* Raumvariablen wurden in [3], §5 analoge Existenzsätze bewiesen, wobei $F(s)$ keinerlei Wachstumsbeschränkungen unterworfen wurde. Für mehr als drei Raumvariable versagt die Methode der vorliegenden Arbeit.

§ 1. Das Anfangswertproblem im Kleinen

Es sei $F(s)$ reellwertig und $F(s) \in C^3[0, \infty)$[1]; außerdem sei F durch die Vorschrift $F(0) = 0$ normiert, was für die Differentialgleichung ohne Bedeutung ist. Gesucht ist eine komplexwertige Lösung $u(x, t) = u(x_1, x_2, x_3, t)$ der Differentialgleichung

$$u_{tt} - \Delta u + F'(|u|^2)\, u = 0$$

für $t > 0$, welche für $t = 0$ den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

genügt, wo $\varphi(x)$, $\psi(x)$ gegebene komplexwertige Funktionen sind.

Zur Orientierung wird das entsprechende Problem für die lineare Wellengleichung $v_{tt} - \Delta v = 0$ betrachtet. Darüber ist unter anderem folgendes bekannt[2]:

(1) Ist $\varphi(x) \in C^3$, $\psi(x) \in C^2$, so gibt es genau eine zweimal stetig differenzierbare Lösung, nämlich

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[t\, M\{\varphi | x; t\}\right] + t\, M\{\psi | x; t\},$$

worin

$$M\{f | x; t\} = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} f(x + t\xi)\, d\xi$$

das sphärische Mittel von f, genommen über die Oberfläche der Kugel $K_t(x)$ vom Radius t mit Mittelpunkt x, bezeichnet. Aus der Lösungsformel sieht

[1]) Das heißt dreimal stetig differenzierbar im Intervall $0 \leqq s < \infty$.

[2]) Vgl. z.B. [1], Kap. VI, §5.

man, daß die Werte der Lösung in dem Bereich

$$B\left(K_\varrho(x_0)\right) = \{x, t | t \geqq 0,\ |x - x_0| + t < \varrho\}$$

nur von den Werten von φ und ψ in $K_\varrho(x_0)$ abhängen; man nennt B daher den Bestimmtheitsbereich zum Gebiet $K_\varrho(x_0)$. Ist $G \subset R^3$ eine beliebige offene Menge, so ist der Bestimmtheitsbereich $B(G)$ die Vereinigung aller $B(K)$ mit $K \subset G$.

(2) Sei $f(x, t) \in C^2$; dann ist

$$w(x, t) = v(x, t) + \int_0^t (t - \tau)\, M\{f | x, \tau; t - \tau\}\, d\tau$$

die einzige zweimal stetig differenzierbare Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $w_{tt} - \Delta w = f(x, t)$ mit den vorgeschriebenen Anfangswerten. Darin bedeutet

$$M\{f | x, \tau; \varrho\} = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} f(x + \varrho\, \xi, \tau)\, d\xi .$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß das Anfangswertproblem für die nichtlineare Wellengleichung der Integralgleichung

$$u(x, t) = v(x, t) - \int_0^t (t - \tau)\, M\{F'(|u|^2)\, u | x, \tau; t - \tau\}\, d\tau$$

äquivalent ist in dem Sinne, daß jede zweimal stetig differenzierbare Lösung des einen Problems auch Lösung des anderen Problems ist. Gibt es zu beliebigen Anfangswerten $\varphi \in C^3$, $\psi \in C^2$ genau eine Lösung $u \in C^2$, so hängen die Werte von u in jedem $B(K)$ nur von den Werten von φ und ψ in K ab, da dies für die Lösung der Integralgleichung richtig ist. Die Bestimmtheitsbereiche $B(G)$ der linearen Wellengleichung sind also zugleich auch Bestimmtheitsbereiche der nichtlinearen Wellengleichung. Nun wird aber, wie einfache Beispiele zeigen, die Lösung des nichtlinearen Problems im allgemeinen nicht in ganz $B(G)$, sondern nur in einer gewissen Nachbarschaft der Anfangsmannigfaltigkeit, d.h. für hinreichend kleine t existieren. Die Frage nach solchen Lösungen wird das Anfangswertproblem *im Kleinen* genannt; im vorliegenden Fall wird sie durch den folgenden Satz beantwortet.

Satz 1. *Es sei G ein Gebiet des R^3 und es seien Anfangswerte $\varphi(x) \in C^3(G)$, $\psi(x) \in C^2(G)$ mit*

$$|\varphi| \leqq c, \quad |\operatorname{grad} \varphi| \leqq c, \quad |\psi| \leqq c \quad \text{für} \quad x \in G$$

gegeben. Dann gibt es eine nur von c und von $F(s)$ abhängige Zahl $T > 0$ derart, daß das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung

$$u_{tt} - \Delta u + F'(|u|^2)\, u = 0$$

in dem Teilbereich $t \leqq T$ von $B(G)$ genau eine zweimal stetig differenzierbare Lösung besitzt.

BEWEIS. Man erhält die gesuchte Lösung durch Anwendung des Iterationsverfahrens auf die äquivalente Integralgleichung, d.h. man setzt $u^{(1)}(x,t)=v(x,t)$ und

$$u^{(n+1)}(x,t)=v(x,t)-\int_0^t (t-\tau)\,M\{F'(|u^{(n)}|^2)\,u^{(n)}|\,x,\tau;t-\tau\}\,d\tau$$

für $n=1,2,3,\ldots$. Offenbar ist $u^{(n)}(x,t)\in C^2(B(G))$. Als Vorbereitung des Konvergenzbeweises hat man dann zunächst die gleichmäßige Beschränktheit der Folge $u^{(n)}(x,t)$ nachzuweisen. Es gilt

$$v(x,t)=M\{\varphi|\,x;t\}+\frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1}(\xi,\operatorname{grad}\varphi(x+t\xi))\,d\xi+t\,M\{\psi|\,x;t\}$$

und folglich $|v(x,t)|\leqq(1+2t)c$. Sei nun

$$c_1=\max_{0\leqq s\leqq 4c^4}|F'(s)|$$

und

$$T=\min\{\tfrac{1}{4},(2c_1)^{-\frac{1}{2}}\}.$$

Dann gilt $|u^{(n)}(x,t)|\leqq 2c$ für $t\leqq T$ und für $n=1,2,3,\ldots$. Dies ist nämlich richtig für $n=1$; gilt es für n, so folgt aus der Rekursionsformel

$$\begin{aligned}|u^{(n+1)}(x,t)|&\leqq|v(x,t)|+\int_0^t(t-\tau)\,M\{|F'(|u^{(n)}|^2)\,u^{(n)}|\,|\,x,\tau;t-\tau\}\,d\tau\\&\leqq(1+2t)\,c+t^2c\,c_1\leqq 2c.\end{aligned}$$

Es bleibt nun die Konvergenz der Folge $u^{(n)}(x,t)$ sowie der Folgen der ersten und zweiten Ableitungen für $t\leqq T$ und die Einzigkeit der Lösung der Integralgleichung zu beweisen. Dieser Teil des Beweises ist zwar mühsam, aber vollkommen selbstverständlich und kann daher übergangen werden.

§ 2. Das Anfangswertproblem im Großen

Es soll nun gezeigt werden, daß die in §1 konstruierte Lösung des Anfangswertproblems sogar *im Großen*, d.h. im ganzen Bestimmtheitsbereich $B(G)$ existiert, falls über die Funktion $F(s)$ weitere Annahmen gemacht werden. Ist G insbesondere der ganze Raum R^3, so ergibt sich die Existenz einer wohlbestimmten Lösung im ganzen Halbraum $t>0$.

SATZ 2. *Für die Funktion $F(s)\in C^3[0,\infty)$ mit $F(0)=0$ gelte*

$$A+F(s)>0\quad\textit{und}\quad|F'(s)|\leqq a[A+F(s)]^\alpha$$

für $0\leqq s<\infty$ mit geeigneten positiven Konstanten a, A und $\alpha<\frac{2}{3}$. Für jedes Gebiet $G\subset R^3$ und zu beliebigen Anfangswerten $\varphi(x)\in C^3(G)$, $\psi(x)\in C^2(G)$ gibt es dann genau eine Lösung $u(x,t)\in C^2(B(G))$ des Anfangswertproblems für die Differentialgleichung

$$u_{tt}-\Delta u+F'(|u|^2)\,u=0.$$

Für den Beweis wird ein Hilfssatz benötigt, der aus dem *Energiesatz* folgt; als solchen bezeichnet man die Identität

$$\frac{\partial}{\partial t}\{|u_t|^2+|\operatorname{grad} u|^2+F(|u|^2)\}=2\operatorname{Re}\operatorname{div}(\bar{u}_t\operatorname{grad} u),$$

die für jede Lösung der Differentialgleichung gilt. Hierin bezeichnet Re den Realteil, grad und div bedeuten die Operationen „Gradient" und „Divergenz" bezüglich der Raumvariablen. Ist $K=K_\tau(x_0)$ eine Kugel in R^3 und $u(x,t)\in C^2(\overline{B(K)})$, so erhält man aus dem Energiesatz durch Integration über $B(K)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_M\{|u_t|^2+|\operatorname{grad} u|^2+F(|u|^2)-2\operatorname{Re}\bar{u}_t(n,\operatorname{grad} u)\}\,dS$$
$$=\int_K\{|u_t|^2+|\operatorname{grad} u|^2+F(|u|^2)\}\,dx.$$

Darin bedeutet M den Kegelmantel $|x-x_0|+t=\tau$, $0\leqq t\leqq\tau$, der zusammen mit K den Rand von $B(K)$ bildet. Die äußere Normale auf M hat die t-Komponente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und die x_i-Komponente $\frac{1}{\sqrt{2}}n_i$, $i=1,2,3$ mit $\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1$. Das Oberflächenelement auf M ist mit dS bezeichnet. Nun ist offenbar

$$|u_t|^2+|\operatorname{grad} u|^2-2\operatorname{Re}\bar{u}_t(n,\operatorname{grad} u)\geqq 0,$$

folglich

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_M F(|u|^2)\,dS\leqq\int_K\{|u_t|^2+|\operatorname{grad} u|^2+F(|u|^2)\}\,dx.$$

Dies kann man auch in der Form

$$\int_0^\tau(\tau-t)^2M\{F(|u|^2)\mid x_0,t;\tau-t\}\,dt\leqq 4\pi\int_{K_\tau(x_0)}\{|\psi|^2+|\operatorname{grad}\varphi|^2+F(|\varphi|^2)\}\,dx$$

schreiben, wenn φ und ψ die Werte von u und u_t für $t=0$ sind.

Hilfssatz 1. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 sei $K=K_\varrho(x_0)$ eine Kugel und $u(x,t)\in C^2(B(K))$ eine Lösung der Differentialgleichung*

$$u_{tt}-\Delta u+F'(|u|^2)\,u=0$$

mit Anfangswerten $\varphi(x)\in C^3(\overline{K})$, $\psi(x)\in C^2(\overline{K})$.

Behauptung: Es gibt eine nur von den Anfangswerten (und von der Funktion $F(s)$) abhängige Zahl c derart, daß

$$|u(x,t)|\leqq c,\quad |\operatorname{grad} u|\leqq c,\quad |u_t|\leqq c$$

für $(x,t)\in B(K)$ gilt.

Beweis. In $B(K)$ ist $t\leqq\varrho$; folglich gibt es eine nur von den Anfangswerten abhängige Zahl c_2 mit

$$|v(x,t)|\leqq c_2,\quad |\operatorname{grad} v|\leqq c_2,\quad |v_t|\leqq c_2$$

in $B(K)$. Aus der Integralgleichung für u folgt damit und nach Voraussetzung über $F(s)$

$$|u(x,t)| \leqq |v(x,t)| + \int_0^t (t-\tau)\, M\{|F'(|u|^2)\, u|\,|x,\tau;t-\tau\}\, d\tau$$

$$\leqq c_2 + a\int_0^t (t-\tau)\, M\{[A+F(|u|^2)]^\alpha |u|\,|x,\tau;t-\tau\}\, d\tau$$

$$\leqq c_2 + a\left[\int_0^t (t-\tau)^2 M\{A+F(|u|^2)\,|x,\tau;t-\tau\}\, d\tau\right]^\alpha \times$$

$$\times \left[\int_0^t (t-\tau)^{2-p} M\{|u|^p\,|x,\tau;t-\tau\}\, d\tau\right]^{1/p}.$$

Dabei wurde die Höldersche Ungleichung mit $p = \frac{1}{1-\alpha} < 3$, $p' = \frac{1}{\alpha}$ auf das dreifache Integral $\int M\{\ldots\}\, d\tau$ mit dem Integranden

$$(t-\tau)\,[A+F(|u|^2)]^\alpha |u| = (t-\tau)^{\frac{2}{p'}} [A+F(|u|^2)]^{\frac{1}{p'}} (t-\tau)^{\frac{2-p}{p}} |u|$$

angewandt. Nach der oben abgeleiteten Ungleichung gilt für $(x,t) \in B(K)$

$$\int_0^t (t-\tau)^2 M\{F(|u|^2)\,|x,\tau;t-\tau\}\, d\tau \leqq 4\pi \int_{K_t(x)} \{(|\psi|^2 + |\operatorname{grad}\varphi|^2 + F(|\varphi|^2)\}\, d\xi$$

$$\leqq 4\pi \int_{K_\varrho(x_0)} \{|\psi|^2 + |\operatorname{grad}\varphi|^2 + A + F(|\varphi|^2)\}\, d\xi = c_3,$$

folglich

$$|u(x,t)| \leqq c_2 + a\left[c_3 + \frac{A}{3}t^3\right]^\alpha \left[\int_0^t (t-\tau)^{2-p} M\{|u|^p\,|x,\tau;t-\tau\}\, d\tau\right]^{1/p}$$

und

$$|u(x,t)|^p \leqq c_4 + c_5 \int_0^t (t-\tau)^{2-p} M\{|u|^p\,|x,\tau;t-\tau\}\, d\tau$$

mit $c_4 = 2^{p-1} c_2^p$ und $c_5 = 2^{p-1} a^p \left[c_3 + \frac{A}{3}\varrho^3\right]^{\alpha p}$. Setzt man nun

$$f(t) = \max_{x \in K_{\varrho - t}(x_0)} |u(x,t)|^p,$$

so ist $f(t)$ nicht größer als die Lösung $g(t)$ der Integralgleichung

$$g(t) = c_4 + c_5 \int_0^t (t-\tau)^{2-p}\, g(\tau)\, d\tau.$$

Mit Hilfe der Laplace-Transformation findet man die Lösung

$$g(t) = c_4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2-p)!\, c_5 t^{3-p}]^n}{[(3-p)\, n]!}.$$

Daraus folgt die Existenz einer Schranke c_6 für $|u(x,t)|^2$ in $B(K)$. Setzt man nun

$$c_7 = \max_{0 \leqq s \leqq c_4} |F'(s)| + 2c_6 \max_{0 \leqq s \leqq c_4} |F''(s)|,$$

so erhält man aus der Integralgleichung für u

$$|\operatorname{grad} u(x,t)| \leqq |\operatorname{grad} v(x,t)| + \\ + \int_0^t (t-\tau)\, M\{|F'(|u|^2)\operatorname{grad} u + F''(|u|^2)\, u\, 2\operatorname{Re}(\bar{u}\operatorname{grad} u)|\,|x,\tau;t-\tau\}\,d\tau \\ \leqq c_2 + \int_0^t (t-\tau)\, c_7 \max_{x\in K_{\varrho-\tau}(x_0)} |\operatorname{grad} u(x,\tau)|\,d\tau$$

und hieraus

$$|\operatorname{grad} u(x,t)| \leqq c_2 \operatorname{Cos} \sqrt{c_7}\, t \leqq c_8$$

für $(x,t)\in B(K)$. Auf dieselbe Weise erhält man eine Schranke für $|u_t(x,t)|$ und damit die gewünschte Konstante c.

Beweis von Satz 2. Es genügt, zu zeigen, daß genau eine Lösung in $B(K)$ existiert, wenn K eine beliebige Kugel mit $\overline{K}\subset G$ ist. Nach Satz 1 gibt es eine Lösung in einem Teilbereich $t\leqq T$ von $B(K)$, dessen Breite T nur von einer gemeinsamen oberen Schranke c der Funktionen $|\varphi|$, $|\operatorname{grad}\varphi|$ und $|\psi|$ in K abhängt. Man wird nun versuchen, zur Fortsetzung der Lösung ein neues Anfangswertproblem mit den Anfangswerten

$$\varphi_1(x) = u(x,T), \qquad \psi_1(x) = u_t(x,T)$$

zur Zeit $t=T$ zu stellen, dessen Lösung $u_1(x,t)$ folglich der Integralgleichung

$$u_1(x,t) = v_1(x,t) - \int_T^t (t-\tau)\, M\{F'(|u_1|^2)\, u_1\,|x,\tau;t-\tau\}\,d\tau$$

mit

$$v_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[(t-T)\, M\{\varphi_1|\,x;t-T\}\right] + (t-T)\, M\{\psi_1|\,x;t-T\}$$

zu genügen hat. Für $t\geqq T$ gilt

$$v_1(x,t) = v(x,t) - \int_0^T (t-\tau)\, M\{F'(|u|^2)\, u\,|x,\tau;t-\tau\}\,d\tau.$$

Man kann diese Identität sowohl mit Hilfe der Definition der Funktionen φ_1 und ψ_1 direkt verifizieren, als auch aus allgemeinen Eigenschaften der Lösungen der linearen Wellengleichung ohne Rechnung ableiten. Aus der Identität folgt, daß $v_1(x,t)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Also kann man die Integralgleichung wie im Beweis von Satz 1 durch Iteration lösen und so eine zweimal stetig differenzierbare Lösung $u_1(x,t)$ in einem Teilbereich $T\leqq t\leqq T+T_1$ von $B(K)$ berechnen, dessen Breite T_1 nur von einer gemeinsamen oberen Schranke für die Funktionen $|\varphi_1|$, $|\operatorname{grad}\varphi_1|$ und $|\psi_1|$ abhängt. Hierfür kann man aber die Konstante c des Hilfssatzes 1 nehmen. Also hängt T_1 nur von den Anfangswerten φ, ψ in K ab. Erneute Anwendung des Fortsetzungsprozesses liefert eine Lösung für $t\leqq T+2T_1$. In endlich vielen Schritten erhält man die gesuchte Lösung in $B(K)$. Gäbe es zwei Lösungen u_1 und u_2, so müßte die Differenz der Ungleichung

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)| = \int_0^t (t-\tau)\, M\{F'(|u_1|^2)\, u_1 - F'(|u_2|^2)\, u_2\,|x,\tau;t-\tau\}\,d\tau \\ \leqq c_7 \int_0^t (t-\tau) \max_{x\in K_{\varrho-\tau}(x_0)} |u_1(x,\tau)-u_2(x,\tau)|\,d\tau$$

genügen, worin c_7 die im Beweis des Hilfssatzes eingeführte Konstante ist. Daraus folgt $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ in bekannter Weise, womit der Beweis des Satzes abgeschlossen ist.

§ 3. Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten

Die in §2 betrachteten Wellengleichungen haben zu beliebigen Anfangswerten $\varphi(x) \in C^3(R^3)$, $\psi(x) \in C^2(R^3)$ genau eine für $t \geqq 0$ und für alle x zweimal stetig differenzierbare Lösung $u(x,t)$. Es werden nun insbesondere Anfangswerte *mit kompaktem Träger betrachtet*, d.h. solche, die außerhalb einer geeigneten Kugel $K = K_\varrho(x_0)$ identisch verschwinden. Die Lösung $u(x,t)$ verschwindet dann identisch im Bestimmtheitsbereich des Komplementes von K, d.h. für festes t außerhalb der Kugel $K_{\varrho+t}(x_0)$. Wegen $F(0)=0$ existiert das *Energie-Integral*

$$E(t) = \tfrac{1}{2} \int_{R^3} \left\{ |u_t|^2 + |\operatorname{grad} u|^2 + F\big(|u|^2\big) \right\} dx .$$

Aus dem Energiesatz folgt durch Integration über das Gebiet $x \in R^3$, $0 \leqq t \leqq \tau$ der sog. integrale Energiesatz

$$E(t) = \tfrac{1}{2} \int \left\{ |\psi|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2 + F\big(|\varphi|^2\big) \right\} dx$$

für $t \geqq 0$, d.h. $E(t)$ ist gleich einer nur von den Anfangswerten abhängigen Konstanten, die im folgenden mit E bezeichnet wird. Ist $F(s) \geqq 0$ für $0 \leqq s < \infty$, so folgt hieraus eine wichtige Abschätzung. Für eine Funktion $f(x) \in C^1(R^3)$ mit kompaktem Träger gilt nämlich nach SOBOLEW[3])

$$\left\{ \int |f(x)|^6 \, dx \right\}^{\frac{1}{3}} \leqq \tfrac{4}{3} \int |\operatorname{grad} f(x)|^2 \, dx .$$

Auf $u(x,t)$ angewandt ergibt dies die Ungleichung

$$\left\{ \int |u(x,t)|^6 \, dx \right\}^{\frac{1}{3}} \leqq \tfrac{8}{3} E ,$$

die im folgenden gebraucht wird. Eine weitere Ungleichung enthält

HILFSSATZ 2. *Es seien $\varphi(x) \in C^3(R^3)$ und $\psi(x) \in C^2(R^3)$ Funktionen mit kompaktem Träger und $v(x,t)$ die Lösung der linearen Wellengleichung $v_{tt} - \Delta v = 0$ mit diesen Anfangswerten. Dann gilt*

$$\int |v(x,t)|^2 dx \leqq 2 \int \left\{ |\varphi(x)|^2 + t^2 |\psi(x)|^2 \right\} dx .$$

BEWEIS. Sei $\hat{v}(\xi,t)$ die Fourier-Transformierte von $v(x,t)$ bezüglich der Raumvariablen, $\hat{\varphi}(\xi)$ und $\hat{\psi}(\xi)$ die Transformierten von $\varphi(x)$ bzw. $\psi(x)$; dann ist

$$\hat{v}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi) \cos|\xi| \, t + \hat{\psi}(\xi) \frac{\sin|\xi| \, t}{|\xi|}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \int |v(x,t)|^2 dx &= \int |\hat{v}(\xi,t)|^2 d\xi \\ &\leqq 2 \int \left\{ |\hat{\varphi}(\xi)|^2 + t^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 \right\} d\xi = 2 \int \left\{ |\varphi(x)|^2 + t^2 |\psi(x)|^2 \right\} dx . \end{aligned}$$

[3]) Einen einfachen Beweis findet man bei NIRENBERG [4], S. 128.

Der Hilfssatz 2 zeigt, zusammen mit dem integralen Energiesatz für die lineare Wellengleichung $(F(s)\equiv 0)$, daß die Lösungen der linearen Wellengleichung im Sinne der Norm

$$\|v(t)\| = \left[\int\left\{|v_t|^2 + |\operatorname{grad} v|^2 + |v|^2\right\} dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

stetig von ihren Anfangswerten abhängen; und zwar ist

$$\|v(t)\|^2 \leqq 2(1+t^2)\,\|v(0)\|^2$$

für jede Lösung $v(x,t)$, also auch für die Differenz zweier Lösungen. Unter gewissen Voraussetzungen gilt nun eine analoge Aussage für die nichtlinearen Wellengleichungen:

SATZ 3. *Außer den Voraussetzungen von Satz 2 gelte noch*

$$F(s) \geqq 0 \quad \textit{und} \quad |F''(s)| \leqq b \quad \textit{für} \quad 0 \leqq s < \infty.$$

Es seien $\varphi_i(x) \in C^3(R^3)$, $\psi_i(x) \in C^2(R^3)$ *Anfangswerte mit kompaktem Träger und mit*

$$E_i = \tfrac{1}{2}\int\left\{|\psi_i|^2 + |\operatorname{grad}\varphi_i|^2 + F\left(|\varphi_i|^2\right)\right\} dx \leqq \hat{E}$$

für $i = 1, 2$. *Für die zugehörigen Lösungen* $u_i(x,t)$ *gilt dann*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leqq 5(1+t^2)\exp\left[k(1+t^4)\right]\|u_1(0) - u_2(c)\|^2$$

mit einer nur von $\hat{E}$ *(und von der Funktion* $F(s)$*) abhängigen Zahl* k.

BEMERKUNG. Ersetzt man die Bedingung $F(s) \geqq 0$ durch die frühere $A + F(s) > 0$, so erhält man eine ähnliche Ungleichung; jedoch hängt die darin auftretende Konstante auch von A und von dem Durchmesser des Trägers der Anfangswerte ab.

BEWEIS DES SATZES. Aus den Voraussetzungen über $F(s)$ folgt $|F'(s)| \leqq |F'(0)| + bs$ und daraus

$$\left|F'\left(|z_1|^2\right) z_1 - F'\left(|z_2|^2\right) z_2\right| \leqq b_1\left(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2\right)|z_1 - z_2|$$

für beliebige komplexe Zahlen z_1, z_2 mit einer positiven Konstante b_1[4]). Die Lösungen $u_i(x,t)$ sind zugleich Lösungen der Integralgleichungen

$$u_i(x,t) = v_i(x,t) - \int_0^t (t-\tau)\, M\left\{F'\left(|u_i|^2\right) u_i \,|\, x, \tau; t-\tau\right\} d\tau,$$

worin $v_i(x,t)$ die Lösung der linearen Wellengleichung mit den Anfangswerten φ_i, ψ_i ist. Setzt man $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ so folgt

$$|w(x,t)| \leqq |v_1(x,t) - v_2(x,t)| + \\ + b_1 \int_0^t (t-\tau)\, M\left\{\left(1 + |u_1|^2 + |u_2|^2\right)|w| \,|\, x, \tau; t-\tau\right\} d\tau$$

[4]) An Stelle von $|F''(s)| \leqq b$ könnte man auch diese Ungleichung in die Voraussetzungen des Satzes aufnehmen.

und weiter

$$\begin{aligned}
&\left[\int |w(x,t)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqq \left[\int |v_1(x,t) - v_2(x,t)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + b_1 \int_0^t (t-\tau) \left[\int \left(1 + |u_1(x,\tau)|^2 + |u_2(x,\tau)|^2\right)^2 |w(x,\tau)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} d\tau \\
&\leqq \left[2\int \{|\varphi_1 - \varphi_2|^2 + t^2 |\psi_1 - \psi_2|^2\} dx\right]^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + b_1 t \int_0^t \left\{\left[\int |w(x,\tau)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int \left(|u_1|^2 + |u_2|^2\right)^3 dx\right]^{\frac{1}{3}} \left[\int |w(x,\tau)|^6 dx\right]^{\frac{1}{6}}\right\} d\tau \\
&\leqq \left[2(1+t^2)\right]^{\frac{1}{2}} \|w(0)\| + \\
&\quad + b_1 t \int_0^t \left\{\left[\int |w(x,\tau)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + \tfrac{16}{3} \hat{E}\, (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{3}} \left[\int |\operatorname{grad} w(x,\tau)|^2 dx\right]^{\frac{1}{3}}\right\} d\tau \\
&\leqq \left[2(1+t^2)\right]^{\frac{1}{2}} \|w(0)\| + b_2 t \int_0^t \|w(\tau)\| d\tau
\end{aligned}$$

mit einer nur von $\hat{E}$ (und von b_1) abhängigen Zahl b_2. Dabei wurde Hilfssatz 2, die zu Anfang des Paragraphen abgeleitete Ungleichung und die Ungleichung von SOBOLEW angewandt. Schließlich erhält man

$$\int |w(x,t)|^2 dx \leqq 4(1+t^2) \|w(0)\|^2 + 2 b_2^2 t^3 \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau .$$

Andererseits folgt aus der Wellengleichung

$$w_{tt} - \Delta w + F'\left(|u_1|^2\right) u_1 - F'\left(|u_2|^2\right) u_2 = 0$$

und daraus

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \left\{|w_t|^2 + |\operatorname{grad} w|^2\right\} - 2 \operatorname{Re} \operatorname{div} (\overline{w}_t \operatorname{grad} w) \\
&\qquad = -2 \operatorname{Re} \overline{w}_t \left[F'\left(|u_1|^2\right) u_1 - F'\left(|u_2|^2\right) u_2\right].
\end{aligned}$$

Integration über das Gebiet $x \in R^3$, $0 \leqq t \leqq t_0$ liefert

$$\begin{aligned}
&\int \left\{|w_t(x,t_0)|^2 + |\operatorname{grad} w(x,t_0)|^2\right\} dx - \int \left\{|\psi_1 - \psi_2|^2 + |\operatorname{grad}(\varphi_1 - \varphi_2)|^2\right\} dx \\
&\quad = -2 \operatorname{Re} \int_0^{t_0} \int \overline{w}_t \left[F'\left(|u_1|^2\right) u_1 - F'\left(|u_2|^2\right) u_2\right] dx\, dt \\
&\quad \leqq 2 b_1 \int_0^{t_0} \int |w_t| \left(1 + |u_1|^2 + |u_2|^2\right) |w|\, dx\, dt \\
&\quad \leqq 2 b_1 \int_0^{t_0} \left[\int |w_t|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int \left(1 + |u_1|^2 + |u_2|^2\right)^2 |w|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} dt .
\end{aligned}$$

Das Integral in der zweiten eckigen Klammer ist schon einmal in diesem Beweis vorgekommen; indem man dieselbe Abschätzung wie dort anwendet, erhält man

$$\int \left\{|w_t(x,t)|^2 + |\operatorname{grad} w(x,t)|^2\right\} dx \leqq \|w(0)\|^2 + 2 b_2 \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau$$

und durch Addition der Ungleichung für $\int |w(x,t)|^2 dx$

$$\|w(t)\|^2 \leqq 5(1+t^2) \|w(0)\|^2 + 2(b_2 + b_2^2 t^3) \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau .$$

Hieraus folgt

$$\|w(t)\|^2 \leqq 5(1+t^2)\exp[k(1+t^4)]\,\|w(0)\|^2$$

mit einer nur von b_2, d.h. nur von $\hat{E}$ abhängigen Zahl k, q.e.d.

Aus Satz 3 folgt fast unmittelbar die *stetige Abhängigkeit* der Lösungen von den Anfangswerten im Sinne der Norm, zunächst für Lösungen, deren Anfangswerte kompakten Träger haben. Sei φ_n, ψ_n eine Folge solcher Anfangswerte, die im Sinne der Norm konvergiert. Es sei also

$$\lim_{n,m\to\infty}\int\{|\psi_n-\psi_m|^2+|\operatorname{grad}(\varphi_n-\varphi_m)|^2+|\varphi_n-\varphi_m|^2\}\,dx = \lim_{n,m\to\infty}\|u_n(0)-u_m(0)\|^2=0.$$

Aus Satz 3 folgt dann für die Lösungen $u_n(x,t)$

$$\lim_{n,m\to\infty}\|u_n(t)-u_m(t)\|=0$$

gleichmäßig in jedem Intervall $0\leqq t\leqq t_0$, falls nur die Folge der Energie-Konstanten E_n beschränkt ist. Nun ist nach Voraussetzung

$$|F(s)|\leqq|F'(0)|\,s+\tfrac{1}{2}b\,s^2\leqq b_3(s+s^3)$$

und daher nach der Ungleichung von Sobolew

$$E_n\leqq\frac{1}{2}\int\{|\psi_n|^2+|\operatorname{grad}\varphi_n|^2+b_3|\varphi_n|^2+b_3|\varphi_n|^6\}\,dx$$
$$\leqq\frac{1+b_3}{2}\|u_n(0)\|^2+\frac{1}{2}b_3\left(\frac{4}{3}\right)^3\|u_n(0)\|^6\leqq\hat{E},\quad\text{q.e.d.}$$

Für Lösungen in $B(G)$, G eine offene Menge in R^3, gilt folgendes: Sei $\varphi_n(x)\in C^3(G)$, $\psi_n(x)\in C^2(G)$ eine Folge von Anfangswerten und konvergent in dem Sinne, daß

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_K\{|\psi_n-\psi_m|^2+|\operatorname{grad}(\varphi_n-\varphi_m)|^2+|\varphi_n-\varphi_m|^2\}\,dx = \lim_{n,m\to\infty}\|u_n(0)-u_m(0)\|_K^2=0$$

für jede Kugel $K=K_\varrho(x_0)$ mit $\overline{K}<G$. Dann gilt für die Lösungen

$$\lim_{n,m\to\infty}\|u_n(t)-u_m(t)\|_{K_{\varrho-t}(x_0)}=0$$

für jede solche Kugel gleichmäßig bezüglich t im Intervall $[0,\varrho]$. Zum Beweis wählt man ein $\varepsilon>0$, so daß auch noch $\overline{K_{\varrho+\varepsilon}(x_0)}<G$ ist, und eine Funktion $\eta(x)\in C^3(R^3)$ mit Träger in $K_{\varrho+\varepsilon}(x_0)$, welche in $K_\varrho(x_0)$ identisch gleich 1 ist. Damit bildet man Anfangswerte $\varphi_n'=\eta\varphi_n$, $\psi_n'=\eta\psi_n$ mit kompaktem Träger und die zugehörigen Lösungen $u_n'(x,t)$. Nach Voraussetzung ist dann

$$\lim_{n,m\to\infty}\|u_n'(0)-u_m'(0)\|=0$$

und die Folge $u_n'(x,t)$ konvergiert daher im Sinne der Norm gleichmäßig bezüglich t. Da nun aber $u_n'(x,t)\equiv u_n(x,t)$ in $B(K_\varrho(x_0))$ ist, so folgt die Behauptung unmittelbar.

§ 4. Verallgemeinerte Lösungen

Die Paare $\{\varphi, \psi\}$ von Funktionen $\varphi(x) \in C^3(R^3)$, $\psi(x) \in C^2(R^3)$ mit kompaktem Träger bilden einen linearen Raum $\mathfrak{H}_0$. Die vollständige Hülle von $\mathfrak{H}_0$ bezüglich der Norm

$$\|\varphi, \psi\| = [\int \{|\psi|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2 + |\varphi|^2\} dx]^{\frac{1}{2}}$$

ist ein Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$. Die Elemente $\{\varphi, \psi\}$ von $\mathfrak{H}$ sollen *verallgemeinerte Anfangswerte* genannt werden; diese kann man auch beschreiben als Paare komplexwertiger Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, definiert und quadratisch integrierbar über R^3 mitsamt den ersten Ableitungen von $\varphi(x)$ im Sinne der Distributionstheorie.

Für $\{\varphi, \psi\} \in \mathfrak{H}_0$ ist das Energie-Integral

$$E\{\varphi, \psi\} = \tfrac{1}{2} \int \{|\psi|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2 + F(|\varphi|^2)\} dx$$

definiert; nach einer Abschätzung in §3 ist

$$E\{\varphi, \psi\} \leqq \frac{1 + b_3}{2} \|\varphi, \psi\|^2 + \frac{32}{27} b_3 \|\varphi, \psi\|^6$$

unter den Voraussetzungen von Satz 3 über $F(s)$ mit einer nur von $F(s)$ abhängigen Konstante b_3. Ist nun $\{\varphi, \psi\} \in \mathfrak{H}$ und $\{\varphi_n, \psi_n\}$ eine Cauchy-Folge in $\mathfrak{H}_0$, welche gegen $\{\varphi, \psi\}$ strebt, so konvergiert die Folge der Lösungen $u_n(x, t)$ des Anfangswertproblems nach Satz 3 im Sinne der Norm

$$\|u(t), u_t(t)\| = [\int \{|u_t|^2 + |\operatorname{grad} u|^2 + |u|^2\} dx]^{\frac{1}{2}}$$

gleichmäßig in jedem Intervall $0 \leqq t \leqq t_0$ und definiert eine für $t \geqq 0$ stetig von t abhängende Schar von Elementen $\{u(t), u_t(t)\} \in \mathfrak{H}$, die als *verallgemeinerte Lösung* des Anfangswertproblems mit den Anfangswerten $\{\varphi, \psi\}$ bezeichnet werden soll. Diese Definition ist sinnvoll, da die Schar $\{u(t), u_t(t)\}$ durch $\{\varphi, \psi\}$ eindeutig bestimmt ist. Die Anfangswerte $\{\varphi, \psi\} \in \mathfrak{H}$ erfüllen die allgemeinsten der in [2] von FRIEDRICHS und LEWY für die lineare Wellengleichung angegebenen *fortsetzbaren* Anfangsbedingungen. Das obige Ergebnis zeigt, daß dies auch für die nichtlineare Wellengleichung fortsetzbare Anfangsbedingungen sind. Man kann noch bessere Übereinstimmung mit [2] erzielen, indem man auch für die nichtlineare Wellengleichung verallgemeinerte Lösungen in beliebigen Bestimmtheitsbereichen $B(G)$ definiert, die Methode hierzu ist am Ende des §3 schon angegeben worden.

Zur Definition des Energie-Integrals für verallgemeinerte Lösungen benützt man den folgenden

HILFSSATZ 3. *$F(s)$ genüge den Voraussetzungen von Satz 3. Dann ist $E\{\varphi, \psi\}$ eine stetige Funktion von $\{\varphi, \psi\}$ im Sinne der Norm.*

BEWEIS. Aus $|F''(s)| \leqq b$ folgt

$$|F(|z_1|^2) - F(|z_2|^2)| \leqq b_4 (1 + |z_1|^2 + |z_2|^2)(|z_1| + |z_2|)|z_1 - z_2|$$

und damit für $\{\varphi_i, \psi_i\} \in \mathfrak{H}_0$

$$\begin{aligned}
&\left|\int \{F(|\varphi_1|^2) - F(|\varphi_2|^2)\}\, dx\right| \\
&\quad \leqq b_4 \left[\int \left(1 + |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2\right)^2 \left(|\varphi_1| + |\varphi_2|\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int |\varphi_1 - \varphi_2|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leqq b_4 \|\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2\| \left\{\left[\int \left(|\varphi_1| + |\varphi_2|\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[2 \int \left(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2\right)^3 dx\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&\quad \leqq b_4 \|\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2\| \left\{\|\varphi_1, \psi_1\| + \|\varphi_2, \psi_2\| + \sqrt{8} \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\|\varphi_1, \psi_1\|^3 + \|\varphi_2, \psi_2\|^3\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Insgesamt hat man

$$\begin{aligned}
&|E\{\varphi_1, \psi_1\} - E\{\varphi_2, \psi_2\}| \\
&\leqq \|\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2\| \left\{\frac{1 + b_4}{2} \left(\|\varphi_1, \psi_1\| + \|\varphi_2, \psi_2\|\right) + \sqrt{2} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} b_4 \left(\|\varphi_1, \psi_1\|^3 + \|\varphi_2, \psi_2\|^3\right)\right\},
\end{aligned}$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Satz 4. *Für eine verallgemeinerte Lösung $\{u(t), u_t(t)\}$ existieren die Integrale*

$$\begin{aligned}
E &= \tfrac{1}{2} \int \left\{|u_t|^2 + |\operatorname{grad} u|^2 + F(|u|^2)\right\} dx \\
\mathfrak{P} &= -\int \operatorname{Re}(\bar{u}_t \operatorname{grad} u)\, dx \\
Q &= -\int \operatorname{Im}(\bar{u}_t u)\, dx
\end{aligned}$$

(Energie, Impuls und Ladung) für $t \geqq 0$ und sind von t unabhängig. Die Lösung $\{u(t), u_t(t)\}$ sowie die obigen Integrale hängen stetig im Sinne der Norm von den Anfangswerten ab. Satz 3 gilt unverändert für verallgemeinerte Lösungen.

Beweis. Sei $u_n(x, t)$ eine Folge von eigentlichen Lösungen, deren Anfangswerte kompakten Träger haben und gegen die Anfangswerte $\{\varphi, \psi\}$ der verallgemeinerten Lösung streben. Da $u_n(x, t)$ bei festem t für hinreichend große x verschwindet, existieren die entsprechenden Integrale E_n, $\mathfrak{P}_n$, Q_n. Durch Differentiation nach t unter dem Integralzeichen und mit Benutzung der Differentialgleichung verifiziert man leicht, daß die Integrale von t nicht abhängen. Die Behauptung folgt nun durch Grenzübergang, da E nach Hilfssatz 3 stetig im Sinne der Norm von u abhängt und da dies für $\mathfrak{P}$ und für Q offenbar auch der Fall ist. Die Ungleichung von Satz 3 geht durch Grenzübergang über in

$$\|u_1(t) - u_2(t), u_{1t}(t) - u_{2t}(t)\|^2 \leqq 5\,(1 + t^2) \exp\left[k\,(1 + t^4)\right] \|\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2\|^2$$

mit einer nur von $\max[E\{\varphi_1, \psi_1\}, E\{\varphi_2, \psi_2\}]$ abhängigen Zahl k. Daraus folgt die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten.

Der Satz zeigt, daß die verallgemeinerten Lösungen alle physikalisch wichtigen Eigenschaften besitzen; zugleich ist klar, daß man den Raum $\mathfrak{H}$ der Anfangswerte nicht wesentlich erweitern kann, ohne die Existenz des Energie-Integrals aufzugeben. Für manche Funktionen $F(s)$, so z. B. für die zur Mesonengleichung von Schiff gehörende Funktion $F(s) = \mu^2 s + \frac{1}{2}\eta^2 s^2$, ist sogar $\mathfrak{H}$ *identisch* mit der Klasse der Anfangswerte mit endlichem Energie-Integral. Ohne Zweifel sind daher die hier konstruierten verallgemeinerten Lösungen die allgemeinsten Lösungen mit physikalischer Bedeutung. Während nun die

Theorie in *dieser* Hinsicht wenig zu wünschen übrig läßt, bleibt hinsichtlich der Klasse der betrachteten Wellengleichungen manche Frage offen. Insbesondere wäre es nützlich, zu wissen, ob es Funktionen $F(s)$ von stärkerem Wachstum gibt, für die das Anfangswertproblem im Großen in ähnlicher Allgemeinheit lösbar ist.

Zusatz bei der Korrektur am 28. 9. 61. J. L. LIONS hat dem Verf. im Juni 1961 noch unveröffentlichte weitergehende Resultate in bezug auf die verallgemeinerten Lösungen mitgeteilt. Seine Methode liefert direkt die verallgemeinerte Lösung der entsprechenden inhomogenen Differentialgleichung in beliebig vielen (n) Raumvariablen unter Voraussetzungen, die für $n = 3$ mit denen von Satz 3 übereinstimmen, und erlaubt außerdem die Lösung gemischter Rand-Anfangswert-Probleme für dieselbe Gleichung.

Literatur

[1] COURANT, R., u. D. HILBERT: Methoden der Mathematischen Physik, Bd. II. Berlin 1937.

[2] FRIEDRICHS, K., u. H. LEWY: Über fortsetzbare Anfangsbedingungen bei hyperbolischen Differentialgleichungen in drei Veränderlichen. Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1932, 135–143.

[3] JÖRGENS, K.: Über die nichtlinearen Wellengleichungen der mathematischen Physik. Math. Annalen **138**, 179–202 (1959).

[4] NIRENBERG, L.: On elliptic partial differential equations. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, Ser. III **13**, 115–162 (1959).

[5] SCHIFF, L. I.: Nonlinear meson theory of nuclear forces I. Physic. Rev. **84**, 1–9 (1951).

[6] SOBOLEW, S.: Sur un théorème d'analyse fonctionnelle. Mat. Sbornik **4**, 471–496 (1938).

Institut für Angewandte Mathematik der Universität Heidelberg

(Eingegangen am 15. April 1961)

SCHMIDT, H.
Math. Zeitschr. 77, 309–313 (1961)

Eine Anwendung der Siegelschen Transzendenzsätze für Bessel-Funktionen

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

HERMANN SCHMIDT

EINLEITUNG. Die folgenden Betrachtungen sind ursprünglich angeregt durch eine Bemerkung von DIETRICH und ROSENTHAL [1]; diese ersetzen die Zahlfolge (1, 1, ...) der Koeffizientenzähler in der Exponentialreihe durch eine periodische Folge algebraischer Zahlen, wodurch man zu einer Linearkombination gewisser Teilreihen derselben (zyklischer Funktionen) gelangt und den Lindemannschen Satz anwenden kann. Es lag nahe, die Bedingung der Periodizität durch eine allgemeinere lineare Differenzengleichung mit festen algebraischen Koeffizienten für die Folge der Zusatzfaktoren zu ersetzen; *Satz* 1, zu dem man auf diese Weise gelangt, erwies sich nachträglich als im wesentlichen in einem Satz von POPKEN [4] enthalten; doch ist dort der Ausgangspunkt ein anderer (unendliche lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten), so daß ein Teil des hier wiedergegebenen, auf Formeln der Differenzenrechnung fußenden Beweises zur Herstellung des Zusammenhangs ohnedies erforderlich ist (Gewinnung der Aussage des Lemmas a. a. O. [4], S. 524); anderseits geben wir gewisse algebraische Verschärfungen (*Satz* 2), und schließlich führt im wesentlichen die gleiche Methode zur Gewinnung entsprechender Ergebnisse für in ähnlicher Weise aus jenen Funktionen $K_\alpha(x)$ abzuleitende Reihen, die SIEGEL in seinen berühmten Transzendenzuntersuchungen [5], Ch. II behandelt hat, und die in naher Beziehung zu den Bessel-Funktionen stehen (*Satz* 3). Hier liegt zunächst nur die Methode der Differenzengleichungen vor; Differentialgleichungen (mit nicht konstanten Koeffizienten) würden sich wohl herleiten lassen, doch dürften solche kaum einen vereinfachten Zugang zu unseren Ergebnissen, vielleicht aber Anregung zu weiteren Verallgemeinerungen bieten.

SATZ 1. *Die Zahlfolge* A_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *genüge für* $\nu \geqq \nu_0$ $(\geqq 0$ *fest*$)$ *der linearen Differenzengleichung (in bekannter Symbolik links)*

$$f(\mathsf{E})\, A_\nu = A_{\nu+m} + \beta_1 A_{\nu+m-1} + \cdots + \beta_m A_\nu = 0, \tag{1}$$

deren Koeffizienten β_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ *ebenso wie die gegebenen Werte* A_μ $(\mu = 0, 1, \ldots, \nu_0 + m - 1)$ *algebraische Zahlen sein mögen,* $\beta_m \neq 0$. *Wenn dann die Potenzreihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu!} z^\nu \tag{2}$$

nicht abbricht, stellt sie eine ganze Funktion dar, die für höchstens endlich viele algebraische Werte von z algebraische Werte annimmt.

BEWEIS. Es sei zunächst $\nu_0 = 0$ angenommen. Setzt man

$$f(t) = \prod_{\lambda=1}^{l} (t - \varrho_\lambda)^{k_\lambda} \qquad (\sum k_\lambda = m;\ \varrho_\lambda \neq \varrho_\mu \quad \text{für} \quad \lambda \neq \mu),$$

so sind die ϱ_λ algebraisch und wegen $\beta_m \neq 0$ sämtlich von Null verschieden. Die Differenzengleichung (1) hat dann für $\nu \geqq 0$ das Fundamentalsystem

$$\left\{\varrho_\lambda^\nu, \nu\varrho_\lambda^\nu, \binom{\nu}{2}\varrho_\lambda^\nu, \ldots \binom{\nu}{k_\lambda - 1}\varrho_\lambda^\nu\right\} \qquad \lambda = 1, \ldots, l,$$

(vgl. z. B. MARKOFF [2], S. 166/167; NÖRLUND [3], S. 297), und es gibt daher eine Darstellung

$$(3) \qquad A_\nu = \sum_{\lambda=1}^{l} p_\lambda(\nu)\varrho_\lambda^\nu \quad \text{mit Polynomen} \quad p_\lambda(t) = \sum_{\varkappa=0}^{k_\lambda - 1} c_{\lambda\varkappa}\binom{t}{\varkappa}.$$

Die Beiwerte $c_{\lambda\varkappa}$ derselben sind algebraische Zahlen, da sie sich durch Auflösung der linearen Gleichungen (3) ($\nu = 0, 1, \ldots, m-1$) mit nichtsingulärer Matrix berechnen. Weiter folgt durch Einsetzen in (2)

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu!} z^\nu = \sum_{\lambda=1}^{l} q_\lambda(z)\, e^{\varrho_\lambda z},$$

wenn man setzt

$$q_\lambda(z) = \sum_{\varkappa=0}^{k_\lambda - 1} \frac{c_{\lambda\varkappa}}{\varkappa!} \varrho_\lambda^\varkappa z^\varkappa;$$

nicht alle Polynome $q_\lambda(z)$ können identisch verschwinden, da nach Vor. $F(z)$ dies nicht tut.

Nach dem großen Lindemannschen Satz (vgl. z. B. SIEGEL [5], S. 23) ist daher, da die ϱ_λ voneinander und von Null verschieden sind, für algebraisches $z = \zeta \neq 0$ $F(\zeta)$ transzendent, wofern nicht alle $q_\lambda(\zeta) = 0$ ausfallen (man denke sich $F(\zeta)$ mit dem Faktor $1 = e^{0 \cdot \zeta}$ geschrieben). Ist daher $d(z) = z^s + \cdots$ der (normierte) größte gemeinsame Teiler der $q_\lambda(z)$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, l$), so wird $0 \leqq s \leqq h = \operatorname{Max}(k_\lambda - 1)$, und genau wenn $d(z)$ eine Nullstelle $\neq 0$ besitzt, gibt es eine, und zwar endliche, Anzahl $s_0 \leqq s$ von algebraischen Stellen $\zeta_j \neq 0$ mit algebraischem $F(\zeta_j)$ ($= 0$ bei der gemachten Annahme $\nu_0 = 0$). Insbesondere ist also $F(\zeta)$ für *jedes* algebraische $\zeta \neq 0$ transzendent, wenn alle ϱ_λ *einfache* Nullstellen von $f(t)$ sind; hier ordnet sich insbesondere der Fall von DIETRICH und ROSENTHAL [1] ein.

Ist nun $\nu_0 > 0$, so schreiben wir für $\nu \geqq \nu_0$ auch $A_\nu = A_\nu^*$, und definieren ferner schrittweise für $\nu = \nu_0 - 1, \nu_0 - 2, \ldots, 1, 0$

$$A_\nu^* = -\frac{1}{\beta_m}(A_{\nu+m}^* + \beta_1 A_{\nu+m-1}^* + \cdots + \beta_{m-1} A_{\nu+1}^*).$$

Alsdann wird $F(z)=P(z)+F^*(z)$, wo

$$P(z)=\sum_{\nu=0}^{\nu_0-1}(A_\nu-A_\nu^*)\frac{z^\nu}{\nu!}$$

ein Polynom mit algebraischen Koeffizienten ist, während

$$F^*(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{A_\nu^*}{\nu!}z^\nu$$

die Voraussetzungen von Satz 1 mit $\nu_0=0$ erfüllt, insbesondere nicht identisch verschwindet, da $F(z)$ kein Polynom sein sollte. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Es sei jetzt P der Körper der rationalen Zahlen, K der algebraische Zahlkörper $\mathsf{P}(\beta_1,\ldots,\beta_m;\ A_0,\ldots,A_{\nu_0+m-1})$, $K_\lambda=K(\varrho_\lambda)$, $\Lambda=K(\varrho_1,\ldots,\varrho_l)$ $(\lambda=1,2,\ldots,l)$. Wir beweisen jetzt

Satz 2. *Wenn es unter den Vor. von Satz 1 ein algebraisches ζ mit algebraischem $F(\zeta)$ gibt, so ist $F(\zeta)\in K(\zeta)$, und der Relativgrad $[K(\zeta):K]$ ist $\leqq h=\mathrm{Max}(k_\lambda-1)$, wo k_λ die Vielfachheiten der Wurzeln von $f(t)=0$ sind.*

Für $\zeta=0$ ist dies trivial. Im übrigen sind ja alle A_ν und A_ν^*, damit die Koeffizienten von $P(z)$ aus K, woraus für $\zeta\neq 0$ wegen $F(\zeta)=P(\zeta)$ der erste Teil der Behauptung folgt.

Aus (3) folgt weiter, daß $c_{\lambda\varkappa}\in\Lambda$. Ist π ein Automorphismus von Λ/K, und wird dabei $\varrho_\lambda^\pi=\varrho_{\pi(\lambda)}$, so ergibt sich wegen $A_\nu\in K$ und mit Rücksicht auf $k_{\pi^{-1}(\lambda)}=k_\lambda$

$$A_\nu=\sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{\varkappa=0}^{k_\lambda-1}c_{\lambda\varkappa}^\pi\cdot\binom{\nu}{\varkappa}\varrho_{\pi(\lambda)}^\varkappa=\sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{\varkappa=0}^{k_\lambda-1}c_{\pi^{-1}(\lambda),\varkappa}^\pi\binom{\nu}{\varkappa}\varrho_\lambda^\nu,$$

also

$$c_{\lambda\varkappa}=c_{\pi^{-1}(\lambda),\varkappa}^\pi \quad\text{oder}\quad c_{\lambda,\varkappa}^\pi=c_{\pi(\lambda),\varkappa};\qquad q_\lambda^\pi(z)=q_{\pi(\lambda)}(z). \tag{6}$$

Insbesondere bleibt $q_\lambda(z)$ bei einem Automorphismus von Λ/K_λ unverändert, da dann $\varrho_\lambda^\pi=\varrho_\lambda$, somit ist $q_\lambda(z)\in K_\lambda[z]$[1]. Wegen (6) folgt aus $d(z)/q_\lambda(z)$ für alle λ, daß auch $d^\pi(z)/q_\lambda(z)$ für alle λ und alle Automorphismen π von Λ/K. Es gilt also auch $d^\pi(z)/d(z)$, und wegen der Normierung und der Gleichheit der Grade ist $d^\pi(z)=d(z)$, also $d(z)\in K[z]$; daraus ergibt sich der zweite Teil der Behauptung.

Mit ähnlicher Methode untersuchen wir nun noch eine weitere Klasse von Funktionen.

Satz 3. *Die Folge A_ν genüge den Voraussetzungen von Satz 1. Es sei ferner α eine rationale Zahl $\neq -1,-2,\ldots$ und nicht die Hälfte einer ungeraden Zahl. Dann gelten die Aussagen von Satz 1 und 2 auch für die Potenzreihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu A_\nu z^\nu}{\nu!\,(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu)},$$

wofern jetzt unter h das $\mathrm{Max}[k_\lambda/2]$ *verstanden wird.*

[1]) Meinen ursprünglichen, etwas weitläufigeren, mehr funktionentheoretischen Beweis hierfür habe ich auf Vorschlag von Herrn Knobloch durch die obige rein algebraische Betrachtung ersetzt.

BEWEIS. Es sei wieder $\nu_0 = 0$ angenommen, da die Reduktion auf diesen Fall analog verläuft.

Auf Grund der Darstellung (3) findet man jetzt

$$(7)\quad \begin{cases} F(z) = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\varkappa=0}^{k_\lambda - 1} \frac{c_{\lambda\varkappa}}{\varkappa!} \sum_{\nu=\varkappa}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (\varrho_\lambda z)^\nu}{(\nu-\varkappa)!\,(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu)} \\ \quad = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\varkappa=0}^{k_\lambda - 1} \frac{c_{\lambda\varkappa}(-1)^\varkappa}{\varkappa!} \Gamma(\alpha+1) \left(\frac{x_\lambda}{2}\right)^{-\alpha+\varkappa} J_{\alpha+\varkappa}(x_\lambda). \end{cases}$$

Hier bedeutet x_λ eine $\sqrt{4\varrho_\lambda z}$,

$$J_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2\nu}}{\nu!\,\Gamma(\alpha+\nu+1)}$$

die Besselsche Funktion vom Index α. Es gilt aber bekanntlich (vgl. z.B. WATSON [6], S. 295 (1))

$$(8)\qquad J_{\alpha+\varkappa}(x) = R_{\varkappa-1,\alpha+1}(x)\, J_{\alpha+1}(x) - R_{\varkappa-2,\alpha+2}(x)\, J_\alpha(x) \qquad (\varkappa \geqq 2),$$

wobei wie a.a.O. mit $R_{n,\alpha}(x)$ die sog. Lommelschen Polynome bezeichnet sind. Es ist in unserem Zusammenhang angebracht, zu der Hurwitzschen Schreibweise überzugehen, d.h. mit WATSON [6], 9.7, S. 303 zu setzen

$$g_{n\alpha}\left(\frac{x^2}{4}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^n R_{n,\alpha+1}(x) \qquad (n = 0, 1, \dots).$$

Dann gilt

$$g_{n+1,\alpha}(x) = (\alpha + n + 1)\, g_{n,\alpha}(x) - x\, g_{n-1,\alpha}(x);$$

$$g_{0\alpha}(x) = 1, \qquad g_{1\alpha}(x) = \alpha + 1,$$

und demgemäß sind, da nach Vor. $\alpha \in \mathsf{P}$, die $g_{n\alpha}(x)$ Polynome $\in \mathsf{P}[x]$, und zwar von einem Grade $\leqq n/2$. Weiter ist jetzt für $\varkappa \geqq 2$ nach (8)

$$(9)\quad \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha+\varkappa} J_{\alpha+\varkappa}(x) = g_{\varkappa-1,\alpha}\left(\frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha+1} J_{\alpha+1}(x) - \frac{x^2}{4} g_{\varkappa-2,\alpha+1}\left(\frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(x).$$

Setzt man nun mit SIEGEL [5], 59 (89) (91)

$$K_\alpha(x) = \Gamma(\alpha+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(x),$$

so wird nach (7), (9) schließlich

$$(10)\qquad F(z) = \sum_{\lambda=1}^{l} P_\lambda(z)\, K_\alpha\left(2\sqrt{\varrho_\lambda z}\right) + Q_\lambda(z)\, \frac{K_{\alpha+1}\left(2\sqrt{\varrho_\lambda z}\right)}{\alpha+1}.$$

Dabei ist gesetzt (leere Summen sind Null!)

$$(11)\quad \begin{cases} P_\lambda(z) = c_{\lambda 0} - \varrho_\lambda z \sum_{\varkappa=2}^{k_\lambda - 1} c_{\lambda\varkappa} \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!}\, g_{\varkappa-2,\alpha+1}(\varrho_\lambda z) \\ Q_\lambda(z) = \varrho_\lambda z \sum_{\varkappa=1}^{k_\lambda - 1} c_{\lambda\varkappa} \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!}\, g_{\varkappa-1,\alpha}(\varrho_\lambda z). \end{cases}$$

Es sind also $P_\lambda(z)$, $Q_\lambda(z)$ Polynome, die nicht alle identisch verschwinden, vom Grade $\leqq k_\lambda/2$, und mit Koeffizienten $\in K_\lambda$, wie sofort aus (6), (11) hervorgeht. Vermöge der Formel

$$\frac{x}{2}\,\frac{K_{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} = -K'_\alpha(x)$$

kann auch noch $K_{\alpha+1}$ aus (10) entfernt werden.

Nach SIEGEL [5], §14, S. 73 sind nun für algebraische ξ_λ mit voneinander und von Null verschiedenen Quadraten ξ_λ^2 die $2l$ Werte $K_\alpha(\xi_\lambda)$, $K'_\alpha(\xi_\lambda)$ oder auch $K_\alpha(\xi_\lambda)$, $K_{\alpha+1}(\xi_\lambda)$ über dem Körper aller algebraischen Zahlen algebraisch unabhängig. Indem wir $2\sqrt{\varrho_\lambda \zeta} = \xi_\lambda$ setzen, schließen wir aus der linearen Relation (10) für $z=\zeta$, daß $F(\zeta)$ für algebraisches $\zeta \neq 0$ genau dann algebraisch ausfällt, wenn ζ eine von Null verschiedene Nullstelle des größten gemeinsamen Teilers $D(z)$ der sämtlichen Polynome $P_\lambda(z)$, $Q_\lambda(z)$ ist. Wie bei (6) folgt, daß $D(z) \in K[z]$; ferner ist diesmal Grad $D(z) \leqq \mathrm{Max}\,\frac{k_\lambda}{2}$, und damit ist Satz 3 bewiesen.

Die letzte Aussage in Satz 2 bzw. 3 hat insbesondere zur Folge, daß $F(\zeta)$, sicher transzendent wird, wenn ζ eine algebraische Zahl von einem Grad $> h$ über K bedeutet. — Für $k_\lambda \leqq 2$ sind etwa vorhandene $\zeta_j \in K$.

Literatur

[1] DIETRICH, E., and A. ROSENTHAL: Transcendence of factorial series with periodic coefficients. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 954–956 (1949).

[2] MARKOFF, A. A.: Differenzenrechnung. Leipzig 1896.

[3] NÖRLUND, N. E.: Differenzenrechnung. Berlin 1924.

[4] POPKEN, J.: An arithmetical theorem concerning linear differential equations of infinite order. Indag. math. Amsterdam **12**, 522–533 (1950) (mit weiteren Lit.-Hinweisen).

[5] SIEGEL, C. L.: Transcendental numbers. Ann. math. studies, **16**. Princeton University Press 1949.

[6] WATSON, G. N.: Theory of Bessel Functions. Cambridge: Cambridge University Press 1922.

[7] SCHNEIDER, TH.: Einführung in die transzendenten Zahlen, Berlin 1957. V. Kapitel.

Würzburg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 13. April 1961)

BERGER, R., u. E. KUNZ
Math. Zeitschr. 77, 314–338 (1961)

Über die Struktur der Differentialmoduln von diskreten Bewertungsringen

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

ROBERT BERGER und ERNST KUNZ

Die Struktur der Differentialmoduln diskreter Bewertungsringe wurde zuerst von E. KÄHLER (in seiner Arbeit [6]) studiert. Die Kählersche Theorie wurde von F. K. SCHMIDT in unveröffentlichten Untersuchungen weitergeführt und wesentlich verfeinert. Aufbauend auf Ergebnissen von F. K. SCHMIDT und an seine Gedankengänge anknüpfend soll im folgenden eine Strukturuntersuchung der Differentialmoduln diskreter Bewertungsringe vorgenommen werden, wobei im Unterschied zu KÄHLER die Endlichkeit des Differentialmoduls nicht vorausgesetzt wird. Die Verfasser danken Herrn Professor F. K. SCHMIDT herzlich für die wertvollen Anregungen, durch die er ihre Arbeit gefördert hat.

Während in der Kählerschen Theorie die Berechnung bzw. Abschätzung der Differenten im Vordergrund steht, wird im folgenden das Hauptgewicht auf die Zerlegung des Differentialmoduls in eine direkte Summe von möglichst einfachen Untermoduln gelegt. Die Struktur eines Moduls wird als bekannt angesehen, wenn es gelungen ist, ihn in eine direkte Summe von direkt unzerlegbaren Moduln zu zerlegen und wenn angegeben ist, wie oft ein direkt unzerlegbarer Modul eines gewissen Typs in der direkten Summe auftritt. Die Struktur eines endlich erzeugbaren Moduls über einem diskreten Bewertungsring ist in diesem Sinne bekannt, wenn die Elementarteiler des Moduls bekannt sind. Obwohl die in den meisten Anwendungen auftretenden Differentialmoduln endlich erzeugbar sind, besitzen auch die nicht endlich erzeugbaren Differentialmoduln ein gewisses Interesse, vor allem, weil kein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür bekannt ist, wann ein Differentialmodul eines diskreten Bewertungsrings endlich erzeugbar ist.

Es sei R ein diskreter Bewertungsring (vom Rang 1), P ein beliebiger unitärer Unterring. Wir bezeichnen den Differentialmodul von R über P mit $M(R/\mathsf{P})$. $\mathfrak{P}$ sei das Primideal, $\mathfrak{R}$ der Restklassenkörper von R und $\mathfrak{k} = Q(P/\mathfrak{P} \cap \mathsf{P})$ der Quotientenkörper von $\mathsf{P}/\mathfrak{P} \cap \mathsf{P}$. Anstatt den Differentialmodul $M(R/\mathsf{P})$ direkt zu untersuchen, werden wir diesen Modul in den Modul $\overline{M} = \hat{R} \otimes_R M(R/\mathsf{P})$ einbetten, wo $\hat{R}$ die Komplettierung von R bedeutet. Dies empfiehlt sich deshalb, weil ein Modul über einem kompletten diskreten Bewertungsring eine durchsichtigere Struktur besitzt als ein Modul über einem nicht kompletten diskreten Bewertungsring, z. B. gibt es nur 4 Typen von direkt unzerlegbaren Moduln über kompletten diskreten Bewertungsringen (man vgl. hierzu [8],

Cor. 2 zu Theorem 23). Die Struktur wird unter der Voraussetzung studiert, daß der Differentialmodul $M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k})$ endlich erzeugbar ist. Diese Voraussetzung ist wesentlich schwächer als die Voraussetzung, daß $M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar ist. $\bar{M}$ stimmt mit $M(R/\mathsf{P})$ überein, wenn R schon komplett ist. Ist $M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar, dann ist mit der Struktur von $\bar{M}$ auch die von $M(R/\mathsf{P})$ bekannt. Im Fall, daß $M(R/\mathsf{P})$ nicht endlich erzeugbar und R nicht komplett ist, erhält man aus den Strukturaussagen für $\bar{M}$ nicht unmittelbar auch Strukturaussagen für $M(R/\mathsf{P})$. Doch besitzt $M(R/\mathsf{P})$ auf jeden Fall ein R-isomorphes Bild in $\bar{M}$.

Es wird zunächst gezeigt, daß $\bar{M}$ eine (bis auf Isomorphie eindeutige) Zerlegung

$$\bar{M} = F \oplus T \oplus D$$

besitzt, wo F ein endlich erzeugbarer freier $\hat{R}$-Modul ist, T ein endlich erzeugbarer Torsionsmodul und D ein Divisionsmodul. Die weiteren Untersuchungen konzentrieren sich dann darauf, die minimalen Erzeugendenanzahlen von F und T zu bestimmen. Sie werden durch arithmetische Invarianten der Ringerweiterung R/P ausgedrückt. (Im charakteristikungleichen Fall werden dabei über den Restklassenkörper etwas schärfere Voraussetzungen gemacht.)

Die Struktur von F ist durch die Angabe seiner minimalen Erzeugendenzahl vollständig bestimmt. T ist nach der Elementarteilertheorie eine direkte Summe von soviel zyklischen Summanden, wie der Rang von T beträgt. Die genaue Struktur von T ist bekannt, wenn auch die Annullatoren der zyklischen direkten Summanden (Elementarteiler) bekannt sind. Diese Elementarteiler können in ähnlicher Weise abgeschätzt werden, wie E. KÄHLER bei endlich erzeugbarem Differentialmodul die Differenten abgeschätzt hat. Darauf wird hier jedoch nicht eingegangen werden. D ist als Divisionsmodul eine direkte Summe von Untermoduln, die als $\hat{R}$-Moduln entweder zum Quotientenkörper $\hat{K}$ von $\hat{R}$ oder zu $\hat{K}/\hat{R}$ isomorph sind. Die Anzahl der direkten Summanden vom Typ $\hat{K}$ kann sofort angegeben werden, wenn man noch den Differentialmodul $M(K/\mathsf{P})$ des Quotientenkörpers K von R hinzuzieht. Es läßt sich zeigen, daß direkte Summanden vom Typ $\hat{K}/\hat{R}$ sicher nicht auftreten, wenn R die Charakteristik 0 besitzt und auch P ein diskreter Bewertungsring ist. Im allgemeinen können solche Summanden jedoch auftreten.

Die zum Beweis der Strukturätze benötigten Hilfsmittel werden teilweise allgemeiner entwickelt, als es später notwendig ist, da sie auch selbständiges Interesse besitzen. So enthält die Note auch einige Sätze über Differentialmoduln von Stellenringen und Sätze über die Ausdehnung von Derivationen bei diskreten Bewertungsringen.

§ 1. Eine exakte Folge für den Differentialmodul eines Stellenringes

Unter einem *Stellenring* verstehen wir einen (nicht notwendig noetherschen) kommutativen unitären Ring R, dessen Nichteinheiten ein Ideal bilden. Es sei P ein beliebiger unitärer Unterring von R und $M(R/\mathsf{P})$ der Differential-

modul von R über P. (Für die Grundtatsachen über Differentialmoduln, die im folgenden als bekannt vorausgesetzt werden, vgl. man etwa [9]). Es sei $\mathfrak{P}$ das maximale Ideal von R, $\mathfrak{K}$ der Restklassenkörper von R. Ferner sei $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}\cap\mathsf{P}$, $\mathfrak{k}=Q(\mathsf{P}/\mathfrak{p})$ der Quotientenkörper von $\mathsf{P}/\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{Q}=\mathfrak{p}\cdot R$ das Erweiterungsideal von $\mathfrak{p}$ in R. Hat $\mathfrak{K}$ die Charakteristik $p>0$, so betrachten wir außerdem den Ring $\mathsf{P}^+=\mathsf{P}[R^p]$, das Primideal $\mathfrak{p}^+=\mathfrak{P}\cap\mathsf{P}^+$ und das Ideal $\mathfrak{Q}^+=\mathfrak{p}^+\cdot R$. d bezeichne die Differentiation von R über P.

DEFINITION. *Unter dem Rang eines endlich erzeugbaren R-Moduls M verstehen wir die minimale Anzahl von Erzeugenden von M. Wir schreiben $\mathrm{Rang}_R(M)$ oder auch kurz $\mathrm{Rang}(M)$.*

In [9] wurde unter der Voraussetzung, daß $M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar ist, der Rang von $M(R/\mathsf{P})$ bestimmt. Diese Rangaussage läßt sich allgemeiner in die Form einer exakten Folge kleiden, wodurch die Endlichkeitsvoraussetzung für $M(R/\mathsf{P})$ entbehrlich wird. Es gilt

SATZ 1. *Unter den angegebenen Voraussetzungen werden durch die Folge $R\xrightarrow{d}M(R/\mathsf{P})\to M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})\to 0$ in natürlicher Weise $\mathfrak{K}$-lineare Abbildungen δ bzw. δ^+ und ε induziert, so daß gilt:*

a) Ist $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$ separabel, so ist die Folge

$$0\to\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2\xrightarrow{\delta}M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})\xrightarrow{\varepsilon}M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})\to 0\quad \textit{exakt}\,[1]).$$

b) Hat $\mathfrak{K}$ die Charakteristik $p>0$, so ist die Folge

$$0\to\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2\xrightarrow{\delta^+}M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})\xrightarrow{\varepsilon}M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})\to 0\quad \textit{exakt.}$$

Alle in den Folgen auftretenden Moduln sind dabei in natürlicher Weise als $\mathfrak{K}$-Moduln aufzufassen.

Der Beweis von Satz 1 verläuft weitgehend analog zum Beweis des Rangsatzes von [9]. Wir können uns daher an einigen Stellen kürzer fassen.

BEWEIS. Da $M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})=M(R/\mathsf{P})/Rd\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})\subseteqq Rd\mathfrak{P}$ gilt, hat man eine exakte Folge von $\mathfrak{K}$-Moduln und $\mathfrak{K}$-Homomorphismen

$$M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})\xrightarrow{\varepsilon}M(\mathfrak{K}/\mathfrak{k})\to 0, \tag{1}$$

wobei $Rd\mathfrak{P}/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})$ der Kern von ε ist. Wir betrachten nun die durch $d\colon R\to M(R/\mathsf{P})$ induzierte Abbildung $\mathfrak{P}\to M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})$. Wegen $d\mathfrak{P}^2\subseteqq\mathfrak{P}d\mathfrak{P}$ kann diese Abbildung als $\mathfrak{K}$-lineare Abbildung von $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^2$ in $M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})$ aufgefaßt werden. Wir zeigen, daß das Bild bei dieser Abbildung gerade $Rd\mathfrak{P}/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})$ ist. Dies folgt sofort aus der Gleichung $d(\sum r_i p_i)=\sum r_i dp_i+\sum p_i dr_i$, aus der man abliest, daß jedes Element aus $Rd\mathfrak{P}/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})$ Bild eines Elementes von $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^2$ ist. Außerdem zeigt die Gleichung, daß die

[1]) Die Aussage a) findet sich für den Fall, daß P ein Körper ist, schon bei GODEMENT, Localites simples II, Sem. Cartan-Chevalley **8** (1955/56). Für seinen diesbezüglichen freundlichen Hinweis sei Herrn A. ROSENBERG gedankt.

Abbildung $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^2 \to M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})$ $\mathfrak{R}$-linear ist. Wir können daher die exakte Folge (1) verlängern zu einer exakten Folge

$$\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^2 \to M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P}) \xrightarrow{\varepsilon} M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k}) \to 0. \tag{2}$$

Wir interessieren uns nun für den Kern der ersten Abbildung. Wegen $Rd(\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2)\subseteq\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})$ ist sicher $\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2/\mathfrak{P}^2$ im Kern enthalten. Ferner gilt mit $\dot{R}=R/\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2$, $\dot{\mathsf{P}}=\mathsf{P}/(\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2)\cap\mathsf{P}=\mathsf{P}/\mathfrak{p}$ und $\dot{\mathfrak{P}}=\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2$

$$\begin{aligned} M(\dot{R}/\dot{\mathsf{P}})/\dot{\mathfrak{P}}\cdot M(\dot{R}/\dot{\mathsf{P}}) &\cong \big(M(R/\mathsf{P})/Rd(\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2)\big)/\big(\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})/Rd(\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2)\big) \\ &\cong M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P}). \end{aligned}$$

Beachtet man noch, daß $M(\dot{R}/\dot{\mathsf{P}})=M(\dot{R}/\mathfrak{k})$ mit $\mathfrak{k}=Q(\dot{\mathsf{P}})\subseteq\dot{R}$ gilt, so sieht man sofort, daß man (2) ersetzen darf durch die exakte Folge

$$\dot{\mathfrak{P}}=\dot{\mathfrak{P}}/\dot{\mathfrak{P}}^2 \xrightarrow{\delta} M(\dot{R}/\mathfrak{k})/\dot{\mathfrak{P}}\cdot M(\dot{R}/\mathfrak{k}) \xrightarrow{\varepsilon} M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k}) \to 0. \tag{3}$$

Es sei nun

a) $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{k}$ separabel. $\dot{R}$ ist wegen $\dot{\mathfrak{P}}^2=0$ ein vollständiger lokaler Ring im Sinne von [*10*]. Daher gibt es in $\dot{R}$ einen zu $\mathfrak{R}$ isomorphen Körper, der $\mathfrak{k}$ umfaßt; wir bezeichnen ihn ebenfalls mit $\mathfrak{R}$. $\dot{\mathfrak{P}}$ hat als $\mathfrak{R}$-Modul eine Basis $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Man überlegt sich sofort, daß $\dot{R}$ isomorph zum Ring

$$\mathfrak{R}[\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}]/\mathfrak{n} \tag{4}$$

ist, wo die Y_λ ($\lambda\in\Lambda$) Unbestimmte sind und das Ideal $\mathfrak{n}$ von den Polynomen $Y_{\lambda_1}\cdot Y_{\lambda_2}$ ($\lambda_1, \lambda_2\in\Lambda$) erzeugt wird. Hieraus ergibt sich für den Differentialmodul

$$M(\dot{R}/\mathfrak{k}) = \dot{R}\otimes_{\mathfrak{R}} M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k}) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \dot{R}\,d\,Y_\lambda/\mathfrak{N}\Big),$$

wobei $\mathfrak{N}$ derjenige Untermodul von $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \dot{R}\,d\,Y_\lambda$ ist, der von allen Elementen $p_{\lambda_1}d\,Y_{\lambda_1}+p_{\lambda_2}d\,Y_{\lambda_2}$ ($\lambda_1, \lambda_2\in\Lambda$) erzeugt wird. Mithin ist $M(\dot{R}/\mathfrak{k})/\dot{\mathfrak{P}}\cdot M(\dot{R}/\mathfrak{k}) \cong M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k}) \oplus \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{R}\,d\,Y_\lambda$. Dies zeigt, daß die Abbildung $\delta\colon \dot{\mathfrak{P}} \to M(\dot{R}/\mathfrak{k})/\dot{\mathfrak{P}}\cdot M(\dot{R}/\mathfrak{k})$ ein Monomorphismus ist. Daher ist die Folge

$$0 \to \mathfrak{P}/\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2 \xrightarrow{\delta} M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P}) \xrightarrow{\varepsilon} M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k}) \to 0$$

exakt.

Es sei nun

b) Char. $\mathfrak{R}=p>0$. Dann hat auch $\dot{R}$ die Charakteristik p und somit gilt $M(\dot{R}/\mathfrak{k})=M\big(\dot{R}/\mathfrak{k}[\dot{R}^p]\big)$. Es sei $\dot{\mathfrak{Q}}^+=\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2/\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^2$. Dann ist $\dot{\mathfrak{Q}}^+=\big(\dot{\mathfrak{P}}\cap\mathfrak{k}[\dot{R}^p]\big)\cdot\dot{R}$ und wird folglich von Elementen aus $\mathfrak{k}[\dot{R}^p]$ erzeugt. Es sei $\dot{d}$ die Differentiation von $\dot{R}$ über $\mathfrak{k}[\dot{R}^p]$. Dann folgt $\dot{R}\dot{d}\dot{\mathfrak{Q}}^+\subseteq\dot{\mathfrak{P}}M\big(\dot{R}/\mathfrak{k}[\dot{R}^p]\big)$. Wir setzen $\ddot{R}=\dot{R}/\dot{\mathfrak{Q}}^+ = R/\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2$, $\ddot{\mathfrak{P}}=\dot{\mathfrak{P}}/\dot{\mathfrak{Q}}^+=\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2$ und $\ddot{\mathsf{P}}^+=\mathfrak{k}[\dot{R}^p]/\dot{\mathfrak{Q}}^+\cap\mathfrak{k}[\dot{R}^p]=\mathfrak{k}[\mathfrak{R}^p]$. Dann gilt

$$M\big(\ddot{R}/\mathfrak{k}[\mathfrak{R}^p]\big)/\ddot{\mathfrak{P}}\cdot M\big(\ddot{R}/\mathfrak{k}[\mathfrak{R}^p]\big) \cong M(\dot{R}/\mathfrak{k})/\dot{\mathfrak{P}}\cdot M(\dot{R}/\mathfrak{k}) \cong M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P}).$$

Es ergibt sich, daß $\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2/\mathfrak{P}^2$ im Kern der ersten Abbildung der Folge (2) enthalten ist, woraus folgt, daß auch die Folge

$$\ddot{\mathfrak{P}} \xrightarrow{\delta^+} M(\ddot{R}/\mathfrak{k}[\mathfrak{R}^p])/\ddot{\mathfrak{P}} \cdot M(\ddot{R}/\mathfrak{k}[\mathfrak{R}^p]) \xrightarrow{\varepsilon} M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k}) \to 0 \tag{5}$$

exakt ist.

$\ddot{R}$ enthält wegen $\ddot{R}^p \subseteq \mathfrak{k}[\mathfrak{R}^p]$ einen zu $\mathfrak{R}$ isomorphen Körper, der $\mathfrak{k}[\mathfrak{R}^p]$ umfaßt. Er werde ebenfalls mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet. Ist $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Basis des $\mathfrak{R}$-Moduls $\ddot{\mathfrak{P}}$, so folgt, daß $\ddot{R}$ isomorph zum Ring (4) ist. Wie unter a) schließt man, daß die Folge

$$0 \to \ddot{\mathfrak{P}} \xrightarrow{\delta^+} M(\ddot{R}/\mathfrak{k}[\mathfrak{R}^p])/\ddot{\mathfrak{P}} \cdot M(\ddot{R}/\mathfrak{k}[\mathfrak{R}^p]) \xrightarrow{\varepsilon} M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k}) \to 0$$

exakt ist. Dann ist auch die Folge

$$0 \to \mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2 \xrightarrow{\delta^+} M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P}) \xrightarrow{\varepsilon} M(\mathfrak{R}/k) \to 0$$

exakt q.e.d.

FOLGERUNG 1. *$M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P})$ ist dann und nur dann ein endlich erzeugbarer $\mathfrak{R}$-Modul (oder R-Modul, was auf das gleiche hinausläuft), wenn im Fall* a) *$\mathfrak{P}/\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}^2$ und $M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k})$ endlich erzeugbar sind, im Fall* b), *wenn $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2$ und $M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k})$ endlich erzeugbar sind.*

Ist $M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar, so folgt i. A. nicht, daß auch $M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar ist, wohl aber, daß $M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}^\nu \cdot M(R/\mathsf{P})$ als R-Moduln endlich erzeugbar sind ($\nu = 1, 2, \ldots$).

FOLGERUNG 2. *Ist $M(R/\mathsf{P})$ als R-Modul endlich erzeugbar, so gilt im Fall* a) *$Rang_R M(R/\mathsf{P}) = Rang_{\mathfrak{R}} (\mathfrak{P}/\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}^2) + \mathrm{Rang}_{\mathfrak{R}} M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k})$*, im Fall b) *$Rang_R M(R/\mathsf{P}) = Rang_{\mathfrak{R}} (\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2) + Rang_{\mathfrak{R}} M(\mathfrak{R}/k)$.*

§ 2. Separierter Differentialmodul und Komplettierung[2])

Wenn ein Stellenring R im folgenden als topologischer Ring aufgefaßt wird, dann immer hinsichtlich der durch die Potenzen seines maximalen Ideals $\mathfrak{P}$ gegebenen Topologie. Wird ein R-Modul M als topologischer Modul aufgefaßt, dann wird immer stillschweigend vorausgesetzt, daß seine Topologie die durch die Untermoduln $\mathfrak{P}^\nu \cdot M$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) gegebene Topologie ist. R heißt separiert, wenn $\bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu = 0$ ist, M heißt separiert, wenn $\bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu \cdot M = 0$ gilt. Die Begriffe „Komplettierung eines Stellenrings" und „kompletter Stellenring" werden mit Hilfe des inversen Limes definiert (vgl. etwa [4]): Für einen beliebigen Stellenring R heißt $\hat{R} = \varprojlim R/\mathfrak{P}^\nu$ die Komplettierung von R; R heißt komplett, wenn der natürliche Homomorphismus von R in $\hat{R}$ ein Isomorphismus von R auf $\hat{R}$ ist. Für einen beliebigen R-Modul M heißt $\hat{M} = \varprojlim M/\mathfrak{P}^\nu \cdot M$ die Komplettierung von M; M heißt komplett, wenn der natürliche Homomorphismus

[2]) *Anmerkung bei der Korrektur.* Die Theorie der separierten Differentialmoduln wurde ausführlicher als es hier geschehen wird in der kürzlich erschienenen Arbeit von Y. NAKAI und S. SUZUKI: On m-adic differentials, J. Sci. Hiroshima **24**, 459—476 (1960) entwickelt. Die folgenden Sätze überschneiden sich teilweise mit Sätzen dieser Arbeit.

von M in $\hat{M}$ ein Isomorphismus auf $\hat{M}$ ist. Einige Grundtatsachen über die Komplettierung von Stellenringen werden im folgenden als bekannt vorausgesetzt.

DEFINITION. *Ein separierter R-Modul M' heißt separierter Differentialmodul von R über P, wenn es eine Derivation $d'\colon R \to M'$ von R über P in M' gibt, so daß gilt: 1. M' wird von den Elementen $d'r$ mit $r \in R$ erzeugt. 2. Jede Derivation $D\colon R \to N$ von R über P in einen separierten R-Modul N ist eine Spezialisierung von d', d.h. es gibt eine R-lineare Abbildung $h'\colon M' \to N$ mit $D = h' \circ d'$* [3]).

Es ist klar, daß ein separierter Differentialmodul M', wenn ein solcher existiert, bis auf stetige R-Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Wir sprechen daher von *dem* separierten Differentialmodul und bezeichnen ihn mit $M'(R/\mathsf{P})$. Es ist leicht zu zeigen, daß $M'(R/\mathsf{P})$ immer existiert, denn der Modul $M(R/\mathsf{P})/\bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu \cdot M(R/\mathsf{P})$ besitzt die in der Definition vorkommenden Eigenschaften 1. und 2., wenn für d' die durch die Differentiation $d\colon R \to M(R/\mathsf{P})$ induzierte Abbildung genommen wird. Daß 1. gilt, ist unmittelbar klar. Auf Grund der universellen Eigenschaft von $M(R/\mathsf{P})$ gibt es eine R-lineare Abbildung $h\colon M \to N$ mit $D = h \circ d$. Wegen $h(\mathfrak{P}^\nu \cdot M) \subseteqq \mathfrak{P}^\nu \cdot N$ ist $h\left(\bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu M\right) \subseteqq \bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu \cdot N = 0$. h induziert daher eine R-lineare Abbildung $h'\colon M/\bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu \cdot M \to N$ und es gilt $D = h' \circ d'$.

ANMERKUNG. *Ist R separiert, so ist die Derivation d' mit der Limesbildung vertauschbar.*

Gilt nämlich $r - r_\nu \in \mathfrak{P}^\nu$ für ein Element $r \in R$ und eine Folge $\{r_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ von Elementen aus R, so ergibt sich $d'r - d'r_\nu \in \mathfrak{P}^{\nu-1} d' \mathfrak{P} \subseteqq \mathfrak{P}^{\nu-1} \cdot M'(R/\mathsf{P})$. Folglich ist $d'\left(\lim_{\nu\to\infty} r_\nu\right) = \lim_{\nu\to\infty} d'r_\nu$.

In vielen Fällen spielt der separierte Differentialmodul $M'(R/\mathsf{P})$ eine wichtigere Rolle als der Differentialmodul $M(R/\mathsf{P})$ selbst. Es ist daher von Bedeutung, daß Satz 1 auch für den separierten Differentialmodul gilt:

SATZ 2. *Die Aussagen von Satz 1 und seinen Folgerungen 1 und 2 bleiben richtig, wenn $M(R/\mathsf{P})$ und d durch $M'(R/\mathsf{P})$ bzw. d' ersetzt werden.*

Dies folgt sofort aus

$$M'(R/\mathsf{P}) = M(R/\mathsf{P})/\bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu \cdot M(R/\mathsf{P}) \quad \text{und} \quad \bigcap_\nu \mathfrak{P}^\nu \cdot M(R/\mathsf{P}) \subseteqq \mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P}) \subseteqq R d \mathfrak{P}.$$

Ist R komplett (und daher auch separiert), so ist $M'(R/\mathsf{P})$ schon endlich erzeugbar, wenn $M'(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P} \cdot M'(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar ist, im Gegensatz zum Differentialmodul $M(R/\mathsf{P})$:

SATZ 3. *Ist R komplett, so gilt: $M'(R/\mathsf{P})$ ist dann und nur dann endlich erzeugbar, wenn $M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k})$ und im Fall* a) $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}^2$, *im Fall* b) $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^+ + \mathfrak{P}^2$ *endlich erzeugbar sind.*

---

[3]) Dabei bedeutet die Verknüpfung $h' \circ d'$ zweier Abbildungen hier wie auch im folgenden das Produkt der Abbildungen im Sinne der Hintereinanderausführung:

$$h' \circ d'(x) = h'(d'(x)).$$

BEWEIS. Daß die Bedingungen notwendig sind, ergibt sich aus Satz 2. Sind sie erfüllt, so ist nach Satz 2 jedenfalls $M'(R/\mathfrak{P})/\mathfrak{P}\cdot M'(R/\mathfrak{P})$ endlich erzeugbar. Daß $M'(R/\mathfrak{P})$ dann selbst endlich erzeugbar ist, ergibt sich aus

HILFSSATZ 1. *M sei ein separierter Modul über einem kompletten Stellenring R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$. Ist $M/\mathfrak{P}\cdot M$ endlich erzeugbar, dann ist M selbst endlich erzeugbar und komplett.*

BEWEIS. Da $M/\mathfrak{P}\cdot M$ endlich erzeugbar ist, folgt $M=E+\mathfrak{P}\cdot M$ mit einem endlich erzeugbaren Untermodul E von M, daraus $M=E+\mathfrak{P}\cdot E+\mathfrak{P}^2\cdot E+\cdots+\mathfrak{P}^\nu\cdot E+\mathfrak{P}^{\nu+1}\cdot M$ für $\nu=0,1,\ldots$ Ist $E=R\,\omega_1+\cdots+R\,\omega_n$, so besitzt jedes $m\in M$ eine Darstellung $m=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{\nu}p_{ik}\right)\omega_k+m_{\nu+1}$ mit $p_{ik}\in\mathfrak{P}^i$ $(k=1,\ldots,n;\ \mathfrak{P}^0=R)$ und $m_{\nu+1}\in\mathfrak{P}^{\nu+1}\cdot M$. Ist $r_k=\sum_{i=0}^{\infty}p_{ik}$, so folgt sofort $m=\sum_{k=1}^{n}r_k\,\omega_k\in E$. Mithin ist $M=E$ endlich erzeugbar und folglich auch komplett.

SATZ 4. *R sei ein separierter Stellenring, dessen maximales Ideal $\mathfrak{P}$ endlich erzeugbar ist. $\hat{R}$ sei die Komplettierung von R und $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar. Dann gilt: $M'(\hat{R}/\mathsf{P})\cong\varprojlim M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}^\nu\cdot M(R/\mathsf{P})$.*

BEWEIS. Da R separiert ist, ist der natürliche Homomorphismus $R\to\hat{R}$ ein Monomorphismus; daher kann R und folglich auch P als Unterring von $\hat{R}$ aufgefaßt werden. Somit ist $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ definiert. Es sei $\hat{\mathfrak{P}}$ das maximale Ideal von $\hat{R}$. Da $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar ist und $\hat{R}$ komplett, ist auch $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ komplett: $M'(\hat{R}/\mathsf{P})\cong\varprojlim M'(\hat{R}/\mathsf{P})/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M'(\hat{R}/\mathsf{P})$. Wegen $M'(\hat{R}/\mathsf{P})=M(\hat{R}/\mathsf{P})/\bigcap\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M(\hat{R}/\mathsf{P})$ ist $M'(\hat{R}/\mathsf{P})/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M'(\hat{R}/\mathsf{P})=M(\hat{R}/\mathsf{P})/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M(\hat{R}/\mathsf{P})$. Es sei $\hat{d}\colon\hat{R}\to M(\hat{R}/\mathsf{P})$ die Differentiation von $\hat{R}$ über P. Dann gilt

$$(1)\qquad \hat{\mathfrak{P}}^{\nu+1}\cdot M(\hat{R}/\mathsf{P})\subseteqq\hat{R}\,\hat{d}\,\hat{\mathfrak{P}}^{\nu+1}\subseteqq\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M(\hat{R}/\mathsf{P})\qquad(\nu=1,2,\ldots)$$

und folglich $\varprojlim M(\hat{R}/\mathsf{P})/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M(\hat{R}/\mathsf{P})\cong\varprojlim M(\hat{R}/\mathsf{P})/\hat{R}\,\hat{d}\,\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cong\varprojlim M(\hat{R}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu/\mathsf{P}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cap\mathsf{P})$. Da $\mathfrak{P}$ endlich erzeugbar vorausgesetzt ist, gilt $\hat{R}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cong R/\mathfrak{P}^\nu$ $(\nu=1,2,\ldots)$. Es folgt $M(\hat{R}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu/\mathsf{P}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cap\mathsf{P})=M(R/\mathfrak{P}^\nu/\mathsf{P}/\mathfrak{P}^\nu\cap\mathsf{P})=M(R/\mathsf{P})/R\,d\mathfrak{P}^\nu$, wenn alle Moduln in natürlicher Weise als $R/\mathfrak{P}^\nu$-Moduln aufgefaßt werden. Da (1) auch mit R und d an Stelle von $\hat{R}$ und $\hat{d}$ richtig ist, folgt $\varprojlim M(R/\mathsf{P})/R\,d\mathfrak{P}^\nu=\varprojlim M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}^\nu\cdot M(R/\mathsf{P})$. Damit ist Satz 4 bewiesen.

§ 3. Einbettung des Differentialmoduls in einen Modul über der Komplettierung

Der folgende Satz bildet die Grundlage für die in der Einleitung behauptete direkte Summenzerlegung des Moduls $\overline{M}=\hat{R}\otimes_R M(R/\mathsf{P})$. Wir benötigen ihn nur für diskrete Bewertungsringe R, beweisen ihn jedoch gleich allgemeiner für separierte Stellenringe mit endlich erzeugtem maximalem Ideal.

SATZ 5. *R sei ein separierter Stellenring mit endlich erzeugbarem maximalem Ideal $\mathfrak{P}$, $\hat{R}$ seine Komplettierung, $\hat{\mathfrak{P}}=\mathfrak{P}\cdot\hat{R}$ ihr maximales Ideal. $M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k})$ sei endlich erzeugbar. Dann gilt mit $\overline{M}=\hat{R}\otimes_R M(R/\mathsf{P})$ und $D=\bigcap_\nu \hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot\overline{M}$:*

$$M'(\hat{R}/\mathsf{P})=\overline{M}/D.$$

BEWEIS. Es gilt im Sinne kanonischer Isomorphie:

$$\begin{aligned}\overline{M}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot\overline{M}&=\hat{R}\otimes_R M(R/\mathsf{P})/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot\left(\hat{R}\otimes_R M(R/\mathsf{P})\right)\\&=\hat{R}\otimes_R M(R/\mathsf{P})/\left(\hat{R}\otimes\mathfrak{P}^\nu\cdot M(R/\mathsf{P})+\hat{\mathfrak{P}}^\nu\otimes M(R/\mathsf{P})\right)\\&\cong(\hat{R}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu)\otimes_R\left(M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}^\nu\cdot M(R/\mathsf{P})\right)\cong(R/\mathfrak{P}^\nu)\otimes_R\left(M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}^\nu\cdot M(R/\mathsf{P})\right)\\&\cong M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}^\nu\cdot M(R/\mathsf{P}).\end{aligned}$$

Auf Grund der Voraussetzungen über $\mathfrak{P}$ und $M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k})$ ergibt sich aus Folgerung 1 von Satz 1, daß $M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}\cdot M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar ist. Wird $M_1=\overline{M}/D$ gesetzt, so ist $M_1/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M_1=\overline{M}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot\overline{M}$ wegen $D\subseteqq\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot\overline{M}$. Nach Hilfssatz 1 folgt, daß M_1 endlich erzeugbar und komplett ist:

$$M_1=\varprojlim M_1/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot M_1=\varprojlim\overline{M}/\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot\overline{M}=\varprojlim M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P}^\nu\cdot M(R/\mathsf{P}).$$

Da andererseits $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ nach Satz 3 endlich erzeugbar ist, folgt nach Satz 4, daß der letzte inverse Limes mit $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ übereinstimmt.

FOLGERUNG 1. *Es gilt $\overline{M}=E\dotplus D$ mit einem endlich erzeugbaren $\hat{R}$-Modul E, der denselben Rang wie $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ hat.*

FOLGERUNG 2. *Ist $M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar, so gilt*

$$M'(\hat{R}/\mathsf{P})=\hat{R}\otimes_R M(R/\mathsf{P})=\overline{M}.$$

BEWEIS. Ist $M(R/\mathsf{P})$ endlich erzeugbar, dann ist auch $\overline{M}$ endlich erzeugbar. Weil $\hat{R}$ komplett ist, folgt $D=0$ (s. [4], Chap. 0, Cor. 7.2.6.).

Für den Rest der Arbeit machen wir nun die folgenden

VORAUSSETZUNGEN. *Es sei R ein diskreter Bewertungsring (vom Rang 1) mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$, dem Restklassenkörper $\mathfrak{R}$ und dem Quotientenkörper K. P sei ein beliebiger unitärer Unterring von R mit dem Quotientenkörper k, und $\mathfrak{k}=Q(\mathsf{P}/\mathfrak{P}\cap\mathsf{P})$ sei der Quotientenkörper von $\mathsf{P}/\mathfrak{P}\cap\mathsf{P}$. $M(\mathfrak{R}/\mathfrak{k})$ wird endlich erzeugbar vorausgesetzt, d.h. hat $\mathfrak{k}$ die Charakteristik 0, so hat $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{k}$ endlichen Transzendenzgrad, hat $\mathfrak{k}$ die Charakteristik $p\neq 0$, so hat $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{k}$ endlichen p-Grad. $\hat{R}$ sei die Komplettierung von R, $\overline{M}=\hat{R}\otimes_R M(R/\mathsf{P})$. $\hat{K}$ sei der Quotientenkörper von $\hat{R}$.*

Satz 5 kann nun verschärft werden zu

SATZ 6. *Unter den angegebenen Voraussetzungen gilt:*

1. $\overline{M}=E\oplus D$, wo E ein endlich erzeugbarer, zu $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$ isomorpher K-Modul ist und $D=\bigcap_\nu\hat{\mathfrak{P}}^\nu\cdot\overline{M}$ der größte in $\overline{M}$ enthaltene Divisionsmodul ist, d.h. der größte Untermodul von $\overline{M}$ mit $D=\hat{\mathfrak{P}}\cdot D$.

2. Der Rang von E wird durch Satz 2 gegeben. E besitzt eine Zerlegung $E=F\oplus T$ in einen endlich erzeugbaren freien $\hat{R}$-Modul F und einen endlich erzeugbaren Torsionsmodul T.

3. D ist isomorph zu einer direkten Summe von Divisionsmoduln D_λ, D_μ der folgenden beiden Typen: $D_\lambda\cong\hat{K}$ für $\lambda\in\Lambda$ (torsionsfreie Divisionsmoduln), $D_\mu\cong\hat{K}/\hat{R}$ für $\mu\in\mathsf{M}$ (Torsionsdivisionsmoduln): $D=\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda\oplus\bigoplus\limits_{\mu\in\mathsf{M}} D_\mu$.

ANMERKUNGEN. 1. Für die modultheoretischen Begriffe Divisionsmodul, Torsionsmodul usw. vgl. man KAPLANSKY [8].

2. Durch Satz 6 wird die Untersuchung der Struktur von $\bar{M}$ zurückgeführt auf die Untersuchung der Struktur von F, T und D. Im folgenden wird der Rang von F bestimmt; dann ist auch der Rang von T bekannt als Differenz der Ränge von E und F.

3. Genau dann, wenn $M(K/k)$ endlich erzeugbar ist, ist auch die Anzahl der D_λ (die isomorph zu $\hat{K}$ sind) endlich und es gilt: Anzahl der $D_\lambda=\mathrm{Rang}_K M(K/k)-\mathrm{Rang}_{\hat{R}} F$.

BEWEIS. Es gilt einerseits nach Satz 6: $\hat{K}\otimes_{\hat{R}}\hat{R}\otimes_R M\cong\hat{K}\otimes_{\hat{R}} F\oplus\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda}\hat{K}\otimes_{\hat{R}} D_\lambda$, andererseits $\hat{K}\otimes_{\hat{R}}\hat{R}\otimes_R M\cong\hat{K}\otimes_R M\cong\hat{K}\otimes_K K\otimes_R M\cong\hat{K}\otimes_K M(K/k)$ und $\mathrm{Rang}_{\hat{K}}\hat{K}\otimes_K M(K/k)=\mathrm{Rang}_K M(K/k)$. Daraus liest man die Behauptung sofort ab.

BEWEIS von Satz 6. Nach der Folgerung 1 von Satz 5 gilt $\bar{M}=\tilde{E}+D$ mit einem endlich erzeugbaren R-Modul $\tilde{E}$. Wir zeigen anschließend in einem Hilfssatz, daß daraus folgt, daß D der größte Divisionsuntermodul von $\bar{M}$ ist und daß deshalb $\bar{M}=E\oplus D$ mit einem endlich erzeugbaren $\hat{R}$-Modul E gilt. Nach Satz 5 ist $\bar{M}/D=M'(\hat{R}/\mathsf{P})$, daher E isomorph zu $M'(\hat{R}/\mathsf{P})$. Die direkte Summenzerlegung von E ergibt sich unmittelbar aus der Elementarteilertheorie. Die direkte Summenzerlegung von D folgt aus dem Analogon zu [8], Theorem 4 für Moduln über diskreten Bewertungsringen (vgl. [8], §12 und Cor. 2 zu Theorem 23).

DEFINITION. *Ein Element m eines R-Moduls M hat die Höhe $h(m)=\nu$ in M, wenn $m\in\mathfrak{P}^\nu\cdot M$, $m\notin\mathfrak{P}^{\nu+1}\cdot M$. Es hat unendliche Höhe, wenn $m\in\bigcap\limits_\nu\mathfrak{P}^\nu\cdot M$* (vgl. [8], §9).

HILFSSATZ 2. *Ist M ein R-Modul mit $M=\tilde{E}+U$, wo $\tilde{E}$ endlich erzeugbar ist und alle Elemente von U unendliche Höhe haben, dann gilt $M=E\oplus D$ mit einem endlich erzeugbaren R-Modul E und einem Divisionsmodul D.*

BEWEIS durch vollständige Induktion nach der Anzahl n der Erzeugenden von $\tilde{E}$.

1. Für $n=0$ ist $M=U$. Jedes Element von M hat dann unendliche Höhe in M. Folglich ist $M=D$ ein Divisionsmodul.

2. Der Hilfssatz sei nun für alle Moduln bewiesen, bei denen sich $\tilde{E}$ von $n-1$ Elementen erzeugen läßt. Es sei $M=\langle y_1,\ldots,y_n\rangle+U$. D sei der größte Divisionsmodul, der in M enthalten ist; seine Existenz ergibt sich

aus [8], Theorem 3. Es sei $\dot{M}=M/D=\langle \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n\rangle+\dot{U}$. Da $\dot{U}$ homomorphes Bild von U ist, haben die Elemente von $\dot{U}$ unendliche Höhe in $\dot{M}$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

a) $\dot{M}$ sei torsionsfrei. Ist $\dot{W}$ die Menge aller Elemente von $\dot{M}$, die unendliche Höhe in $\dot{M}$ haben, so ist $\dot{U}\subseteq\dot{W}$. Wir zeigen, daß $\dot{W}$ ein Divisionsmodul ist.

Es sei Π ein Primelement von R. Ist $\dot{x}\in\dot{W}$ und Π^r vorgegeben, so gibt es ein $\dot{z}\in\dot{M}$ mit $\dot{x}=\Pi^r\cdot\dot{z}$. Zu beliebigem natürlichen s existiert ferner ein $\dot{v}\in\dot{M}$ mit $\dot{x}=\Pi^{r+s}\cdot\dot{v}$. Es folgt $\Pi^r(\dot{z}-\Pi^s\cdot\dot{v})=0$ und hieraus, weil $\dot{M}$ torsionsfrei ist, $\dot{z}=\Pi^s\cdot\dot{v}$. Da s beliebig war, hat mithin auch $\dot{z}$ unendliche Höhe in $\dot{M}$ und liegt daher in $\dot{W}$.

Da D der größte Divisionsmodul von M war, enthält $\dot{M}$ keinen Divisionsmodul, der von 0 verschieden ist (vgl. [8], Theorem 3). Daher ist $\dot{W}=0$, folglich $\dot{U}=0$ und $U\subseteq D$. Nach [8], Theorem 2 ist D ein direkter Summand von M: $M=\langle y_1, \ldots, y_n\rangle+D=E\oplus D$. Es folgt $E\cong M/D=\langle \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n\rangle$. Folglich ist E endlich erzeugbar, q.e.d.

b) $\dot{M}$ sei *nicht* torsionsfrei. Da $\dot{M}$ reduziert ist, d.h. keinen Divisionsmodul $\neq 0$ enthält, besitzt $\dot{M}$ nach [8], Theorem 9 einen direkten zyklischen Summanden: $\dot{M}=\langle\dot{x}\rangle\oplus\ddot{M}$. Man sieht sofort, daß $\dot{x}$ die Höhe 0 in $\dot{M}$ hat. Es sei $\dot{x}=\alpha_1\dot{y}_1+\cdots+\alpha_n\dot{y}_n+\dot{u}$ mit $\alpha_i\in R$, $\dot{u}\in\dot{U}$. Es können nicht alle α_i durch Π teilbar sein, denn sonst hätte $\dot{x}$ mindestens die Höhe 1 in $\dot{M}$, da $\dot{u}$ als Element unendlicher Höhe in $\Pi\cdot\dot{M}$ enthalten ist. Eines der Elemente, etwa α_n, ist also Einheit in R. Es folgt $\dot{y}_n\in\langle\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_{n-1}, \dot{x}\rangle+\dot{U}$, daraus $\dot{M}=\langle\dot{x}\rangle+\langle\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_{n-1}\rangle+\dot{U}$. Dann ist $\ddot{M}\cong\dot{M}/\langle\dot{x}\rangle=\langle\ddot{y}_1, \ldots, \ddot{y}_{n-1}\rangle+\ddot{U}$ und $\ddot{U}$ besteht als homomorphes Bild von $\dot{U}$ aus Elementen unendlicher Höhe in $\ddot{M}$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\ddot{M}=\ddot{E}\oplus\ddot{D}$, wo $\ddot{E}$ endlich erzeugbar ist und $\ddot{D}$ ein Divisionsmodul. Es ergibt sich weiter $\dot{M}\cong\langle\dot{x}\rangle\oplus\ddot{E}\oplus\ddot{D}$. Weil $\dot{M}$ reduziert ist, folgt $\ddot{D}=0$. Mithin ist $\dot{M}$ endlich erzeugbar. D ist als Divisionsmodul direkter Summand von M: $M=E\oplus D$. $E\cong M/D=\dot{M}$ ist endlich erzeugbar. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Folgerung. *Es sei $M=\widetilde{E}+U$, $\widetilde{E}$ endlich erzeugbar, $U=\bigcap_{\nu}\mathfrak{P}^{\nu}\cdot M$. Dann folgt: U stimmt mit dem größten Divisionsmodul D von M überein.*

Beweis. U ist der Untermodul, der von allen Elementen unendlicher Höhe in M gebildet wird. Daher ist D in U enthalten. Nach Hilfssatz 2 ist $M=E\oplus D$, wo E endlich erzeugbar ist. Für ein Element der Form $x+d$, mit $x\in E$, $d\in D$, gilt $h(x+d)=h(x)<\infty$. Es folgt $U\subseteq D$ und damit $U=D$.

Mit Hilfssatz 2 und seiner Folgerung ist nun auch Satz 6 vollständig bewiesen.

Wir zeigen nun noch

Satz 7. *Die kanonische Einbettung $M(R/\mathfrak{P})\to\overline{M}=\hat{R}\otimes_R M(R/\mathfrak{P})$ ist ein Monomorphismus.*

Es gilt nämlich allgemeiner

HILFSSATZ 3. *Es sei R ein nullteilerfreier Elementarteilerring (Def. in [7]), K sein Quotientenkörper. S sei ein Oberring von R, so daß kein Element von R Nullteiler von S ist, und es gelte $S \cap K = R$ (im Quotientenring von S mit den von 0 verschiedenen Elementen von R als Nennermenge). M sei ein R-Modul. Dann ist die kanonische Einbettung von M in $S \otimes_R M$ ein Monomorphismus.*

BEWEIS. Wir denken uns M in der Form $M = N/Q$ dargestellt, wo N einen freien R-Modul mit einer Basis $\{y_\lambda\}$ und Q einen Untermodul von N bezeichnet. Dann ist $S \otimes_R N = N'/Q'$, wo N' den von den y_λ erzeugten freien S-Modul und Q' den von den Elementen von Q in N' erzeugten S-Untermodul von N' bedeutet. Der Kern der kanonischen R-linearen Abbildung von $M = N/Q$ in N'/Q' ist $Q' \cap N/Q$. Wir haben also $Q' \cap N \subseteq Q$ zu zeigen.

Es sei $x = s_1 q_1 + \cdots + s_m q_m$ ($s_i \in S$, $q_i \in Q$) ein Element von $Q' \cap N$. N_1 sei der endlich erzeugte, freie Teilmodul von N, der von den endlich vielen y_λ aufgespannt wird, die man zur Darstellung von x und den q_i mit Koeffizienten aus R benötigt. Ferner sei Q_1 der von den q_i erzeugte R-Modul. Mit N_1' bzw. Q_1' bezeichnen wir die von N_1 bzw. Q_1 erzeugten S-Untermoduln von N'. Dann gilt $x \in Q_1' \cap N_1$. N_1 ist ein endlich erzeugter freier R-Modul, Q_1 ein endlich erzeugter Untermodul, R ein Elementarteilerring. Daher gibt es Basisdarstellungen von N_1 und Q_1 von folgender Form:

$$N_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} R \cdot Z_i, \qquad Q_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} R r_i \cdot Z_i \quad \text{mit} \quad r_i \in R \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Es folgt

$$N_1' = \bigoplus_{i=1}^{n} S \cdot Z_i, \qquad Q_1' = \bigoplus_{i=1}^{n} S r_i \cdot Z_i.$$

Als Element von $Q_1' \cap N_1$ besitzt dann x einerseits eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^{n} a_i Z_i$ mit $a_i \in R$, andererseits eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^{n} b_i r_i Z_i$ mit $b_i \in S$. Durch Koeffizientenvergleich folgt $b_i r_i = a_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Im Quotientenring von S mit den von 0 verschiedenen Elementen von R als Nennermenge erfüllt auch $\frac{a_i}{r_i}$ die Gleichung $\frac{a_i}{r_i} \cdot r_i = a_i$ (wenn $r_i \neq 0$ ist), folglich ist $\left(b_i - \frac{a_i}{r_i}\right) r_i = 0$. Da r_i nicht Nullteiler in S ist, folgt $b_i = \frac{a_i}{r_i} \in K \cap S = R$. Mithin ist $x \in Q_1 \subseteq Q$.

§ 4. Bestimmung des Ranges von F

Die Bestimmung des Ranges von F wird für diskrete Bewertungsringe der Charakteristik 0 und für diskrete Bewertungsringe der Charakteristik $p \neq 0$ getrennt vorgenommen. Wir betrachten zunächst

I. Diskrete Bewertungsringe von Primzahlcharakteristik

Es sei also R von der Charakteristik $p \neq 0$. Wir bezeichnen mit $K^+ = k(K^p)$ das Körperkompositum von k und K^p, mit R^+ den diskreten Bewertungsring $R^+ = R \cap K^+$, sein maximales Ideal mit $\mathfrak{P}^+$, seinen Restklassenkörper mit $\mathfrak{R}^+$. $\hat{R}$ und $\hat{R}^+$ seien die Komplettierungen von R und R^+, und $\hat{\mathsf{P}}^+$ sei die abgeschlossene Hülle von $\mathsf{P}^+ = \mathsf{P}[R^p]$ in $\hat{R}$. Wir zeigen

SATZ 8. *Es ist* $M'(\hat{R}/\mathfrak{P}) = M(\hat{R}/\hat{\mathfrak{P}}^+) \cong M(\hat{R}/\hat{R}^+) \oplus \hat{R} \otimes_{\hat{R}^+} M(\hat{R}^+/\hat{\mathfrak{P}}^+)$. $M(\hat{R}/\hat{R}^+)$ *ist ein freier* $\hat{R}$*-Modul, der isomorph zu* F *ist, und* $\hat{R} \otimes_{\hat{R}^+} M(\hat{R}^+/\hat{\mathfrak{P}}^+)$ *ist ein Torsionsmodul, der isomorph zu* T *ist. Es gilt:*

$$Rang_{\hat{R}} F = \mathfrak{p}\text{-}Grad \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^+} + Rang_R \mathfrak{P}/\mathfrak{P}^+ \cdot R,$$

$$Rang_{\hat{R}} T = \mathfrak{p}\text{-}Grad \frac{\mathfrak{R}^+}{\mathfrak{k}(\mathfrak{R}^{\mathfrak{p}})} + Rang_{R^+} \mathfrak{P}^+/(\mathfrak{P}^+ \cap \mathfrak{P}^+) \cdot R^+.$$

ANMERKUNG. $\mathrm{Rang}_R \mathfrak{P}/\mathfrak{P}^+ \cdot R$ ist 0 oder 1, je nachdem R^+ ein Primelement von R enthält oder nicht. Entsprechend ist $\mathrm{Rang}_{R^+} \mathfrak{P}^+/(\mathfrak{P}^+ \cap \mathfrak{P}^+) \cdot R^+$ gleich 0 oder 1, je nachdem $\mathfrak{P}^+$ ein Primelement von R^+ enthält oder nicht.

BEWEIS von Satz 8. Zunächst ist klar, daß $M'(\hat{R}/\mathfrak{P}) = M'(\hat{R}/\mathfrak{P}[R^{\mathfrak{p}}])$ gilt. Die Elemente von $\hat{\mathfrak{P}}^+$ sind Grenzwerte von Elementen aus $\mathfrak{P}^+ = \mathfrak{P}[R^{\mathfrak{p}}]$. Wegen der Vertauschbarkeit der Derivation $d' : \hat{R} \to M'(\hat{R}/\mathfrak{P})$ mit der Limesbildung folgt $M'(\hat{R}/\mathfrak{P}) = M'(\hat{R}/\hat{\mathfrak{P}}^+)$. Wir zeigen, daß $\hat{R}$ ein endlich erzeugbarer Oberring von $\hat{\mathfrak{P}}^+$ ist. Dann folgt, daß $M(\hat{R}/\hat{\mathfrak{P}}^+)$ endlich erzeugbar ist, folglich $\bigcap_{\nu} \hat{\mathfrak{P}}^{\nu} \cdot M(\hat{R}/\hat{\mathfrak{P}}^+) \doteq 0$ und daher $M'(\hat{R}/\hat{\mathfrak{P}}^+) = M(\hat{R}/\hat{\mathfrak{P}}^+)$.

Der Restklassenkörper von $\hat{\mathfrak{P}}^+$ stimmt mit dem Restklassenkörper $\mathfrak{k}(\mathfrak{R}^{\mathfrak{p}})$ von $\mathfrak{P}^+$ überein; $\hat{R}$ hat den Restklassenkörper $\mathfrak{R}$. Es sei $\mathfrak{R} = \mathfrak{k}(\mathfrak{R}^{\mathfrak{p}})\ [\xi_1, \ldots, \xi_t]$. Wir wählen für die Elemente von $\mathfrak{k}(\mathfrak{R}^{\mathfrak{p}})$ Vertreter in $\hat{\mathfrak{P}}^+$, für die Elemente $\xi_1, \ldots, \xi_t$ Vertreter $x_1, \ldots, x_t$ in $\hat{R}$. Π sei ein Primelement von $\hat{R}$. Dann kann jedes Element von $\hat{R}$ in eine Potenzreihe nach Π entwickelt werden, deren Koeffizienten Polynome in $x_1, \ldots, x_t$ mit Koeffizienten aus dem Vertretersystem von $\mathfrak{k}(\mathfrak{R}^{\mathfrak{p}})$ in $\hat{\mathfrak{P}}^+$ sind. Wegen $\hat{R}^{\mathfrak{p}} \subseteq \hat{\mathfrak{P}}^+$ und wegen der Abgeschlossenheit von $\hat{\mathfrak{P}}^+$ in $\hat{R}$ folgt sofort $\hat{R} = \hat{\mathfrak{P}}^+[x_1, \ldots, x_t, \Pi]$. Damit ist $M'(\hat{R}/\mathfrak{P}) = M(\hat{R}/\hat{\mathfrak{P}}^+)$ bewiesen.

Wir bezeichnen mit S den Bewertungsring $\hat{R} \cap Q(\hat{\mathfrak{P}}^+)$ des Quotientenkörpers $Q(\hat{\mathfrak{P}}^+)$ von $\hat{\mathfrak{P}}^+$. Es gilt $\hat{\mathfrak{P}}^+ \subseteq S$ und $R^+ \subseteq S \subseteq \hat{R}^+$. Daher haben S und $\hat{R}^+$ denselben Restklassenkörper $\mathfrak{R}^+$ und S enthält ein Primelement von $\hat{R}^+$. Da $\hat{R}$ ein endlich erzeugbarer Oberring von $\hat{\mathfrak{P}}^+$ ist und wegen $\hat{R}^{\mathfrak{p}} \subseteq \hat{\mathfrak{P}}^+$ sogar ein endlich erzeugbarer $\hat{\mathfrak{P}}^+$-Modul, ist $\hat{R}$ erst recht ein endlich erzeugbarer S-Modul. Es folgt, daß für die Erweiterung $\hat{R}$ über S die Gradrelation $[\hat{K} : Q(S)] = [\mathfrak{R} : \mathfrak{R}^+] \cdot e_S$ gilt, wo e_S den Verzweigungsexponenten von $\hat{R}$ über S bedeutet (vgl. [12], S. 60). Dann gilt die Gradrelation auch für alle diskreten Bewertungsringe zwischen $\hat{R}$ und S. Es folgt $S = \hat{R}^+$.

Es sei nun $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^+[\eta_1, \ldots, \eta_s]$ mit einer $\mathfrak{p}$-Basis $\eta_1, \ldots, \eta_s$ von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{R}^+$. Dann ist $\hat{R} = \hat{R}^+[y_1, \ldots, y_s, \Pi]$, wo $y_1, \ldots, y_s$ Vertreter für $\eta_1, \ldots, \eta_s$ in $\hat{R}$ sind. Ist $\hat{R}$ über $\hat{R}^+$ verzweigt, dann bilden $y_1, \ldots, y_s, \Pi$ wegen der Gültigkeit der Gradrelation eine $\mathfrak{p}$-Basis von $\hat{R}$ über $\hat{R}^+$, ist $\hat{R}$ über $\hat{R}^+$ unverzweigt, dann darf $\Pi \in \hat{R}^+$ angenommen werden; dann bilden $y_1, \ldots, y_s$ eine $\mathfrak{p}$-Basis

von $\hat{R}$ über $\hat{R}^+$. Somit ist $\hat{R} \cong \hat{R}^+[Z_1, \ldots, Z_\sigma]/\mathfrak{n}$, wo $\mathfrak{n} = (Z_1^p - z_1^p, \ldots, Z_\sigma^p - z_\sigma^p)$ und $\sigma = p\text{-Grad}\, \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^+} + \mathrm{Rang}_R \mathfrak{P}/\mathfrak{P}^+ \cdot R$ ist. Die Differentiation $\hat{d}^+ : \hat{R}^+ \to M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+)$ von $\hat{R}^+$ über $\hat{\mathsf{P}}^+$ kann fortgesetzt werden zur Differentiation $\hat{d} : \hat{R} \to M(\hat{R}/\hat{\mathsf{P}}^+)$ von $\hat{R}$ über $\hat{\mathsf{P}}^+$, da $\hat{d}^+ z_i^p = 0$ ist, wegen $z_i^p \in \hat{\mathsf{P}}^+$ $(i = 1, \ldots, \sigma)$. Es folgt

$$M(\hat{R}/\hat{\mathsf{P}}^+) = \hat{R} \otimes_{\hat{R}^+} M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\sigma} \hat{R}\, \hat{d} z_i \cong \hat{R} \otimes_{\hat{R}^+} M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+) \oplus M(\hat{R}/\hat{R}^+).$$

$M(\hat{R}/\hat{R}^+)$ ist ein freier $\hat{R}$-Modul vom Rang σ. $M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+)$ ist ein Torsionsmodul, da $\hat{R}^+$ und $\hat{\mathsf{P}}^+$ denselben Quotientenkörper besitzen, daher ist auch $\hat{R} \otimes_{\hat{R}^+} M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+)$ ein Torsionsmodul. Es folgt $F \cong M(\hat{R}/\hat{R}^+)$, $T \cong \hat{R} \otimes_{\hat{R}^+} M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+)$ und die Rangaussage für F. Der Rang von $M(\hat{R}^+/\hat{\mathsf{P}}^+)$ ergibt sich aus Satz 1, Folgerung 2 zu

$$\begin{aligned} &p\text{-Grad}\, \frac{\mathfrak{R}^+}{\mathfrak{k}(\mathfrak{R}^p)} + \mathrm{Rang}_{\hat{R}^+} \hat{\mathfrak{P}}^+/(\hat{\mathfrak{P}}^+ \cap \hat{\mathsf{P}}^+) \cdot \hat{R}^+ \\ &\quad = p\text{-Grad}\, \frac{\mathfrak{R}^+}{\mathfrak{k}(\mathfrak{R}^p)} + \mathrm{Rang}_{R^+} \mathfrak{P}^+/(\mathfrak{P}^+ \cap \mathsf{P}^+) \cdot R^+, \end{aligned}$$

wobei $\hat{\mathfrak{P}}^+$ das Primideal von $\hat{R}^+$ ist. T hat denselben Rang, wie sich auch durch Differenzbildung der Ränge von $M(\hat{R}/\hat{\mathsf{P}}^+)$ und F ergibt. Damit sind alle Aussagen von Satz 8 bewiesen.

Wir gehen hier nicht auf die Frage nach der Anzahl der $D_\mu = \hat{K}/\hat{R}$ ein, die in der direkten Summenzerlegung von $\bar{M}$ in Satz 6 auftreten. Im Fall von diskreten Bewertungsringen der Charakteristik 0 wird für eine weite Klasse von Grundringen P gezeigt, daß keine solche Moduln auftreten. Daß sie im allgemeinen jedoch vorkommen können, zeigt das folgende

BEISPIEL. Von F. K. SCHMIDT wurde in einem Beispiel gezeigt (vgl. [11]), daß es diskrete Bewertungsringe R und P der Charakteristik $p \neq 0$ gibt, die folgende Eigenschaften haben: P ist in R enthalten, R ist über P unverzweigt und R und P haben den gleichen Restklassenkörper; der Quotientenkörper K von R ist über dem Quotientenkörper k von P rein inseparabel vom Grad p.

Sind P und R zwei solche diskrete Bewertungsringe, so folgt $M(R/\mathsf{P})/\mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P}) = 0$ nach Satz 1, Folgerung 1. Daher ist $M(R/\mathsf{P}) = \mathfrak{P} \cdot M(R/\mathsf{P})$ ein Divisionsmodul. Es ist $M(R/\mathsf{P}) \neq 0$, denn $M(K/k) = K \otimes_R M(R/\mathsf{P})$ ist von 0 verschieden, da K/k rein inseparabel vom Grad p ist. Es sei $K = k(y)$ mit $y \in R$. Dann gilt $M(R/\mathsf{P}[y]) = M(R/\mathsf{P})/R\,dy \neq 0$, denn sonst wäre $M(R/\mathsf{P}) = R\,dy$ endlich erzeugt, was nicht der Fall sein kann, da $M(R/\mathsf{P})$ ein Divisionsmodul ist. Wegen $K \otimes_R M(R/\mathsf{P}[y]) = M\big(K/k(y)\big) = 0$ ist $M(R/\mathsf{P}[y])$ ein nicht verschwindender Torsionsdivisionsmodul.

II. Diskrete Bewertungsringe der Charakteristik Null

Es gelten weiter die Voraussetzungen, die in §3 angegeben wurden. *Zusätzlich setzen wir voraus, daß R die Charakteristik Null besitzt.* Dieser Fall erfordert wesentlich andere Methoden als der Fall der Primzahlcharakteristik. Wir beweisen daher zunächst in zwei vorbereitenden Abschnitten einige Fortsetzungssätze für Derivationen.

1. Ausdehnung einer Derivation eines diskreten Bewertungsrings der Charakteristik Null auf seine Komplettierung

Das Ziel dieses Abschnittes ist der folgende Satz.

SATZ 9. *Es sei D eine Derivation von R, $\hat{D}$ die universelle Ausdehnung von D auf $\hat{R}$. Dann gilt:*

a) *$\hat{D}$ ist tensorielle Ausdehnung von D auf $\hat{R}$* (s. [2], Def. 5).

b) *$\hat{R}\hat{D}\hat{R}/\hat{R}\hat{D}R$ ist ein torsionsfreier Divisionsmodul.*

Zum Beweis des Satzes benötigen wir einige teils modultheoretische, teils die Struktur der Ringerweiterung betreffende Hilfsbetrachtungen, die wir in sechs Hilfssätzen voranstellen.

HILFSSATZ 4. *Es sei S ein Integritätsbereich mit der Eigenschaft, daß jeder endlich erzeugbare, torsionsfreie S-Modul frei ist. Ferner sei T ein Oberring von S mit der Eigenschaft, daß kein Element von S Nullteiler in T ist, M ein S-Modul, N ein Untermodul. Dann gilt:*

Der kanonische Homomorphismus $T\otimes_S N \to T\otimes_S M$ ist ein Monomorphismus.

Weil T nach Voraussetzung ein torsionsfreier S-Modul ist, ist Hilfssatz 4 eine unmittelbare Folge von:

HILFSSATZ 5. *Es sei S ein Integritätsbereich mit der Eigenschaft, daß jeder endlich erzeugbare, torsionsfreie S-Modul frei ist, L ein torsionsfreier S-Modul, $N \subseteqq M$ zwei beliebige S-Moduln. Dann gilt:*

Der kanonische Homomorphismus $L\otimes_S N \to L\otimes_S M$ ist ein Monomorphismus.

BEWEIS. 1. Fall: L ist endlich erzeugbar. Nach Voraussetzung über S ist L als torsionsfreier Modul dann frei und die Behauptung des Satzes ist trivial.

2. Fall: L ist nicht endlich erzeugbar. Es ist zu zeigen: Gilt für Elemente $l_i \in L$ und $n_i \in N$ $\sum_i l_i \otimes n_i = 0$ in $L\otimes_S M$, so gilt diese Relation schon in $L\otimes_S N$. Es sei also $\sum_i l_i \otimes n_i = 0$ in $L\otimes_S M$. Dann gibt es nach [3], §1, Prop. 8 einen endlich erzeugbaren Untermodul $L' \subseteqq L$ mit $l_i \in L'$ und $\sum_i l_i \otimes n_i = 0$ bereits in $L'\otimes_S M$. Da L' endlich erzeugbar ist, gilt nach Fall 1 $\sum_i l_i \otimes n_i = 0$ schon in $L'\otimes_S N$, also erst recht in $L\otimes_S N$.

ANMERKUNG. *Hilfssatz 4 garantiert die Transitivität der tensoriellen Ausdehnung von Derivationen bei diskreten Bewertungsringen* (s. [2], §1).

Wir werden im folgenden von dieser Transitivität Gebrauch machen, auch wenn es nicht ausdrücklich erwähnt wird.

HILFSSATZ 6. *Es sei S ein kommutativer unitärer Ring, A eine multiplikativ abgeschlossene Menge von Elementen von S, $1 \in A$, $0 \notin A$, S_A der Quotientenring von S bezüglich A, M ein S-Modul, N ein Untermodul. Dann gilt:*

Der kanonische Homomorphismus $S_A \otimes_S N \to S_A \otimes_S M$ ist ein Monomorphismus.

BEWEIS. Weil S_A Quotientenring von S ist, läßt sich jedes Element $y \in S_A \otimes N$ in der Form schreiben $y = \frac{1}{a} \cdot (1 \otimes x)$, $a \in A$, $x \in N$. Liegt nun y im Kern des kanonischen Homomorphismus $S_A \otimes N \to S_A \otimes M$, so ist $\frac{1}{a} \cdot (1 \otimes x) = 0$ in $S_A \otimes M$, also $1 \otimes x = 0$ in $S_A \otimes M$. Das bedeutet, daß es ein Element $b \in A$ gibt mit $b \cdot x = 0$ in M. Daraus folgt wiederum $1 \otimes x = 0$ in $S_A \otimes N$, also auch $y = \frac{1}{a} \cdot (1 \otimes x) = 0$ in $S_A \otimes N$.

HILFSSATZ 7. *Es sei I eine vollständige geordnete Indexmenge mit erstem Element 0, $\{S_i\}_{i \in I}$ eine Familie unitärer Ringe mit derselben Eins, für die gilt $S_i \subseteqq S_k$, falls $i \leqq k$, $S = \bigcup_{i \in I} S_i$. D_0 sei eine Derivation von S_0, D_i die universelle Ausdehnung von D_0 auf S_i, D die universelle Ausdehnung von D_0 auf S. Dann gilt:*

a) *Ist D_i tensorielle Ausdehnung von D_0 auf S_i für alle $i \in I$, so ist D tensorielle Ausdehnung von D_0 auf S.*

b) *Ist $S_i D_i S_i / S_i D_i S_0$ torsionsfrei für alle $i \in I$, so ist auch SDS/SDS_0 torsionsfrei.*

c) *Ist $S_i D_i S_i / S_i D_i S_0$ v-dividierbar bezüglich eines Elementes $v \in S_0$, für alle $i \in I$, so ist auch SDS/SDS_0 v-dividierbar. Dabei nennen wir einen Modul M v-dividierbar, wenn gilt $M = v \cdot M$.*

BEWEIS. Es sei $M_i = S_i D_i S_i$ für alle $i \in I$. Wegen der Transitivität der universellen Ausdehnung ([2], §1) ist D_k für $i \leqq k$ universelle Ausdehnung von D_i auf S_k. Die zugehörige S_i-lineare Abbildung von M_i in M_k bezeichnen wir mit φ_{ik}. Es gilt dann: $D_k = \varphi_{ik} \circ D_i$ auf S_i und daher $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$ auf M_i für alle $i \leqq j \leqq k$.

Zu der Familie der M_i und φ_{ik} gibt es einen S-Modul M, den direkten Limes, mit folgenden charakteristischen Eigenschaften:

1. Für jedes $j \in I$ gibt es eine S_j-lineare Abbildung χ_j von M_j in M mit $\chi_i = \chi_k \circ \varphi_{ik}$ für alle $i \leqq k$.

2. $M = \bigcup_{i \in I} \chi_i(M_i)$.

3. Ist M' ein S-Modul mit einem System von S_i-linearen Abbildungen χ_i' von M_i in M' mit $\chi_i' = \chi_k' \circ \varphi_{ik}$ für alle $i \leqq k$, so gibt es eine S-lineare Abbildung Λ von M in M' mit $\chi_i' = \Lambda \circ \chi_i$ für alle $i \in I$.

M ist durch die Eigenschaften 1. bis 3. bis auf S-lineare Isomorphie eindeutig bestimmt. Ferner gilt: $\mathrm{Kern}(\chi_i) = \bigcup_{i \leqq k} \mathrm{Kern}(\varphi_{ik})$.

Wir definieren eine Abbildung D von S in M folgendermaßen: Jedes $x \in S$ liegt in einem S_i. Wir setzen $Dx = \chi_i \circ D_i x$. Gilt auch $x \in S_k$ mit $i < k$, so gilt: $\chi_k D_k x = \chi_k \circ \varphi_{ik} \circ D_i x = \chi_i \circ D_i x$. Also hängt die Definition nicht von dem gewählten i ab.

D ist eine Derivation von S und vermöge $D = \chi_0 \circ D_0$ auf S_0 eine Ausdehnung von D_0 auf S. Ferner ist $SDS = M$. Wir zeigen, daß D universelle Ausdehnung von D_0 auf S ist.

Es sei D' eine beliebige Ausdehnung von D_0 auf S, $M'=SD'S$. Da die Einschränkung von D' auf S_i eine Ausdehnung von D_0 auf S_i ist, gibt es für jedes $i\in I$ eine S_i-lineare Abbildung χ_i' von M_i in M' mit $D'=\chi_i'\circ D_i$ auf S_i; denn D_i ist die universelle Ausdehnung von D_0 auf S_i. Zusammen mit $D_k=\varphi_{ik}\circ D_i$ auf S_i für $i\leqq k$ erhält man $\chi_i'=\chi_k'\circ\varphi_{ik}$. Also gibt es nach Eigenschaft 3. von M eine S-lineare Abbildung Λ von M in M' mit $\chi_i'=\Lambda\circ\chi_i$ für alle $i\in I$. Das ergibt $D'=\Lambda\circ D$, d.h. D ist universelle Ausdehnung von D_0 auf S.

Zu a): Ist D_i tensorielle Ausdehnung von D_0, so bedeutet das, daß die S_0-lineare Abbildung φ_{0i} universelle S_i-Einbettung des S_0-Moduls M_0 ist. Es sei ψ: $M_0\to M'$ eine beliebige S_0-lineare Abbildung von M_0 in einen S-Modul M'. ψ ist dann auch für alle $i\in I$ eine S_i-Einbettung von M_0, weil M' auch ein S_i-Modul ist. Also gibt es eine S_i-lineare Abbildung ψ_i von $S_i\cdot\varphi_{0i}(M_0)$ in M' mit $\psi=\psi_i\circ\varphi_{0i}$. $\tilde{\chi}_i$ sei die Einschränkung von χ_i auf $S_i\cdot\varphi_{0i}(M_0)$. Wir zeigen: $\psi_i\big(\mathrm{Kern}\,(\tilde{\chi}_i)\big)=0$:

Es sei $y\in\mathrm{Kern}\,(\tilde{\chi}_i)$. Wegen $\mathrm{Kern}\,(\chi_i)=\bigcup_{i\leqq k}\mathrm{Kern}\,(\varphi_{ik})$ gilt dann für ein passendes $k\geqq i$: $\varphi_{ik}(y)=0$. Wegen $\psi=\psi_i\circ\varphi_{0i}=\psi_k\circ\varphi_{0k}$ und $\varphi_{0k}=\varphi_{ik}\circ\varphi_{0i}$ folgt, weil das Bild von M_0 bei φ_{0i} den Modul $S_i\cdot\varphi_{0i}(M_0)$ erzeugt: $\psi_i=\psi_k\circ\varphi_{ik}$ auf $S_i\cdot\varphi_{0i}(M_0)$, also $\psi_i(y)=\psi_k\big(\varphi_{ik}(y)\big)=0$.

Folglich induziert ψ_i in natürlicher Weise eine S_i-lineare Abbildung ψ_i' von $S_i\cdot\chi_i\circ\varphi_{0i}(M_0)=S_i\cdot\chi_0(M_0)$ in M' mit $\psi=\psi_i'\circ\chi_0$. Für $i<k$ ist $S_i\cdot\chi_0(M_0)\subseteqq S_k\cdot\chi_0(M_0)$ und ψ_k' Fortsetzung von ψ_i'. Daher induzieren die Abbildungen ψ_i' in natürlicher Weise eine Abbildung Ψ von $\bigcup_{i\in I}S_i\cdot\chi_0(M_0)=S\cdot\chi_0(M_0)$ in M' mit $\psi=\Psi\circ\chi_0$. Ψ ist S-linear.

Damit ist gezeigt, daß χ_0 universelle S-Einbettung von M_0 ist, also $S\cdot\chi_0(M_0)=S\otimes_{S_0}M_0$, q.e.d.

Zu b): Es sei $S_iD_iS_i/S_iD_iS_0$ für alle $i\in I$ torsionsfrei, $s\in S$, $s\neq 0$, $x\in M=SDS$ und $s\cdot x\in S\cdot\chi_0(M_0)=SDS_0$. Wir zeigen, daß daraus folgt: $x\in S\cdot\chi_0(M_0)$.
Beweis. Für hinreichend großes i hat man: $s\in S_i$, $x=\chi_i(z)$, $z\in M_i$ und $\chi_i(s\cdot z)=\sum_t s_t\cdot\chi_0(y_t)$ mit $s_t\in S_i$, $y_t\in M_0$. Das bedeutet: $\chi_i\big(s\cdot z-\sum_t s_t\cdot\varphi_{0i}(y_t)\big)=0$. Wegen $\mathrm{Kern}\,(\chi_i)=\bigcup_{i\leqq k}\mathrm{Kern}\,(\varphi_{ik})$ folgt daraus: $\varphi_{ik}(s\cdot z)=\sum_t s_t\cdot\varphi_{ik}\circ\varphi_{0i}(y_t)$ für ein $k\geqq i$, also $s\cdot\varphi_{ik}(z)=\sum_t s_t\cdot\varphi_{0k}(y_t)\in S_k\cdot\varphi_{0k}(M_0)=S_kD_kS_0$. Wegen der vorausgesetzten Torsionsfreiheit von $M_k/S_kD_kS_0$ folgt daraus: $\varphi_{ik}(z)\in S_k\cdot\varphi_{0k}(M_0)$, also

$$x=\chi_i(z)=\chi_k\circ\varphi_{ik}(z)\in S_k\cdot\chi_k\circ\varphi_{0k}(M_0)\subseteqq S\cdot\chi_0(M_0),\quad\text{q.e.d.}$$

Zu c): Ist $x\in M$, so ist $x=\chi_i(z)$ mit $z\in M_i$ für hinreichend großes $i\in I$. $M_i/S_i\cdot\varphi_{0i}(M_0)$ ist nach Voraussetzung v-dividierbar. Also gibt es ein $y\in M_i$ mit $z\equiv v\cdot y \bmod S_i\cdot\varphi_{0i}(M_0)$. Die Anwendung von χ_i liefert:

$$x\equiv v\cdot\chi_i(y)\bmod S\cdot\chi_0(M_0),\quad\text{q.e.d.}$$

Hilfssatz 8. *Es sei A ein Körper, $B=A(x)$ ein Oberkörper, x transzendent über A, T ein diskreter Bewertungsring mit dem Quotientenkörper B und dem*

Primideal $\mathfrak{P}$, $S=T\cap A$, T *unverzweigt über* S *und* $T/\mathfrak{P}=S+\mathfrak{P}/\mathfrak{P}$. *Ferner sei* Δ *eine Derivation von* S, D *die universelle Ausdehnung von* Δ *auf* T. *Dann gilt:* D *ist tensorielle Ausdehnung von* Δ *auf* T *und* TDT/TDS *ist ein torsionsfreier Divisionsmodul.*

BEWEIS. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß x in T liegt. $u\in S$ sei ein Primelement von T. Wir definieren rekursiv eine Folge von Elementen $x_i\in T$ wie folgt: $x_0=x$; ist x_{n-1} schon definiert, so gibt es wegen $T/\mathfrak{P}=S+\mathfrak{P}/\mathfrak{P}$ ein Element $a_{n-1}\in S$ mit $x_{n-1}-a_{n-1}\in\mathfrak{P}$. Wir definieren dann x_n durch $x_{n-1}-a_{n-1}=u\cdot x_n$. Die Folge der x_i genügt den Voraussetzungen des Satzes 9 in [1], angewandt auf den Fall eines einstufigen diskreten Bewertungsringes. Setzt man also $T_i=S[x_i]$, so bilden die T_i eine aufsteigende Folge von Ringen, und es gilt: $T=\left(\bigcup_{i=0}^{\infty}T_i\right)_{\mathfrak{P}}=\left\{\frac{y}{z};\ y,z\in\bigcup_{i=0}^{\infty}T_i, z\notin\mathfrak{P}\right\}$. Ferner gilt offenbar: $B=A(x_i)$ für alle i, also sind alle x_i transzendent über A. D_i bezeichne die universelle Ausdehnung von Δ auf T_i. Nach [2], Satz 4 gilt: $T_iD_iT_i=T_i\otimes_S S\Delta S\oplus T_i\cdot D_ix_i$, wobei D_ix_i als Unbestimmte zu behandeln ist. Also ist D_i tensorielle Ausdehnung von Δ und $T_iD_iT_i/T_iD_iS$ ist torsionsfrei. Nach Hilfssatz 7 übertragen sich diese beiden Eigenschaften auf die universelle Ausdehnung D' von Δ auf $T'=\bigcup_{i=0}^{\infty}T_i$. T ist Quotientenring von T'. Nach [2], Satz 6 gilt: $TDT=T\otimes_{T'}T'D'T'$. Nach Hilfssatz 6 enthält dann TDT im Sinne kanonischer Monomorphie den Modul $T\otimes_{T'}T'D'S$, und, weil D' tensorielle Ausdehnung von Δ ist, gilt $T'D'S=T'\otimes_S S\Delta S$. Beachtet man noch die kanonische Isomorphie $T\otimes_{T'}T'\otimes_S S\Delta S=T\otimes_S S\Delta S$, so sieht man, daß D tensorielle Ausdehnung von Δ auf T ist. Ferner ist $TDT/TDS=T\otimes_{T'}(T'D'T'/T'D'S)$ torsionsfrei, weil $T'D'T'/T'D'S$ torsionsfrei ist und T Quotientenring von T' ist.

Ist schließlich $y\in T$, so gibt es wegen $T/\mathfrak{P}=S+\mathfrak{P}/\mathfrak{P}$ ein $z\in S$ und ein $v\in T$ mit $y=z+u\cdot v$. Es folgt wegen $u\in S$: $Dy\equiv u\cdot Dv \bmod TDS$, also ist TDT/TDS ein Divisionsmodul.

HILFSSATZ 9. *Es sei* A *ein Körper,* B *eine endliche, separabel algebraische Körpererweiterung von* A, T *ein diskreter Bewertungsring mit dem Quotientenkörper* B *und dem Primideal* $\mathfrak{P}$, $S=T\cap A$, T *unverzweigt über* S *und* $T/\mathfrak{P}=S+\mathfrak{P}/\mathfrak{P}$. *Ferner sei* Δ *eine Derivation von* S, D *die universelle Ausdehnung von* Δ *auf* T. *Dann gilt:* D *ist tensorielle Ausdehnung von* Δ *auf* T *und* $TDT/TDS=(0)$.

BEWEIS. Weil B eine endliche, separabel algebraische Körpererweiterung von A ist, gibt es ein Element $x\in T$ mit $B=A(x)$. Wie beim Beweis von Hilfssatz 8 definieren wir eine Folge von Elementen $x_i\in T$ mit $x_0=x$, $x_{n-1}-a_{n-1}=u\cdot x_n$, wobei u ein Primelement von S ist und die a_i in S liegen. Man hat dann wieder nach [1], Satz 9: $T=\left(\bigcup_{i=0}^{\infty}T_i\right)_{\mathfrak{P}}$ mit $T_i=S[x_i]$. Es sei $g_i(X)\in S[X]$ ein Primpolynom von $S[X]$ mit $g_i(x_i)=0$. Man hat dann nach dem Gaußschen Satz: $T_i=S[x_i]\cong S[X]/(g_i(X))$. Außerdem gilt $g_i'(x_i)\neq 0$ wegen der Separabilität von x_i über A. Aus [2], Satz 7 folgt daher, daß

die universelle Ausdehnung von Δ auf T_i tensoriell ist. Nach Hilfssatz 7 und [2], Satz 6 ist dann auch D tensorielle Ausdehnung von Δ.

Schließlich hat man nach [2], Anmerkung 10, daß $TDT/TDS = M(T/S)$ ist. Andererseits ist aber wegen der Unverzweigtheit von T über S zusammen mit $T/\mathfrak{P} = S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$ nach Satz 1 $M(T/S)/\mathfrak{P} \cdot M(T/S) = (0)$, also $M(T/S) = (0)$, weil $M(T/S)$ endlich erzeugbar ist, q.e.d.

Beweis von Satz 9. Wir betrachten die diskreten Bewertungsringe R' mit $R \subseteqq R' \subseteqq \hat{R}$ und der Eigenschaft, daß die universelle Ausdehnung D' von D auf R' tensoriell und $R'D'R'/R'D'R$ torsionsfrei ist. Nach Hilfssatz 7 übertragen sich diese Eigenschaften dann auf die Vereinigung einer aufsteigenden Folge solcher Ringe (die wieder ein diskreter Bewertungsring ist). Also gibt es nach dem Lemma von Zorn einen im Sinne der durch die Relation $\subseteqq$ gegebenen Anordnung maximalen diskreten Bewertungsring $\bar{R}$ mit $R \subseteqq \bar{R} \subseteqq \hat{R}$, so daß für die universelle Ausdehnung $\bar{D}$ von D auf $\bar{R}$ die angegebenen Eigenschaften gelten. Es ist $\bar{R} = \hat{R}$. Wäre nämlich $\bar{R} \neq \hat{R}$, so gäbe es ein Element $x \in \hat{R}$, $x \notin \bar{R}$. Es sei $\bar{K}$ der Quotientenkörper von $\bar{R}$, $R'' = \hat{R} \cap \bar{K}(x)$. x ist entweder transzendent oder, weil R die Charakteristik Null hat, separabel algebraisch über $\bar{K}$. Außerdem ist R'' über $\bar{R}$ unverzweigt und beide Ringe haben denselben Restklassenkörper wegen $R \subseteqq \bar{R} \subseteqq R'' \subseteqq \hat{R}$. Nach Hilfssatz 8 bzw. Hilfssatz 9 ist daher die universelle Ausdehnung D'' von $\bar{D}$ auf R'' tensoriell und es gilt: $R''D''R''/R''D''\bar{R}$ ist torsionsfrei. Wegen der Transitivität der universellen Ausdehnung ist D'' auch universelle Ausdehnung von D auf R'' und wegen Hilfssatz 4 ist D'' sogar tensorielle Ausdehnung von D auf R'' (s. [2], §1). Hat man nun ein Element $y \in R''D''R''$ und ein Element $r \in R''$, $r \neq 0$ mit $r \cdot y \in R''D''R$, so folgt aus der Torsionsfreiheit von $R''D''R''/R''D''\bar{R}$, daß $y \in R''D''\bar{R}$ gilt. y ist also Torsionselement von $R''D''\bar{R}/R''D''R = R'' \otimes_{\bar{R}} \bar{R}\bar{D}\bar{R}/R'' \otimes \bar{R}\bar{D}R = R'' \otimes_{\bar{R}} (\bar{R}\bar{D}\bar{R}/\bar{R}\bar{D}R)$. Nach Voraussetzung über $\bar{R}$ ist $\bar{R}\bar{D}\bar{R}/\bar{R}\bar{D}R$ torsionsfrei, also ist nach [1], Satz 5 auch $R'' \otimes_{\bar{R}} (\bar{R}\bar{D}\bar{R}/\bar{R}\bar{D}R)$ torsionsfrei, also gilt $y \in R''D''R$. Damit ist auch die Torsionsfreiheit von $R''D''R''/R''D''R$ gezeigt. R'' hat also die Eigenschaften, denen gegenüber $\bar{R}$ maximal ist, was den gesuchten Widerspruch liefert.

Daß schließlich $\hat{R}\hat{D}\hat{R}/\hat{R}\hat{D}R$ ein Divisionsmodul ist, ergibt sich wie beim Beweis von Hilfssatz 8 aus der Tatsache, daß $\hat{R}$ über R unverzweigt ist und beide Ringe denselben Restklassenkörper haben.

Damit ist Satz 9 in allen Teilen bewiesen.

2. *Ausdehnung einer Derivation von* P *auf* $\hat{R}$

Voraussetzungen. *Zusätzlich zu den in* §3 *angegebenen Voraussetzungen und Bezeichnungen sei im folgenden:*

R ein diskreter Bewertungsring der Charakteristik Null, $\mathsf{P} = R \cap k$ (also ebenfalls ein diskreter Bewertungsring oder $\mathsf{P} = k$), *δ eine Derivation von* P, *$\hat{D}$ die*

universelle Ausdehnung von δ auf $\hat{R}$, $\hat{d}$ die Differentiation von $\hat{R}$ über P, $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{k}$ endlich inseparabel.

Dabei definieren wir:

DEFINITION. *Sind $A \subseteqq B$ zwei Körper, so heißt B „endlich inseparabel" über A, wenn es einen Zwischenkörper C zwischen A und B gibt, der über A eine endliche separierende Transzendenzbasis besitzt und über dem B eine endliche, rein inseparable algebraische Erweiterung ist.*

(Daraus folgt insbesondere, daß B endliche Dimension über A besitzt. Ferner folgt, wenn B Primzahlcharakteristik p hat, daß B über A endlichen p-Grad besitzt, jedoch gilt im allgemeinen nicht die Umkehrung).

Wir zeigen unter den angegebenen Voraussetzungen, daß $\hat{D}$ tensorielle Ausdehnung von δ ist. Dabei verwenden wir eine Konstruktion, in deren Verlauf wir für die Überlegungen des nächsten Kapitels im Spezialfall, daß δ die triviale Derivation von P ist, wichtige Untermoduln von $\hat{R}\hat{d}\hat{R}$ gewinnen.

Es seien $t_1, \ldots, t_m \in R$ Repräsentanten einer separierenden Transzendenzbasis des nach Voraussetzung existierenden über $\mathfrak{k}$ separablen Zwischenkörpers $\mathfrak{S}$ zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{k}$, über dem $\mathfrak{R}$ eine endliche, rein inseparable Erweiterung ist.

Weil die Restklassen mod $\mathfrak{P}$ der $t_1, \ldots, t_m$ algebraisch unabhängig über $\mathsf{P}+\mathfrak{P}/\mathfrak{P}=\mathfrak{k}$ sind und P ein Bewertungsring oder ein Körper ist, sind die $t_1, \ldots, t_m$ algebraisch unabhängig über P. Ferner gilt wegen der algebraischen Unabhängigkeit der $t_1, \ldots, t_m$ mod $\mathfrak{P}$: $\mathfrak{P} \cap \mathsf{P}[t_1, \ldots, t_m] = (\mathfrak{P} \cap \mathsf{P}) \cdot \mathsf{P}[t_1, \ldots, t_m]$.

1. Fall: $\mathfrak{P} \cap \mathsf{P} \neq (0)$, also P ein diskreter Bewertungsring. In diesem Falle ist $\Sigma = \left\{\frac{a}{b};\ a, b \in \mathsf{P}[t_1, \ldots, t_m],\ b \notin \mathfrak{P}\right\}$ ein diskreter Bewertungsring, der in R liegt, also $\Sigma = R \cap Q(\Sigma)$.

2. Fall: $\mathfrak{P} \cap \mathsf{P} = (0)$. In diesem Falle ist k trivial bewertet, also $\mathsf{P} = k$ ein Körper und folglich der ganze Körper $\mathsf{P}(t_1, \ldots, t_m)$ in R enthalten und daher trivial bewertet. Es sei u ein Primelement von R. Weil $\mathsf{P}(t_1, \ldots, t_m)$ trivial bewertet ist, u dagegen einen von Null verschiedenen Wert besitzt, ist u transzendent über diesem Körper und folglich

$$\Sigma = \mathsf{P}(t_1, \ldots, t_m)[u]_{(u)} = \left\{\frac{a}{b};\ a, b \in \mathsf{P}(t_1, \ldots, t_m)[u],\ b \notin u \cdot \mathsf{P}(t_1, \ldots, t_m)[u]\right\}$$

ein diskreter Bewertungsring, der in R enthalten ist, also $\Sigma = R \cap Q(\Sigma)$. Setzen wir $u = t_{m+1}$, so kann man auch in diesem Falle schreiben

$$\Sigma = \left\{\frac{a}{b};\ a, b \in \mathsf{P}[t_1, \ldots, t_{m+1}],\ b \notin \mathfrak{P}\right\}$$

analog zu Fall 1.

In beiden Fällen ist der Restklassenkörper $\Sigma + \mathfrak{P}/\mathfrak{P} = \mathfrak{k}(\dot{t}_1, \ldots, \dot{t}_m)$, wenn $\dot{t}_i$ die Restklasse von t_i mod $\mathfrak{P}$ bezeichnet, und daher $\mathfrak{S}$ separabel algebraisch über $\Sigma + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$.

Δ bezeichne die universelle Ausdehnung von δ auf Σ. Nach [2], Satz 4 und 6 gilt $\Sigma\Delta\Sigma = \Sigma \otimes_{\mathsf{P}} \mathsf{P}\delta\mathsf{P} \oplus \Sigma \cdot \Delta t_1 \oplus \cdots \oplus \Sigma \cdot \Delta t_r$, wobei die Δt_i als Unbestimmte zu behandeln sind, mit $r = \begin{cases} \dim \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{k}}, & \text{falls } \mathsf{P} \text{ ein diskreter Bewertungsring ist,} \\ \dim \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{k}} + 1, & \text{falls } \mathsf{P} \text{ ein Körper ist.} \end{cases}$

Man hat daher: Δ ist tensorielle Ausdehnung von δ auf Σ, und $\Sigma\Delta\Sigma/\Sigma\Delta\mathsf{P}$ ist ein freier Σ-Modul vom Rang r.

Wir betrachten nun die diskreten Bewertungsringe S' mit folgenden Eigenschaften: 1. $\Sigma \subseteq S' \subseteq \hat{R}$, 2. S' ist komplett, 3. $S' + \mathfrak{P}/\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{S}$, 4. S' ist unverzweigt über Σ, 5. die universelle Ausdehnung D' von Δ auf S' ist tensorielle Ausdehnung, 6. $S'D'S'/S'D'\Sigma$ ist torsionsfrei, 7. $S'D'S'/S'D'\Sigma$ ist ein Divisionsmodul.

Nach Hilfssatz 4, Hilfssatz 7 und Satz 9 übertragen sich diese sieben Eigenschaften sofort auf die Komplettierung einer aufsteigenden Folge solcher Ringe. Nach dem Lemma von Zorn gibt es also einen bezüglich der durch die Relation $\subseteq$ gegebenen Anordnung maximalen diskreten Bewertungsring S mit den Eigenschaften 1. bis 7. Wir zeigen: $S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P} = \mathfrak{S}$.

Beweis. Wäre $S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P} \neq \mathfrak{S}$, so gäbe es ein Element $\dot{x} \in \mathfrak{S}$, $\dot{x} \notin S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$. Weil $\dot{x}$ als Element von $\mathfrak{S}$ separabel algebraisch über $S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$ ist, genügt es über diesem Körper einer irreduziblen normierten Gleichung ohne mehrfache Nullstellen. Da S komplett ist, gibt es nach dem Lemma von Hensel in $\hat{R}$ ein in der Restklasse $\dot{x}$ liegendes Element x, das über S einer normierten Gleichung desselben Grades genügt, wie $\dot{x}$ über $S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$. Sei $S'' = \hat{R} \cap Q(S)(x)$. Aus der Gradrelation folgt: S'' ist unverzweigt über S und hat den Restklassenkörper $(S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P})(\dot{x})$. Ferner ist S'' komplett, weil S komplett und $Q(S'')$ endlich algebraisch über $Q(S)$ ist. Ein Repräsentantensystem für eine Basis des Restklassenkörpers von S'' über dem von S bildet daher eine Basis für S'' über S. Man hat also $S'' = S[x]$. $g(x)$ sei das normierte Minimalpolynom für x über S. Aus Gradgründen ist dann das beim Übergang zu Restklassen mod $\mathfrak{P}$ entstehende Polynom das Minimalpolynom für $\dot{x}$ über $S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$. Weil $\dot{x}$ über diesem Körper separabel algebraisch ist, hat man daher $g'(x) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{P}$, d.h. $g'(x)$ ist Einheit in S''.

D'' sei die universelle Ausdehnung von D auf S'', D die universelle Ausdehnung von Δ auf S. Nach [2], Satz 7 ist D'' wegen $g'(x) \neq 0$ tensorielle Ausdehnung von D. Also ist D'' wegen Hilfssatz 4 auch tensorielle Ausdehnung von Δ. Ferner folgt aus $g(x) = 0$: $g'(x) \cdot D''x \equiv 0 \bmod S''D''S$, also, weil $g'(x)$ Einheit in S'' ist, $D''x \in S''D''S$ und damit $S''D''S'' = S''D''S = S'' \otimes_S SDS$. Es ist daher $S''D''S''/S''D''\Sigma = S'' \otimes_S (SDS/SD\Sigma)$ torsionsfreier Divisionsmodul, weil das für $SDS/SD\Sigma$ gilt (s. a. [1], Satz 5). Also erfüllt S'' die Eigenschaften 1. bis 7. im Widerspruch zur Maximalität von S bezüglich dieser Eigenschaften. Daher gilt $S + \mathfrak{P}/\mathfrak{P} = \mathfrak{S}$.

Wir betrachten nun die Struktur von $\hat{R}$ über S. Der Restklassenkörper $\mathfrak{R}$ von $\hat{R}$ ist nach Voraussetzung endlich algebraisch (und rein inseparabel) über

dem Restklassenkörper $\mathfrak{S}$ von S. Ist u ein Primelement von R, π ein Primelement von Σ und e der Verzweigungsexponent von R über Σ, so bilden die Werte der Elemente $\{\pi^i \cdot u^j;\ i=0, 1, 2, \ldots;\ 0 \leqq j \leqq e-1\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem für die Werte der Elemente von $\hat{R}$. Ist schließlich noch $1=y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein Repräsentantensystem einer Basis von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{S}$, so sieht man durch Reihenentwicklung der Elemente von $\hat{R}$ nach $\pi^i \cdot u^j$ mit Koeffizienten der Form $\sum_{l=1}^{n} s_l \cdot y_l$, $s_i \in S$, und passende Umordnung, daß die Elemente $\{y_l \cdot u^j;\ 1 \leqq l \leqq n,\ 0 \leqq j \leqq e-1\}$ eine Basis von $\hat{R}$ über S bilden. Also ist der Quotientenkörper von $\hat{R}$ eine endliche, separabel algebraische Erweiterung des Quotientenkörpers von S. (Falls P ein Körper ist, hat man $\pi=u$ und $\mathfrak{R}=\mathfrak{S}$, also $\hat{R}=S$.)

$\hat{D}$ bezeichne die universelle Ausdehnung von D auf R. Nach [2], Satz 11 gilt: $\hat{D}$ ist tensorielle Ausdehnung von D auf $\hat{R}$, und $\hat{R}\hat{D}\hat{R}/\hat{R}\hat{D}S$ ist endlich erzeugbar. Wegen Hilfssatz 4 ist $\hat{D}$ dann auch tensorielle Ausdehnung von Δ und δ. Ferner ist $\hat{D}$ wegen der Transitivität der universellen Ausdehnung auch universelle Ausdehnung von Δ und δ auf $\hat{R}$.

Schließlich genügt jedes Element $x \in \hat{R}$ einem Minimalpolynom $f(X)$ über S mit $f'(x) \neq 0$ wegen der Separabilität der Erweiterung. Es folgt:

$$f'(x) \cdot D\,x \equiv 0 \bmod \hat{R}\hat{D}S, \qquad \text{d.h. } \hat{R}\hat{D}\hat{R}/\hat{R}\hat{D}S \text{ ist ein Torsionsmodul.}$$

SATZ 10. *Mit den oben erklärten Bezeichnungen und Voraussetzungen gilt: Jede Derivation von* P *besitzt eine tensorielle Ausdehnung auf* R.

BEWEIS. Nach dem soeben gezeigten besitzt jede Derivation von P eine tensorielle Ausdehnung auf $\hat{R}$. Aus Hilfssatz 4 und [2], Satz 2 folgt, daß die Einschränkung dieser Ausdehnung auf R die gesuchte tensorielle Ausdehnung der Derivation von P auf R ist.

ANMERKUNG. *Man überlegt leicht, daß Satz* 10 *auch ohne die Voraussetzung, daß* $\mathfrak{R}$ *endlich inseparabel über* $\mathfrak{k}$ *ist, richtig ist.*

Für den Spezialfall, daß δ die triviale Derivation von P und daher dann $\hat{D}=\hat{d}$ ist, erhält man aus der obigen Konstruktion:

SATZ 11. *Mit den oben erklärten Bezeichnungen und Voraussetzungen gilt: Es gibt in* $M(\hat{R}/\mathsf{P})$ *Untermoduln* $H \cong \hat{R} \otimes_{\Sigma} M(\Sigma/\mathsf{P})$ *und* $N \cong \hat{R} \otimes_{S} M(S/\mathsf{P})$ *mit folgenden Eigenschaften:*

$M(\hat{R}/\mathsf{P}) \supseteq N \supseteq H$,

H ist ein freier $\hat{R}$*-Modul vom Rang* $\begin{cases} \dim \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{k}} & \text{falls } \mathsf{P} \neq k \\ \dim \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{k}} + 1 & \text{falls } \mathsf{P} = k, \end{cases}$

$N/H \cong \hat{R} \otimes_S M(S/\Sigma)$ *ist ein torsionsfreier Divisionsmodul,*

$M(\hat{R}/\mathsf{P})/N \cong M(\hat{R}/S)$ *ist ein endlich erzeugbarer Torsionsmodul* $(=(0)$ *für* $\mathsf{P} \neq k)$.

3. *Folgerungen für die Struktur von* $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P})$

SATZ 12. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen in* §3 *sei:*

Die Charakteristik von R *gleich Null,*

$\tilde{\mathfrak{P}} = R \cap k$, $\tilde{\mathfrak{k}}$ *der Restklassenkörper von* $\tilde{\mathfrak{P}}$,

E, F, T, D *die in Satz* 6 *eingeführten Moduln.*

Im Falle $p > 0$ *setzen wir noch voraus, daß* $\mathfrak{K}$ *über* $\tilde{\mathfrak{k}}$ *endlich inseparabel im Sinne der zu Anfang von Abschnitt* 2 *gegebenen Definition ist.*

Dann gilt:

a) $\operatorname{Rang} F = \begin{cases} \dim \dfrac{\mathfrak{K}}{\tilde{\mathfrak{k}}}, & \text{falls } \tilde{\mathfrak{P}} \neq k \\ \dim \dfrac{\mathfrak{K}}{\tilde{\mathfrak{k}}} + 1, & \text{falls } \tilde{\mathfrak{P}} = k. \end{cases}$

b) $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P}) \subsetneqq M(R/\mathfrak{P})$ *in natürlicher Weise, und* $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P})$ *enthält die Torsion von* $M(\hat{R}/\mathfrak{P})$.

c) *Im Falle* $\mathfrak{P} = \tilde{\mathfrak{P}}$ *ist die Torsion von* $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P})$ *endlich erzeugbar und isomorph zur Torsion von* $M'(\hat{R}/\mathfrak{P})$.

Zur Vorbereitung des Beweises zeigen wir zunächst folgenden Hilfssatz (s. a. [1], Satz 7):

HILFSSATZ 10. *Es sei* S *ein diskreter Bewertungsring,* M *ein* S*-Modul,* H *ein freier Untermodul endlichen Ranges. Ferner gelte:* $M = F \oplus T \oplus D$, $M/H = \tilde{T} \oplus \tilde{D}$, *wobei* F *ein freier Modul endlichen Ranges,* T *und* $\tilde{T}$ *endlich erzeugbare Torsionsmoduln,* D *und* $\tilde{D}$ *torsionsfreie Divisionsmoduln sind. Dann gilt:* $\operatorname{Rang} F = \operatorname{Rang} H$.

BEWEIS. 1. $\operatorname{Rang} F \leqq \operatorname{Rang} H$: Wir setzen zur Abkürzung $F' = M/(T+D)$, $H' = (H+T+D)/(T+D)$. Dann ist $F' \cong F$ und H' ist als homomorphes Bild von H endlich erzeugbar mit $\operatorname{Rang} H' \leqq \operatorname{Rang} H$.

Man hat dann einerseits:

$$M/(H+T+D) \cong \big(M/(T+D)\big)/\big((H+T+D)/(T+D)\big) = F'/H'$$

ist endlich erzeugbar als homomorphes Bild von F'.

Andererseits gilt:

$$M/(H+T+D) \cong (M/H)/\big((H+T+D)/H\big)$$

ist homomorphes Bild von $M/H = \tilde{T} \oplus \tilde{D}$.

Als endlich erzeugbarer Modul ist $M/(H+T+D)$ direkte Summe zyklischer Moduln, enthält also kein von Null verschiedenes Element unendlicher Höhe. Da alle Elemente von $\tilde{D}$ und daher auch ihre Bilder in $M/(H+T+D)$ unendliche Höhe haben, liegt ganz $\tilde{D}$ im Kern des Homomorphismus, und daher ist $M/(H+T+D)$ homomorphes Bild von $\tilde{T}$, also ein endlich erzeugbarer Torsionsmodul. Es gibt also ein Element $x \neq 0$, $x \in S$, das den ganzen Modul

annulliert. Wegen der Isomorphie mit F'/H' bedeutet das: $x \cdot F' \subseteq H'$. Weil F' frei ist, gilt $x \cdot F' \cong F'$ und daher: $\operatorname{Rang} F = \operatorname{Rang} F' = \operatorname{Rang} x \cdot F' \leqq \operatorname{Rang} H' \leqq \operatorname{Rang} H$.

2. $\operatorname{Rang} F \geqq \operatorname{Rang} H$: $y_1, \ldots, y_r$ sei eine Basis von H. Dann ist $r = \operatorname{Rang} H$. In $M = F \oplus T \oplus D$ gestatten die y_i eine eindeutige Zerlegung $y_i = f_i + t_i + d_i$ mit $f_i \in F$, $t_i \in T$, $d_i \in D$. Wir zeigen, daß die $f_1, \ldots, f_r$ linear unabhängig sind. Dann enthält also F mindestens r linear unabhängige Elemente und es ist daher $\operatorname{Rang} F \geqq \operatorname{Rang} H$.

Weil die Torsion von M/H nach Voraussetzung endlich erzeugbar ist, enthält sie kein von Null verschiedenes Element unendlicher Höhe. Daher gilt: $H \cap D = (0)$; denn wäre $z \neq 0$, $z \in H \cap D$, so gäbe es, weil z in dem endlich erzeugbaren Modul H eine endliche Höhe hat, in D aber unendliche Höhe, ein Element $z' \in D$, $z' \notin H$ und ein $s \in S$ mit $s \cdot z' = z \in H$. z' repräsentierte dann ein Torsionselement von M/H. Dieses hätte aber als homomorphes Bild eines Elementes aus D unendliche Höhe in M/H im Widerspruch zu dem oben festgestellten.

Sei nun $\sum_{i=1}^{r} s_i \cdot f_i = 0$, so folgt $\sum_{i=1}^{r} s_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{r} s_i \cdot t_i + \sum_{i=1}^{r} s_i \cdot d_i$. Es sei nun $s \neq 0$, $s \in S$ ein Element mit $s \cdot t_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Dann gilt: $\sum_{i=1}^{r} s \cdot s_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{r} s \cdot s_i \cdot d_i$. Daraus sieht man, daß das Element $y = \sum_{i=1}^{r} s \cdot s_i \cdot y_i$ in $H \cap D$ liegt, also Null ist. Wegen der linearen Unabhängigkeit der y_i folgt daraus $s \cdot s_i = 0$ und weiter $s_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit der $f_1, \ldots, f_r$ nachgewiesen.

BEWEIS von Satz 12. Ist d die Differentiation von R über P, $\hat{d}$ die Differentiation von $\hat{R}$ über P, so ist $\hat{d}$ die universelle Ausdehnung von d auf $\hat{R}$ und man hat daher nach Satz 9: $\hat{d}$ ist tensorielle Ausdehnung von d auf $\hat{R}$ und $\hat{R}\hat{d}\hat{R}/\hat{R}\hat{d}R$ ist torsionsfrei. Das bedeutet: $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathsf{P}) \subseteq M(\hat{R}/\mathsf{P})$ in natürlicher Weise und jedes Torsionselement von $M(\hat{R}/\mathsf{P})$ liegt bereits in $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathsf{P})$. Damit ist b) gezeigt.

Wir betrachten nun zunächst den Fall $\mathsf{P} = \tilde{\mathsf{P}}$.

T' sei die Torsion von $M(\hat{R}/\mathsf{P})$ und damit nach b) auch die Torsion von $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathsf{P})$. N sei der in Satz 11 vorkommende Modul. N ist torsionsfrei, also gilt $N \cap T' = (0)$. Daher ist ein zu T' isomorpher Modul in $M(\hat{R}/\mathsf{P})/N$ enthalten. $M(\hat{R}/\mathsf{P})/N$ ist aber nach Satz 11 ein endlich erzeugbarer Modul, also ist auch T' endlich erzeugbar. Ist D der maximale Divisionsuntermodul von $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathsf{P})$, so folgt: $T' \cap D = (0)$; denn sonst enthielte T' Elemente unendlicher Höhe, was der endlichen Erzeugbarkeit widerspricht.

Es sei $t = e + d$ die Zerlegung eines Torsionselementes t in $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathsf{P}) = E \oplus D$, $e \in E$, $d \in D$. $r \neq 0$, $r \in \hat{R}$ sei ein Annullator von t. Es folgt $r \cdot e = -r \cdot d$, also liegt $r \cdot d$ in $E \cap D = (0)$. Weil D kein Torsionselement enthält, folgt daraus $d = 0$, also $t = e$. Damit hat man: $T' \subseteq E$, also $T' = T$.

Wegen $E \cong M'(\hat{R}/\mathfrak{P})$ ist damit c) bewiesen.

Zum Beweis von a) betrachten wir zuerst wieder den Fall $\mathfrak{P} = \tilde{\mathfrak{P}}$. Nach Satz 6, angewandt auf R über $\mathfrak{P}$ bzw. $\hat{R}$ über $\mathfrak{P}$ hat man: $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P}) = E \oplus D$ mit $E \cong M'(\hat{R}/\mathfrak{P})$ und auch $M(\hat{R}/\mathfrak{P}) = \hat{E} \oplus \hat{D}$ mit $\hat{E} \cong M'(\hat{R}/\mathfrak{P})$, also $E \cong \hat{E}$. Es genügt also, den Rang des freien Bestandteils von $\hat{E}$ zu bestimmen.

Sei etwa $\hat{E} = \hat{F} \oplus \hat{T}$, $\hat{F}$ freier Modul, $\hat{T}$ endlich erzeugbarer Torsionsmodul. Wir betrachten mit den im Abschnitt 2. eingeführten Moduln H und N den Modul $M'' = M(\hat{R}/\mathfrak{P})/H$. Er enthält den Untermodul $N'' = N/H$, der als Divisionsmodul direkter Summand ist. Der komplementäre Summand in einer Zerlegung von M'' ist isomorph zu $M(\hat{R}/\mathfrak{P})/N$, also ein endlich erzeugbarer Torsionsmodul. Weil N'' torsionsfrei ist, folgt aus Hilfssatz 10: Rang $\hat{F}$ = Rang H.

Nach Satz 11 hat man ferner Rang $H = \begin{cases} \dim \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{k}}, & \text{falls } \mathfrak{P} \neq k \\ \dim \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{k}} + 1, & \text{falls } \mathfrak{P} = k. \end{cases}$

Damit ist a) für den Fall $\mathfrak{P} = \tilde{\mathfrak{P}}$ bewiesen.

Im Fall $\mathfrak{P} \neq \tilde{\mathfrak{P}}$ sei d die Differentiation von R über $\mathfrak{P}$, $\tilde{d}$ die Differentiation von R über $\tilde{\mathfrak{P}}$. Man hat dann nach [2], Anmerkung 10: $R\tilde{d}R = RdR/Rd\tilde{\mathfrak{P}}$. Weil $\tilde{\mathfrak{P}}$ im Quotientenkörper von $\mathfrak{P}$ liegt, gibt es zu jedem Element $x \in \tilde{\mathfrak{P}}$ ein Element $y \neq 0$, $y \in \mathfrak{P}$ mit $y \cdot x \in \mathfrak{P}$. Es folgt: $y \cdot dx = 0$, also ist $Rd\tilde{\mathfrak{P}}$ ein Torsionsmodul. Man hat also $\hat{R} \otimes_R M(R/\tilde{\mathfrak{P}}) = \hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P})/\hat{R} \otimes Rd\tilde{\mathfrak{P}}$, wo $R \otimes Rd\tilde{\mathfrak{P}}$ ein Torsionsmodul ist, weil $Rd\tilde{\mathfrak{P}}$ ein Torsionsmodul ist.

Sei D'' die Torsion von D. Dann gilt $D = D' \oplus D''$, D' torsionsfrei und daher $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P}) = F \oplus D' \oplus T'$, wo T' die Torsion von $\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P})$ ist. Wegen $\hat{R} \otimes Rd\tilde{\mathfrak{P}} \subseteq T'$ folgt: $\hat{R} \otimes_R M(R/\tilde{\mathfrak{P}}) \cong F \oplus D' \oplus (T'/\hat{R} \otimes Rd\tilde{\mathfrak{P}})$. Da $T'/\hat{R} \otimes Rd\tilde{\mathfrak{P}}$ ein Torsionsmodul ist, ist damit der allgemeine Fall auf den Fall $\mathfrak{P} = \tilde{\mathfrak{P}}$ zurückgeführt.

Damit ist Satz 12 in allen Teilen bewiesen.

FOLGERUNG. *Es sei* $\dim \frac{K}{k} = n$, $\mathfrak{P} = \tilde{\mathfrak{P}}$. *Dann gilt:*

$\hat{R} \otimes_R M(R/\mathfrak{P})$ *ist genau dann endlich erzeugbar, wenn*

$$\dim \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{k}} = \begin{cases} n, & \text{falls } \mathfrak{P} \neq k \\ n-1, & \text{falls } \mathfrak{P} = k \end{cases}$$

ist.

Literatur

[1] BERGER, R.: Über den Modul der bei einer diskreten Bewertung ganzen Differentiale in einem Körper von Primzahlcharakteristik. J. reine angew. Math. **204**, 188–204 (1960).

[2] — Ausdehnung von Derivationen und Schachtelung der Differente. Math. Z. (im Druck).

[3] BOURBAKI, N.: Les structures fondamentales d'analyse, Livre II Chap. III. Paris 1958.

[4] GROTHENDIECK, A.: Éléments de géometrie algébrique I. Publication math. **4** (1960).
[5] HASSE, H.: Zahlentheorie. Berlin 1949.
[6] KÄHLER, E.: Algebra und Differentialrechnung, Bericht über die Mathematikertagg. Berlin 1953.
[7] KAPLANSKY, I.: Elementary divisors and modules. Trans. Amer. Math. Soc. **66**, 464–491 (1949).
[8] — Infinite Abelian groups. University of Michigan Press. Ann Arbor 1956.
[9] KUNZ, E.: Die Primidealteiler der Differenten in allgemeinen Ringen. J. reine angew. Math. **204**, 165–182 (1960).
[10] ROQUETTE, P.: Die Abspaltung des Radikals in vollständigen lokalen Ringen. Abh. d. math. Seminars d. Univ. Hamburg **23**, 75–113 (1959).
[11] SCHMIDT, F. K.: Über die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen. Math. Z. **41**, 443–450 (1936).
[12] ZARISKI, O., and P. SAMUEL: Commutative Algebra, vol. II. Princeton-New York-London-Toronto 1960.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 11. April 1961)

ENDLER, O.
Math. Zeitschr. 77, 339–358 (1961)

Über multiplikative Strukturen und eudoxische Hüllen von archimedischen totalgeordneten Gruppen

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von
OTTO ENDLER

In einer Note „Über die Endomorphismen von total geordneten Archimedischen Abelschen Gruppen", Math. Z. **74**, 81–90 (1960), hat Herr W. KRULL die im 5. Buch Euklids dargestellte Proportionenlehre mit der Theorie der archimedischen totalgeordneten Gruppen A in Zusammenhang gebracht. Der Einfachheit halber hat er sich hierbei weitgehend auf den Fall beschränkt, daß die multiplikative Halbgruppe $\mathfrak{E}^*$ aller ordnungserhaltenden und -umkehrenden Endomorphismen von A „r-transitiv" für ein $r \in A$ ist, d.h. daß $A = \mathfrak{E}^* r$ gilt.

In der vorliegenden Arbeit werden diese Untersuchungen weitergeführt und auf beliebige archimedische totalgeordnete Gruppen verallgemeinert, und es werden insbesondere die folgenden Fragen diskutiert: Läßt sich zu einer vorgegebenen archimedischen totalgeordneten Gruppe A stets eine eudoxische Hülle (d.h. eine kleinste A umfassende eudoxische Gruppe) durch einen algebraischen Prozeß konstruieren?[1]) Wie kann man eine Übersicht über die Multiplikationen gewinnen, die A zu einem archimedischen totalgeordneten Ring machen?

Als wichtigstes Hilfsmittel dient uns die (archimedische totalgeordnete) *Fraktionsgruppe* $\bar{A}$, die aus allen „Fraktionen" a/ϱ besteht, wobei a die Elemente aus A und ϱ die ordnungserhaltenden Endomorphismen von A durchläuft. Diese bildet eine ausgezeichnete eudoxische Hülle von A, falls A *zusammenhängend* ist (d.h. wenn zu $a_1, a_2 \in A$ stets ϱ_1, ϱ_2 mit $\varrho_1 a_1 = \varrho_2 a_2$ existieren), und mit ihrer Hilfe lassen sich die Multiplikationen charakterisieren, die A zu einem archimedischen totalgeordneten Ring (mit oder ohne Einselement) machen. Für *unzusammenhängende* A existiert sicher keine Multiplikation der genannten Art, und $\bar{A}$ ist, von Ausnahmefällen abgesehen, nicht

[1]) A heißt *eudoxisch*, wenn zu jedem positiven Tripel $r, s, t \in A$ die „vierte Proportionale", d.h. ein $u \in A$ mit der Eigenschaft

$$k r > l s \Leftrightarrow k t > l u \qquad (k, l \in \boldsymbol{N})$$

existiert. — Jedes A läßt sich bekanntlich in die additive Gruppe $\boldsymbol{R}$ aller reellen Zahlen ordnungsisomorph einbetten, und man kann stets eine eudoxische Hülle von A als Untergruppe von $\boldsymbol{R}$ konstruieren [vgl. (3.16)]. Diese Konstruktion kann jedoch nicht als algebraisch angesehen werden, da man $\boldsymbol{R}$ nicht durch einen algebraischen Prozeß aus A gewinnen kann.

eudoxisch. Trotzdem untersuchen wir die Fraktionsgruppe auch in diesem Fall und zeigen insbesondere, daß sie eine symmetrische[2]) Hülle von A bildet, falls A *fraktionsregulär* ist, d.h. wenn die Zusammenhangskomponenten von $\bar{A}$ eineindeutig denen von A entsprechen.

Jede archimedische totalgeordnete Gruppe A ist bereits durch die aus ihren (strikt) positiven Elementen bestehende „archimedische Halbgruppe" P eindeutig festgelegt. Wir dürfen deshalb mit archimedischen Halbgruppen (und entsprechend definierten archimedischen Halbringen und -körpern) statt mit archimedischen totalgeordneten Gruppen (bzw. Ringen und Körpern) arbeiten; die für die ersteren gewonnenen Ergebnisse übertragen sich dann unmittelbar auf die letzteren.

Ein beträchtlicher Teil der für archimedische Halbgruppen gültigen Aussagen läßt sich allgemeiner für die durch gewisse Eigenschaften ihres Endomorphismenhalbringes axiomatisch charakterisierten „A-Halbgruppen" beweisen. Wir beginnen deshalb, in §1, mit einer ausführlichen Diskussion der A-Halbgruppen. Die in §1 gewonnenen Ergebnisse vervollständigen wir dann in §3 für archimedische Halbgruppen; hierbei legen wir besonderen Wert darauf, die für A-Halbgruppen eingeführten Begriffe in die Sprache der Proportionen zu übersetzen. In analoger Weise behandeln wir zunächst in §2 axiomatisch eingeführte „A-Halbringe" und ergänzen die Ausführungen in §4 für archimedische Halbringe.

In §5 sollen die vorhergehenden Betrachtungen durch mehrere Zusätze und Beispiele ergänzt und erläutert werden.

Bezeichnungen: Wir bezeichnen mit $\cdot\boldsymbol{Z}$, $\cdot\boldsymbol{Q}$, $\cdot\boldsymbol{R}$ den archimedischen totalgeordneten Ring bzw. Körper aller ganzen bzw. rationalen bzw. reellen Zahlen, mit $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ seine (archimedische totalgeordnete) Additionsgruppe. Für $u, v, \ldots \in \boldsymbol{R}$ bezeichnet $\boldsymbol{Q}[u, v, \ldots]$ bzw. $\boldsymbol{Q}(u, v, \ldots)$ die Additionsgruppe des Ringes $\cdot\boldsymbol{Q}[u, v, \ldots]$ bzw. des Körpers $\cdot\boldsymbol{Q}(u, v, \ldots)$. — Ist $\boldsymbol{A}$ eine Untergruppe von $\boldsymbol{R}$ (bzw. $\cdot\boldsymbol{A}$ ein Unterring von $\cdot\boldsymbol{R}$), so bezeichnen wir mit $\boldsymbol{A}_+$ (bzw. $\cdot\boldsymbol{A}_+$) die Halbgruppe (bzw. den Halbring) aller positiven Elemente von $\boldsymbol{A}$ (bzw. $\cdot\boldsymbol{A}$). Statt $\boldsymbol{Z}_+$ schreiben wir $\boldsymbol{N}$.

§ 1. A-Halbgruppen

Unter einer *Halbgruppe* verstehen wir eine Menge $P \neq \emptyset$, versehen mit einer (auf ganz P definierten) assoziativen und kommutativen Addition; wir setzen voraus, daß P kein Nullelement besitzt[3]). — Unter einem *Halbring* $\cdot P$ verstehen wir eine Halbgruppe P, versehen mit einer (auf ganz P definierten) assoziativen und hinsichtlich der Addition distributiven Multiplikation $\cdot$. Besitzt $\cdot P$ ein Einselement e (d.h. gilt $e \cdot r = r \cdot e = r$ für alle $r \in P$) und gibt

[2]) Wir nennen A *symmetrisch*, wenn alle ordnungserhaltenden Endomorphismen von A Automorphismen sind. Genau dann ist A eudoxisch, wenn A symmetrisch und zusammenhängend ist (vgl. (3.9)).

[3]) Die folgenden Ausführungen gelten auch für Halbgruppen (-ringe und -körper) mit Nullelement, sofern man dieses an gewissen Stellen stillschweigend von der Betrachtung ausschließt.

es zu jedem $r \in P$ ein Inverses (d.h. ein $r' \in P$ mit $r \cdot r' = r' \cdot r = e$), so nennen wir $\cdot P$ einen *Halbkörper*.

Die Menge aller Endomorphismen einer Halbgruppe P bildet hinsichtlich der üblichen Addition eine Halbgruppe $\mathfrak{P}$. Versehen mit der durch die Vorschrift

$$(\sigma \circ \varrho)\, r = \sigma(\varrho\, r) \qquad (r \in P;\ \varrho, \sigma \in \mathfrak{P})$$

definierten Verknüpfung $\circ$ als Multiplikation, bildet $\mathfrak{P}$ einen Halbring $\circ\mathfrak{P}$ mit dem Einselement ι (die identische Abbildung von P auf sich). Die Menge $\mathfrak{Q}$ aller Automorphismen von P bildet eine (und zwar die größte) Untergruppe der multiplikativen Halbgruppe von $\circ\mathfrak{P}$. Ist $\circ\mathfrak{P}$ ein Halbkörper (d.h. $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$), so nennen wir P *symmetrisch*. Existieren eine Injektion[4]) der Halbgruppe P' in die symmetrische Halbgruppe P und ein Homomorphismus von P in P', so gilt $P \cong P'$, P' ist symmetrisch, und jeder Homomorphismus von P in P' ist eine Bijektion[4]). Für jedes $r \in P$ wird durch die Vorschrift

$$\Theta_r\, \varrho = \varrho\, r \qquad (\varrho \in \mathfrak{P})$$

ein Homomorphismus Θ_r von $\mathfrak{P}$ in P definiert. Ist Θ_r eine Bijektion, so nennen wir r *primitiv für* P.

Eine Injektion φ von P in P' soll *regulär* heißen, wenn ein (notwendig injektiver) Homomorphismus $\mathfrak{f}$ von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$ mit $\varphi \circ \sigma = (\mathfrak{f}\sigma) \circ \varphi$ $(\sigma \in \mathfrak{P})$ existiert. Insbesondere ist jede Bijektion φ von P auf P' regulär, und das zugehörige $\mathfrak{f}$ ist ebenfalls eine Bijektion.

Wir interessieren uns besonders für Halbgruppen P, die den folgenden Bedingungen genügen:

1 a) $\circ\mathfrak{P}$ *ist kommutativ*;

1 b) *alle* $\varrho \in \mathfrak{P}$ *sind injektiv*;

1 c) *für jedes* $r \in P$ *ist* Θ_r *injektiv*.

Eine Halbgruppe dieser Art wollen wir kurz eine *A-Halbgruppe* nennen. Existiert eine reguläre Injektion φ von einer Halbgruppe P' in eine A-Halbgruppe P, so ist auch P' eine A-Halbgruppe, und die zu φ gehörige Injektion $\mathfrak{f}$ von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$ ist eindeutig bestimmt.

Eine Halbgruppe P heißt *zusammenhängend*, wenn für alle $r, s \in P$ stets $\varrho, \sigma \in \mathfrak{P}$ mit $\varrho\, r = \sigma\, s$ existieren. Ist P zusammenhängend und symmetrisch, so ist jedes $r \in P$ primitiv für P. Andererseits gilt für jede A-Halbgruppe P: Existiert ein für P primitives $r \in P$, so ist P zusammenhängend; sind alle $r \in P$ primitiv für P, so ist P symmetrisch.

In der A-Halbgruppe P wird durch die Vorschrift

$$r \underset{P}{\sim} s \Leftrightarrow \varrho\, r = \sigma\, s \quad \textit{für geeignete } \varrho, \sigma \in \mathfrak{P}$$

[4]) Unter einer *Injektion von P in P'* bzw. einer *Bijektion von P auf P'* verstehen wir einen injektiven, d.h. eineindeutigen, Homomorphismus von P in P' bzw. einen Isomorphismus von P auf P'. Ist φ eine Injektion von P in P', so bezeichnen wir mit φ^{-1} die zu φ inverse Bijektion von φP auf P.

eine Äquivalenzrelation $\sim_P$ definiert; die $\sim_P$-Äquivalenzklassen nennen wir die *Zusammenhangskomponenten* von P. Jede Zusammenhangskomponente P_μ von P ist eine zusammenhängende Halbgruppe, und die Abbildung i_μ, die jedem $\varrho \in \mathfrak{P}$ seine Beschränkung auf P_μ zuordnet, ist eine Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}_\mu$. Die identische Injektion von P_μ in P ist genau dann regulär, wenn i_μ eine Bijektion ist. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn P symmetrisch ist und P_μ der Bedingung 1c) genügt. Genau dann ist P zusammenhängend, wenn P nur eine Zusammenhangskomponente (nämlich P selbst) besitzt. Ist φ eine reguläre Injektion von einer zusammenhängenden Halbgruppe P' in eine A-Halbgruppe P, so ist $\varphi P'$ in einer Zusammenhangskomponente von P enthalten (vgl. aber §5, Beispiel 3).

Es sei P eine A-Halbgruppe. In der Paarmenge $P \times \mathfrak{P}$ wird durch die Vorschrift

$$(r, \varrho) \approx_P (s, \sigma) \Leftrightarrow \sigma r = \varrho s \qquad (r, s \in P;\ \varrho, \sigma \in \mathfrak{P})$$

eine Äquivalenzrelation $\approx_P$ definiert; die durch (r, ϱ) bestimmte $\approx_P$-Äquivalenzklasse bezeichnen wir mit r/ϱ. Die Menge aller r/ϱ $(r \in P;\ \varrho \in \mathfrak{P})$ bildet hinsichtlich der durch die Vorschrift

$$r/\varrho + s/\sigma = (\sigma r + \varrho s)/(\varrho \circ \sigma) \qquad (r, s \in P;\ \varrho, \sigma \in \mathfrak{P})$$

definierten Addition eine Halbgruppe $\overline{P}$, die wir die *Fraktionshalbgruppe von* P nennen. — Durch die Vorschrift

$$\eta r = r/\iota \quad (r \in P) \quad \text{bzw.} \quad (\mathfrak{h}\sigma)(r/\varrho) = (\sigma r)/\varrho \quad (r \in P;\ \varrho, \sigma \in \mathfrak{P})$$

werden eine Injektion η von P in $\overline{P}$ und eine Injektion $\mathfrak{h}$ von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\overline{\mathfrak{P}}$ definiert; wegen $\eta \circ \sigma = (\mathfrak{h}\sigma) \circ \eta$ $(\sigma \in \mathfrak{P})$ ist η eine reguläre Injektion. Für jedes $\sigma \in \mathfrak{P}$ gilt $\mathfrak{h}\sigma \in \overline{\mathfrak{Q}}$, und die Menge $\{(\mathfrak{h}\varrho)^{-1} \circ \mathfrak{h}\sigma \mid \varrho, \sigma \in \mathfrak{P}\}$, die wir im folgenden kurz mit $(\mathfrak{h}\mathfrak{P})^{-1} \circ \mathfrak{h}\mathfrak{P}$ bezeichnen, bildet eine kommutative Untergruppe von $\overline{\mathfrak{Q}}$. Insbesondere ist η genau dann eine Bijektion, wenn $\mathfrak{h}\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{P}}$ gilt, und dies trifft genau dann zu, wenn P symmetrisch ist. — Man beweist mühelos den folgenden Einbettungssatz:

(1.1) SATZ. *Es seien P, P' A-Halbgruppen, φ sei eine reguläre Injektion von P in P' und $\mathfrak{f}$ die zugehörige Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$. Dann wird durch die Vorschrift*

$$\overline{\varphi}(r/\varrho) = \varphi r/\mathfrak{f}\varrho \qquad (r \in P;\ \varrho \in \mathfrak{P})$$

eine Injektion $\overline{\varphi}$ von $\overline{P}$ in $\overline{P'}$ mit der Eigenschaft $\eta' \circ \varphi = \overline{\varphi} \circ \eta$ definiert.

Ist P' symmetrisch, so ist $\widetilde{\varphi} = \eta'^{-1} \circ \overline{\varphi}$ eine der Gleichung $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \eta$ genügende Injektion von $\overline{P}$ in P'.

Im allgemeinen ist $\overline{P}$ selbst nicht symmetrisch, und die durch φ induzierten Injektionen $\overline{\varphi}, \widetilde{\varphi}$ brauchen nicht regulär zu sein (vgl. §5, Beispiele 8 bis 10). Für den Fall daß P *fraktionsregulär* ist, d.h. daß $(\mathfrak{h}\mathfrak{P})^{-1} \circ \mathfrak{h}\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{P}}$ gilt, erhalten wir jedoch die folgende schärfere Aussage:

(1.2) KOROLLAR. *Ist die A-Halbgruppe P fraktionsregulär, so ist $\overline{P}$ eine symmetrische A-Halbgruppe, und die in* (1.1) *betrachteten Injektionen $\overline{\varphi}, \overline{\varphi}$ sind regulär.*

BEWEIS. Wegen $(\mathfrak{h}\mathfrak{P})^{\vdash} \circ \mathfrak{h}\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{P}}$ ist $\overline{P}$ symmetrisch und genügt den Bedingungen 1a) und 1b). Es sei $\bar{s} = s/\sigma \in \overline{P}$, und es möge $\bar{\sigma}_1 \bar{s} = \bar{\sigma}_2 \bar{s}$ für $\bar{\sigma}_i = (\mathfrak{h}\tau_i)^{\vdash} \circ \mathfrak{h}\varrho_i \in \overline{\mathfrak{P}}$ $(i = 1, 2)$ gelten. Dann ist $\eta((\tau_2 \circ \varrho_1)s) = \eta((\tau_1 \circ \varrho_2)s)$ und somit $\tau_2 \circ \varrho_1 = \tau_1 \circ \varrho_2$, also $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$. Also ist $\overline{P}$ eine A-Halbgruppe. — Die durch $\bar{\mathfrak{f}} \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \circ \mathfrak{f}$ bestimmte Injektion $\bar{\mathfrak{f}}$ von $\circ(\mathfrak{h}\mathfrak{P})$ in $\circ(\mathfrak{h}'\mathfrak{P}')$ läßt sich wegen $\overline{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{h}\mathfrak{P})^{\vdash} \circ \mathfrak{h}\mathfrak{P}$ zu einer (ebenso bezeichneten) Injektion von $\circ\overline{\mathfrak{P}}$ in $\circ\overline{\mathfrak{P}'}$ fortsetzen. Aus $\varphi \circ \varrho = (\mathfrak{f}\varrho) \circ \varphi$ $(\varrho \in \mathfrak{P})$ folgt $\overline{\varphi} \circ \bar{\varrho} = (\bar{\mathfrak{f}}\bar{\varrho}) \circ \overline{\varphi}$, $(\bar{\mathfrak{f}}\bar{\varrho}^{\vdash}) \circ \overline{\varphi} = \overline{\varphi} \circ \bar{\varrho}^{\vdash}$ und somit $\overline{\varphi} \circ (\bar{\sigma}^{\vdash} \circ \bar{\varrho}) = \mathfrak{f}(\bar{\sigma}^{\vdash} \circ \bar{\varrho}) \circ \overline{\varphi}$ für alle $\bar{\varrho}, \bar{\sigma} \in \mathfrak{h}\mathfrak{P}$, also ist $\overline{\varphi}$ regulär. — Ist P' symmetrisch, so ist η' eine Bijektion, und mit $\overline{\varphi}$ ist auch $\overline{\varphi} = \eta'^{\vdash} \circ \overline{\varphi}$ regulär.

Es sei $P = \bigcup_{\mu \in \mathsf{M}} P_\mu$ die Zerlegung von P in (paarweise elementefremde) Zusammenhangskomponenten P_μ. Für jedes $\mu \in \mathsf{M}$ ist $\overline{P}_{(\mu)} = \{r/\varrho \mid r \in P_\mu;\ \varrho \in \mathfrak{P}\}$ eine ηP_μ umfassende zusammenhängende Unterhalbgruppe von $\overline{P}$, und $\overline{P}_{(\mu)}$ ist in einer Zusammenhangskomponente $\overline{P}_{\bar{\mu}}$ von $\overline{P}$ enthalten. Ersichtlich ist $\overline{P} = \bigcup_{\mu \in \mathsf{M}} \overline{P}_{(\mu)}$, ferner $\overline{P}_{(\mu)} \cap \overline{P}_{(\mu')} = \emptyset$ für $\mu \neq \mu'$.

(1.3) LEMMA. *Es sei P eine A-Halbgruppe, und $\overline{P}$ genüge der Bedingung* 1c). *Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

α) Für jedes $\bar{\tau} \in \overline{\mathfrak{P}}$ existiert ein $\mu \in \mathsf{M}$ mit $\bar{\tau}\,\overline{P}_{(\mu)} \cap \overline{P}_{(\mu)} \neq \emptyset$;

β) P ist fraktionsregulär;

γ) aus $\eta r_1 \mathrel{\overset{\sim}{\underset{P}{}}} \eta r_2$ folgt $r_1 \mathrel{\overset{\sim}{\underset{P}{}}} r_2$ $(r_1, r_2 \in P)$.

In diesem Falle sind die $\overline{P}_{(\mu)}$ $(\mu \in \mathsf{M})$ die sämtlichen Zusammenhangskomponenten von $\overline{P}$.

BEWEIS. $\alpha) \Rightarrow \beta)$: Für jedes $\bar{\tau} \in \overline{\mathfrak{P}}$ existieren $\mu \in \mathsf{M}$, $s_i \in P_\mu$, $\sigma_i \in \mathfrak{P}$ $(i = 1, 2)$ mit $\bar{\tau}(s_1/\sigma_1) = s_2/\sigma_2$, ferner $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathfrak{P}$ mit $\varrho_1 s_1 = \varrho_2 s_2$. Für $\bar{\tau}_i = \mathfrak{h}(\varrho_i \circ \sigma_i)$ $(i = 1, 2)$ gilt daher $\bar{\tau}_1(s_1/\sigma_1) = \eta(\varrho_1 s_1) = \eta(\varrho_2 s_2) = \bar{\tau}_2(s_2/\sigma_2)$, also $(\bar{\tau}_2^{\vdash} \circ \bar{\tau}_1)(s_1/\sigma_1) = s_2/\sigma_2$, und wegen 1c) ist somit $\bar{\tau} = \bar{\tau}_2^{\vdash} \circ \bar{\tau}_1 \in (\mathfrak{h}\mathfrak{P})^{\vdash} \circ \mathfrak{h}\mathfrak{P}$. Also ist P fraktionsregulär. — $\beta) \Rightarrow \gamma)$: Ist $\bar{\tau}_1(\eta r_1) = \bar{\tau}_2(\eta r_2)$ für geeignete $\bar{\tau}_i = (\mathfrak{h}\varrho_i)^{\vdash} \circ \mathfrak{h}\sigma_i \in \overline{\mathfrak{P}}$ $(i = 1, 2)$, so gilt $\eta((\varrho_1 \circ \sigma_2)r_2) = (\mathfrak{h}(\varrho_1 \circ \varrho_2) \circ \bar{\tau}_2)(\eta r_2) = (\mathfrak{h}(\varrho_2 \circ \varrho_1) \circ \bar{\tau}_1)(\eta r_1) = \eta((\varrho_2 \circ \sigma_1)r_1)$ und somit $r_1 \mathrel{\overset{\sim}{\underset{P}{}}} r_2$. — $\gamma) \Rightarrow \alpha)$: Aus $r_i \in P_{\mu_i}$ $(i = 1, 2)$, $\eta r_1 \mathrel{\overset{\sim}{\underset{P}{}}} \eta r_2$ folgt $r_1 \mathrel{\overset{\sim}{\underset{P}{}}} r_2$, also $\mu_1 = \mu_2$. Daher gilt die letzte Behauptung des Lemmas und erst recht $\alpha)$.

Wir bemerken noch: Ist P nicht fraktionsregulär, und genügt $\overline{P}$ der Bedingung 1c), so gibt es ein $\bar{\tau} \in \overline{\mathfrak{P}}$ derart, daß $\bar{\tau}\,\overline{P}_{(\mu)} \cap \overline{P}_{(\mu)} = \emptyset$ für alle $\mu \in \mathsf{M}$ gilt. In diesem Falle ist also jedes $\overline{P}_{(\mu)}$ in einer Zusammenhangskomponente $\overline{P}_{\bar{\mu}}$ von $\overline{P}$ *echt* enthalten. — Aus (1.2) und (1.3) folgt insbesondere:

(1.4) KOROLLAR. *Für jede A-Halbgruppe P sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

α) P ist fraktionsregulär, und $\overline{P}$ ist zusammenhängend;

β) P ist zusammenhängend, und $\overline{P}$ genügt der Bedingung 1c).

§ 2. A-Halbringe

Ist $\cdot P$ ein Halbring mit der Additionshalbgruppe P, so ist die durch die Vorschrift

$$(\Xi r)\, s = r \cdot s \qquad (r, s \in P)$$

definierte Abbildung Ξ ein Homomorphismus von $\cdot P$ in $\circ\mathfrak{P}$. Ist $\cdot P$ kommutativ, so ist P zusammenhängend, und es gilt $\Theta_e \circ \Xi = \Xi r$ für jedes $r \in P$.

Das Element $r \in \cdot P$ heißt *regulär*, wenn aus $s \cdot r = t \cdot r$ stets $s = t$ folgt $(s, t \in \cdot P)$. Der Halbring $\cdot P$ heißt regulär, wenn er nur aus regulären Elementen besteht. Insbesondere ist jeder Halbkörper regulär. Besitzt $\cdot P$ ein reguläres Element, so ist Ξ injektiv.

Es sei $\cdot P$ ein Halbring, dessen Additionshalbgruppe P den Bedingungen 1 a) und 1 b) genügt. Dann gilt $\tau(r \cdot s) = r \cdot (\tau s)$ $(r, s \in P;\ \tau \in \mathfrak{P})$, und die folgenden Bedingungen sind äquivalent: $\alpha)$ *$\cdot P$ besitzt ein reguläres Element*; $\beta)$ *Ξ ist injektiv*; $\gamma)$ *$\cdot P$ ist kommutativ*; $\delta)$ *$\cdot P$ ist regulär*. Gelten diese Bedingungen, so ist P eine A-Halbgruppe (denn aus $\sigma r = \tau r$ folgt $(\sigma s) \cdot r = s \cdot (\sigma r) = s \cdot (\tau r) = (\tau s) \cdot r$ und somit $\sigma s = \tau s$ für alle $s \in P$, also $\sigma = \tau$), und wir nennen in diesem Falle $\cdot P$ einen *A-Halbring*; falls $\cdot P$ ein Halbkörper ist, nennen wir $\cdot P$ einen *A-Halbkörper*. Die A-Halbringe mit Einselement lassen sich folgendermaßen charakterisieren:

(2.1) LEMMA. *Für jeden Halbring $\cdot P$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

$\alpha)$ $\cdot P$ ist ein regulärer kommutativer Halbring mit Einselement e, und Θ_e ist injektiv;

$\beta)$ $\cdot P$ ist ein A-Halbring, und es ist $\iota \in \Xi P$.

In diesem Falle sind Ξ, Θ_e zueinander inverse Bijektionen von $\cdot P$ auf $\circ\mathfrak{P}$ bzw. von $\circ\mathfrak{P}$ auf $\cdot P$.

BEWEIS. $\beta) \Rightarrow \alpha)$ ist trivial. — $\alpha) \Rightarrow \beta)$: Da Θ_e injektiv ist und $\Theta_e \circ \Xi = \Xi e = \iota$ gilt, sind Θ_e, Ξ zueinander invers und daher bijektiv; insbesondere gilt $\iota \in \Xi P$. Aus der Kommutativität von $\cdot P$ folgt die von $\circ\mathfrak{P}$. Jedes $\varrho \in \mathfrak{P}$ ist injektiv; in der Tat, es ist $\varrho = \Xi r$ für ein $r \in P$, und aus $\varrho s = \varrho t$ folgt $r \cdot s = r \cdot t$, $s = t$ wegen der Regularität und Kommutativität von $\cdot P$. Also ist $\cdot P$ ein A-Halbring.

(2.2) LEMMA. *Es seien $\cdot P$, $\cdot P'$ A-Halbringe, φ sei eine reguläre Injektion von P in P', und $\mathfrak{f}$ sei die zu φ gehörige Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

$\alpha)$ φ ist eine Injektion von $\cdot P$ in $\cdot P'$;

$\beta)$ es gilt $\mathfrak{f} \circ \Xi = \Xi' \circ \varphi$;

Besitzt $\cdot P$ ein Einselement e, so sind diese Bedingungen auch gleichwertig mit:

$\gamma)$ φe ist Einselement von $\cdot P'$.

BEWEIS. $\alpha) \Leftrightarrow \beta)$ folgt wegen 1 c) aus den Gleichungssystemen $\varphi r \cdot \varphi s = \big(\Xi'(\varphi r)\big)(\varphi s)$, $\varphi(r \cdot s) = (\varphi \circ \Xi r)\, s = \big(\mathfrak{f}(\Xi r)\big)(\varphi s)$ $(r, s \in P)$. — Angenommen, $\cdot P$ besitze das Einselement e. Dann folgt $\gamma) \Rightarrow \beta)$ aus $\varphi \circ \Theta_e = \Theta'_{\varphi e} \circ \mathfrak{f}$ und (2.1), während $\alpha) \Rightarrow \gamma)$ aus der Regularität von $\cdot P'$ folgt.

Aus Lemma (2.1) ergibt sich, daß eine vorgebene A-Halbgruppe P höchstens dann (durch Einführung einer geeigneten Multiplikation) zu einem A-Halbring mit Einselement gemacht werden kann, wenn ein für P primitives Element existiert. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend; ist nämlich $r \in P$ primitiv für P, so läßt sich die Muitiplikation von $\circ\mathfrak{P}$ vermöge der Bijektion Θ_r auf P übertragen. Die so erhaltene Multiplikation nennen wir die r-Multiplikation von P und bezeichnen sie mit $^r\cdot$. Es gilt also der

(2.3) SATZ. *Die Multiplikationen, die die A-Halbgruppe P zu einem A-Halbring mit Einselement machen, entsprechen eineindeutig den für P primitiven Elementen $r \in P$. Hierbei ist r das Einselement von $^r P$, und Θ_r ist eine Bijektion von $\circ\mathfrak{P}$ auf $^r P$.*

Auf Grund einer Bemerkung in §1 folgt daraus unmittelbar das

(2.4) KOROLLAR. *Die A-Halbgruppe P läßt sich genau dann zu einem A-Halbkörper machen, wenn P symmetrisch und zusammenhängend ist. In diesem Falle ist $^r P$, für jedes $r \in P$, ein zu $\circ\mathfrak{P}$ isomorpher Halbkörper.*

Ist $\cdot P$ ein A-Halbring, so bildet die Fraktionshalbgruppe $\overline{P}$ von P hinsichtlich der durch die Vorschrift

$$r/\varrho \cdot s/\sigma = (r \cdot s)/(\varrho \circ \sigma) \qquad (r, s \in P;\ \varrho, \sigma \in \mathfrak{P})$$

definierten Multiplikation einen kommutativen regulären Halbring $\cdot\overline{P}$ mit dem Einselement $\bar{e} = r/\Xi r$ (unabhängig von der Wahl von $r \in P$), und η ist eine Injektion von $\cdot P$ in $\cdot\overline{P}$. Der Halbring $\cdot\overline{P}$ ist sogar ein Halbkörper, denn durch die Vorschrift

$$\tilde{\eta}\left(\frac{r}{s}\right) = r/\Xi s \qquad (r, s \in P)$$

wird eine Bijektion $\tilde{\eta}$ von dem Quotientenhalbkörper $\frac{\cdot P}{\cdot P}$ von $\cdot P$ auf $\cdot\overline{P}$ definiert. Aus der letztgenannten Tatsache folgert man mühelos: Sind $\cdot P$, $\cdot P'$ A-Halbringe und ist φ eine (nicht notwendig reguläre) Injektion von P in P', so ist φ genau dann eine Injektion von $\cdot P$ in $\cdot P'$, wenn eine Injektion $\overline{\varphi}$ von $\cdot\overline{P}$ in $\cdot\overline{P'}$ mit $\overline{\varphi} \circ \eta = \eta' \circ \varphi$ existiert.

Nach (2.1) ist $\cdot\overline{P}$ genau dann ein A-Halbkörper, wenn $\overline{\Theta}_{\bar{e}}$ injektiv ist; wegen (1.2) und (1.4) trifft dies genau dann zu, wenn P fraktionsregulär ist.

Wir wollen eine Übersicht über die Multiplikationen gewinnen, die eine vorgegebene fraktionsreguläre A-Halbgruppe P zu einem A-Halbring (mit oder ohne Einselement) machen. Wir nennen $\bar{r} \in \overline{P}$ *quasiprimitiv für* P, wenn $\eta P \subseteqq \overline{\Theta}_{\bar{r}}(\mathfrak{h}\mathfrak{P})$ gilt; für $\bar{r} = r/\varrho$ ist diese Bedingung gleichwertig mit $\varrho P \subseteqq \Theta_r \mathfrak{P}$; insbesondere ist ηr genau dann quasiprimitiv für P, wenn r primitiv für P ist ($r \in P$). Ist $\cdot P$ ein A-Halbring, so ist $\cdot\overline{P}$ ein A-Halbkörper, dessen Einselement $\bar{e}$ quasiprimitiv für P ist (denn für alle $s \in P$ gilt $\eta s = \eta s \cdot \bar{e} = \big(\overline{\Xi}(\eta s)\big)\bar{e} = \big(\mathfrak{h}(\Xi s)\big)\bar{e} \in \overline{\Theta}_{\bar{e}}(\mathfrak{h}\mathfrak{P})$ wegen (2.2)). Ist andererseits $\bar{r} \in \overline{P}$ quasiprimitiv für P, so ist $\bar{r}$ primitiv für $\overline{P}$, und ηP bildet, versehen mit der $\bar{r}$-Multiplikation,

einen Unterhalbring $\overset{\bar{r}}{\cdot}(\eta P)$ von $\overset{\bar{r}}{\cdot}\overline{P}$ (denn aus $\eta s_i = \overline{\Theta}_{\bar{r}}(\mathfrak{h}\sigma_i)$ $(i=1,2)$ folgt $\eta s_1 \overset{\bar{r}}{\cdot} \eta s_2 = \overline{\Theta}_{\bar{r}}(\mathfrak{h}\sigma_1 \circ \mathfrak{h}\sigma_2) = (\mathfrak{h}\sigma_1)(\eta s_2) = \eta(\sigma_1 s_2) \in \eta P$). Mit Hilfe der Bijektion $\eta^{\smile}$ von ηP auf P läßt sich die Multiplikation von $\overset{\bar{r}}{\cdot}(\eta P)$ auf P übertragen; die so erhaltene Multiplikation nennen wir die *$\bar{r}$-Multiplikation von P* und bezeichnen sie ebenfalls mit $\overset{\bar{r}}{\cdot}$. Es gilt also analog zu (2.3) der

(2.5) SATZ. *Die Multiplikationen, die die fraktionsreguläre A-Halbgruppe P zu einem A-Halbring machen, entsprechen eineindeutig den für P quasiprimitiven Elementen $\bar{r} \in \overline{P}$. Für jedes solche $\bar{r}$ ist η eine Injektion von $\overset{\bar{r}}{\cdot}P$ in den A-Halbkörper $\overline{\overset{\bar{r}}{\cdot}P} = \overset{\bar{r}}{\cdot}\overline{P}$.*

Genau dann besitzt $\overset{\bar{r}}{\cdot}P$ ein Einselement r, wenn $\bar{r} = \eta r \in \eta P$ ist; in diesem Falle ist $\overset{\bar{r}}{\cdot}P = \overset{r}{\cdot}P$.

Aus (2.5) folgt insbesondere, daß sich eine symmetrische A-Halbgruppe P sicher nicht zu einem A-Halbring *ohne* Einselement machen läßt (denn η ist eine Bijektion). Dagegen läßt sich die Additionshalbgruppe P eines A-Halbringes $\cdot P$ mit Einselement e, sofern sie fraktionsregulär und nicht symmetrisch ist, stets auch zu einem A-Halbring ohne Einselement machen (denn für $\varrho \in \mathfrak{P}$, $\varrho \notin \mathfrak{Q}$ ist $e/\varrho \in \overline{P}$ quasiprimitiv für P, aber $e/\varrho \notin \eta P$).

In §5 werden wir von dem folgenden Lemma Gebrauch machen:

(2.6) LEMMA. *Es sei φ eine reguläre Injektion von der Halbgruppe P in die Additionshalbgruppe P' des A-Halbringes $\cdot P'$. Dann folgt aus $\varrho_1 r_2 = \varrho_2 r_1$ stets*

$$\varphi(\varrho_1 r_1) \cdot (\varphi r_2)^2 = \varphi(\varrho_2 r_2) \cdot (\varphi r_1)^2 \qquad (r_1, r_2 \in P;\ \varrho_1, \varrho_2 \in \mathfrak{P}).$$

Insbesondere gilt

$$\big(\varphi(\varrho r)\big)^2 = \varphi(\varrho^2 r) \cdot \varphi r \qquad (r \in P;\ \varrho \in \mathfrak{P}).$$

BEWEIS. Es gilt $\varphi(\varrho_1 r_1) \cdot \varphi r_2 = \big((\mathfrak{f}\varrho_1)(\varphi r_1)\big) \cdot \varphi r_2 = \varphi r_1 \cdot \big((\mathfrak{f}\varrho_1)(\varphi r_2)\big) = \varphi r_1 \cdot \varphi(\varrho_1 r_2)$, ebenso $\varphi(\varrho_2 r_2) \cdot \varphi r_1 = \varphi r_2 \cdot \varphi(\varrho_2 r_1)$, wobei $\mathfrak{f}$ die zu φ gehörige Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$ bezeichnet. Aus $\varrho_1 r_2 = \varrho_2 r_1$ folgt daher $\varphi(\varrho_1 r_1) \cdot (\varphi r_2)^2 = \varphi(\varrho_2 r_2) \cdot (\varphi r_1)^2$. — Für $\varrho_1 = \iota$, $\varrho_2 = \varrho$, $r_1 = r$, $r_2 = \varrho r$ ergibt sich $\varphi r \cdot \big(\varphi(\varrho r)\big)^2 = \varphi(\varrho^2 r) \cdot (\varphi r)^2$ und somit $\big(\varphi(\varrho r)\big)^2 = \varphi(\varrho^2 r) \cdot \varphi r$.

§3. Archimedische Halbgruppen

Es sei $A \neq \{0\}$ eine archimedische totalgeordnete (additiv geschriebene)[5] Gruppe. Die Menge aller (strikt) positiven Elemente von A bildet eine Halbgruppe P im Sinne von §1; P ist *regulär*, (d.h. aus $s+r=t+r$ folgt stets $s=t$ $(r, s, t \in P)$) und genügt den folgenden Bedingungen:

3a) *Für jedes Paar $r, s \in P$, $r \neq s$, gilt $r > s$ oder $s > r$;*

3b) *für jedes Paar $r, s \in P$ gibt es ein $n \in \boldsymbol{N}$ mit $nr > s$ (Archimedisches Axiom);*

3c) *es gilt $r > s$ genau dann, wenn $r = s + t$ für ein $t \in P$ ist $(r, s \in P)$.*

[5]) Bekanntlich ist jede archimedische totalgeordnete Gruppe abelsch. Vgl. CARTAN, H.: Un théorème sur les groupes ordonnés. Bull. des Sciences mathém. 2e série **63**, 201–205 (1939).

Ist andererseits P eine den Bedingungen 3a) und 3b) genügende reguläre Halbgruppe, wobei das Zeichen $>$ durch 3c) erklärt ist, so ist P die Unterhalbgruppe aller positiven Elemente einer eindeutig bestimmten archimedischen totalgeordneten Gruppe $A \neq \{0\}$, und die Relation $>$ wird durch die strikte Totalordnung von A induziert (d.h., für $r, s \in P$ ist $r > s$ gleichbedeutend mit $r \geqq s, r \neq s$). Wir nennen in diesem Falle P eine *archimedische Halbgruppe*.

Ist U eine nicht-leere Untermenge einer archimedischen Halbgruppe P, so bildet die Menge aller $r \in P$, die sich in der Form $r = \Sigma_{u \in U} n_u u$ (mit $n_u \in \mathbf{Z}$; $n_u = 0$ für fast alle $u \in U$) schreiben lassen, die kleinste U umfassende archimedische Unterhalbgruppe von P; wir nennen sie *die durch U erzeugte archimedische Halbgruppe*.

Ist $\cdot A \neq \{0\}$ ein archimedischer totalgeordneter Ring (bzw. Körper), so bildet die Menge aller positiven Elemente von $\cdot A$ einen Halbring (bzw. -körper) $\cdot P$, dessen Additionshalbgruppe archimedisch ist. Andererseits ist jeder Halbring (bzw. -körper) $\cdot P$ mit archimedischer Additionshalbgruppe der Unterhalbring (bzw. -körper) aller positiven Elemente eines eindeutig bestimmten archimedischen totalgeordneten Ringes (bzw. Körpers) $\cdot A \neq \{0\}$; wir nennen daher $\cdot P$ einen *archimedischen Halbring* (bzw. *-körper*). Ein eventuell vorhandenes Einselement von $\cdot A$ ist zugleich Einselement von $\cdot P$ und umgekehrt.

Genügt die Halbgruppe P der Bedingung 3a), wobei wieder $>$ durch 3c) erklärt ist, und ist φ ein Homomorphismus von P in eine archimedische Halbgruppe P', so gilt

$$r > s \Leftrightarrow \varphi r > \varphi s \qquad (r, s \in P),$$

φ ist eine Injektion, und P ist ebenfalls archimedisch.

Die Injektionen von P in P' ergeben bei natürlicher Fortsetzung gerade die sämtlichen ordnungserhaltenden (d.h. der Bedingung $a > b \Rightarrow \psi a > \psi b$ $(a, b \in A)$ genügenden[6])) Homomorphismen ψ von A in A', wobei A bzw. A' die zu P bzw. P' gehörige archimedische totalgeordnete Gruppe bezeichnet. In gleicher Weise entsprechen die Injektionen von $\cdot P$ in $\cdot P'$ (archimedische Halbringe bzw. -körper) den ordnungserhaltenden Homomorphismen von $\cdot A$ in $\cdot A'$ (zugehörige archimedische totalgeordnete Ringe bzw. Körper).

Diese Bemerkungen gestatten es, im folgenden ausschließlich mit archimedischen Halbgruppen, -ringen und -körpern zu arbeiten. Wir werden sehen, daß es sich um A-Halbgruppen bzw. A-Halbringe bzw. A-Halbkörper handelt, so daß wir die Ausführungen von §§ 1 bis 2 darauf anwenden können.

Wir haben bereits erwähnt, daß in Verschärfung von 1b) jeder Homomorphismus zwischen archimedischen Halbgruppen P, P' injektiv ist. Wir werden zeigen, daß in Verschärfung von 1c) für je zwei verschiedene Injektionen φ_1, φ_2 von P in P' stets $\varphi_1 r \neq \varphi_2 r$ für alle $r \in P$ gilt (vgl. (3.3)).

[6]) Wegen des Archimedischen Axioms ist diese Bedingung gleichwertig mit:

$$\psi A \neq \{0\}; \qquad a \geqq b \Rightarrow \psi a \geqq \psi b \qquad (a, b \in A).$$

Zu diesem Zwecke bringen wir die Injektionen mit der (im Sinne des 5. Buches von Euklids Elementen definierten) Proportionalitätsrelation in Zusammenhang.

Es seien $P, P', \ldots$ beliebige archimedische Halbgruppen. Für Elementepaare $(r, s) \in P \times P$, $(r', s') \in P' \times P', \ldots$ schreiben wir $(r, s) \asymp (r', s')$ genau dann, wenn

$$kr > ls \Leftrightarrow kr' > ls' \quad (k, l \in \boldsymbol{N})$$

gilt. Man beweist mühelos die Gültigkeit der folgenden Implikationen:

(3.1) a) $(r, s) \asymp (r', s')$, $(r, s) \asymp (r'', s'') \Rightarrow (r', s') \asymp (r'', s'')$;

b) $(r, s_i) \asymp (r', s_i')$ $(i = 1, 2) \Rightarrow (r, s_1 + s_2) \asymp (r', s_1' + s_2')$;

c) $(r, s) \asymp (r', s')$, $(s, t) \asymp (s', t') \Rightarrow (r, t) \asymp (r', t')$;

d) $(r_1, s_1) \asymp (r_2, s_2) \Rightarrow (r_1, r_2) \asymp (s_1, s_2)$;

e) $(r, s_1) \asymp (r, s_2) \Rightarrow s_1 = s_2$.

Aus (3.1 a, b, e) ergibt sich die folgende Charakterisierung der Injektionen:

(3.2) LEMMA. *Für jede Abbildung φ von P in P' sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

α) Es gibt ein $r \in P$ mit $(r, s) \asymp (\varphi r, \varphi s)$ $(s \in P)$;

β) φ ist eine Injektion von P in P';

γ) es gelten $\varphi(ks) = k(\varphi s)$ $(s \in P;\ k \in \boldsymbol{N})$ und $r > s \Rightarrow \varphi r > \varphi s$ $(r, s \in P)$[7]*.*

In diesem Falle gilt α) sogar für jedes $r \in P$.

Daraus folgt weiter, daß jede Injektion φ von P in P' durch Angabe eines einzigen Urbild-Bild-Paares eindeutig bestimmt ist; genauer:

(3.3) KOROLLAR. *Für jedes Paar $r \in P$, $r' \in P'$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

α) Zu jedem $s \in P$ existiert ein $s' \in P'$ mit $(r, s) \asymp (r', s')$;

β) es existiert eine Injektion φ von P in P' mit $\varphi r = r'$.

In diesem Falle ist φ eindeutig bestimmt, nämlich $\varphi s = s'$ $(s \in P)$.

Aus (3.3) folgt insbesondere die bekannte Tatsache, daß zu jeder archimedischen Halbgruppe P und jedem $r \in P$ genau eine Injektion φ von P in $\boldsymbol{R}_+$ mit $\varphi r = 1$ existiert $\left(\text{denn es gilt } (r, s) \asymp \left(1, \inf\left\{\frac{k}{l} \mid k, l \in \boldsymbol{N};\ ls \leqq kr\right\}\right) \text{ für alle } s \in P\right)$.

Die Beschränkung der Relation $\asymp$ auf $P \times P$ ist eine Äquivalenzrelation von $P \times P$. Die durch $(r, s) \in P \times P$ bestimmte Äquivalenzklasse bezeichnen wir mit $r :_P s$ und nennen sie eine *Proportion von P*. Mit $P : P$ bezeichnen wir die Menge aller Proportionen von P.

Wir schreiben $P \tilde{\leqq} P'$, falls eine Injektion von P in P' existiert. (Man beachte, daß für nicht-symmetrische P, P' aus $P \tilde{\leqq} P' \tilde{\leqq} P$ im allgemeinen nicht $P \cong P'$ folgt; vgl. §5, Beispiel 6.) — Aus (3.2) folgt unmittelbar: Im

[7] Auf die Tatsache, daß die Bedingung γ) bereits die Homomorphieeigenschaft von φ impliziert, hat mich Herr W. KRULL aufmerksam gemacht.

Falle $P \tilde{\subseteq} P'$ wird durch die Vorschrift

$$\Pi_{P,P'} r :_P s = r' :_{P'} s' \Leftrightarrow (r, s) \asymp (r', s') \qquad (r, s \in P;\ r', s' \in P')$$

eine eineindeutige Abbildung $\Pi_{P,P'}$ von $P : P$ in $P' : P'$ definiert, und für jede Injektion φ von P in P' gilt

$$\Pi_{P,P'} r :_P s = \varphi r :_{P'} \varphi s \qquad (r, s \in P).$$

Man beachte, daß $\Pi_{P,P'}$ bijektiv sein kann, ohne daß $P \cong P'$ gilt (z.B. ist Π_{N,Q_+} bijektiv).

Die Proportion $r :_P s$ heißt *regulär*, wenn zu jedem $t \in P$ ein $u \in P$ mit $r :_P s = t :_P u$ existiert. Die Menge aller regulären Proportionen von P bezeichnen wir mit $R(P : P)$. Gilt $R(P : P) = P : P$, so heißt P *eudoxisch*. Insbesondere ist die Additionshalbgruppe P jedes archimedischen Halbkörpers $\cdot P$ eudoxisch (denn es gilt $r :_P s = t :_P (s \cdot t \cdot r^{-1})$ für alle $r, s, t \in P$). Für eudoxisches P' folgt aus (3.3) unmittelbar:

(3.4) KOROLLAR. *Es sei $P \tilde{\subseteq} P'$, und P' sei eudoxisch. Dann existiert zu jedem Paar $r \in P$, $r' \in P'$ genau eine Injektion φ von P in P' mit $\varphi r = r'$.*

Die Endomorphismen einer archimedischen Halbgruppe P entsprechen kanonisch eineindeutig den regulären Proportionen von P. In der Tat, aus (3.1 d), (3.2) und (3.3) folgt, daß durch die Vorschrift

$$\Omega_P \sigma = r :_P \sigma r \qquad (\sigma \in \mathfrak{P})$$

eine von der Wahl von $r \in P$ unabhängige eineindeutige Abbildung Ω_P von $\mathfrak{P}$ auf $R(P : P)$ definiert wird. Daraus schließen wir weiter:

(3.5) SATZ. *Der Endomorphismenhalbring $\circ\mathfrak{P}$ einer beliebigen archimedischen Halbgruppe P ist ein kommutativer archimedischer Halbring mit dem Einselement ι.*

BEWEIS. $\circ\mathfrak{P}$ ist kommutativ, denn nach (3.2) und (3.1 d, e) gelten die Gleichungssysteme $r :_P \sigma r = \tau r :_P \tau(\sigma r)$, $\sigma r :_P \sigma(\tau r) = r :_P \tau r = \sigma r :_P \tau(\sigma r)$, $\sigma(\tau r) = \tau(\sigma r)$ $(r \in P;\ \sigma, \tau \in \mathfrak{P})$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{P}$ der Bedingung 3 a) genügt. Es seien $\varrho, \sigma \in \mathfrak{P}$, $\varrho \neq \sigma$, etwa $\varrho r > \sigma r$ für passendes $r \in P$. Nach (3.2) und (3.1 d) gilt $\varrho r :_P \sigma r = \varrho t :_P \sigma t$ und somit $\varrho t > \sigma t$ für jedes $t \in P$, also ist $\varrho = \sigma + \tau$ für ein $\tau \in \mathfrak{P}$. Da Θ_r ein Homomorphismus von $\mathfrak{P}$ in die archimedische Halbgruppe P ist, ist auch $\mathfrak{P}$ archimedisch.

Aus diesem Satz und weiter oben stehenden Bemerkungen folgt unmittelbar:

(3.6) KOROLLAR. *Jede archimedische Halbgruppe ist eine A-Halbgruppe.*

Die Ausführungen von §1 gelten also insbesondere für die archimedischen Halbgruppen, und für diese lassen sie sich, wie wir im folgenden zeigen, noch vereinfachen und verschärfen. — Zunächst beweisen wir:

(3.7) SATZ. *Die Fraktionshalbgruppe $\overline{P}$ einer archimedischen Halbgruppe P ist archimedisch, ebenso jede Zusammenhangskomponente P_μ von P und jede Halbgruppe $\overline{P}_{(\mu)}$.*

BEWEIS. $\overline{P}$ ist regulär, denn aus $s/\sigma + r/\varrho = t/\tau + r/\varrho$ folgt $(\tau \circ \varrho)(\varrho s + \sigma r) = (\sigma \circ \varrho)(\varrho t + \tau r)$ und somit $\tau s = \sigma t$, $s/\sigma = t/\tau$. Ist $r/\varrho \neq s/\sigma$, etwa $\sigma r = \varrho s + t$ für ein $t \in P$, so ist $r/\varrho = s/\sigma + t/(\varrho \circ \sigma)$, also $r/\varrho > s/\sigma$; daher genügt $\overline{P}$ der Bedingung 3a). Für alle $r, s \in P$ und $\varrho, \sigma \in \mathfrak{P}$ gibt es ein $n \in \boldsymbol{N}$ mit $n(\sigma r) > \varrho s$, also ist $n(r/\varrho) > s/\sigma$; daher genügt $\overline{P}$ der Bedingung 3b). Also ist $\overline{P}$ archimedisch. — Für P_μ und $\overline{P}_{(\mu)}$ genügt es, die Gültigkeit von 3a) nachzuweisen. Es seien $r, s \in P_\mu$, etwa $\varrho r = \sigma s$, und es sei $r \neq s$, etwa $r = s + t$ für ein $t \in P$. Dann gilt nach (3.5) $\sigma = \varrho + \tau$ für ein $\tau \in \mathfrak{P}$, und es ist $\tau s = \varrho t$, also $t \in P_\mu$. Es seien $r/\varrho, s/\sigma \in \overline{P}_{(\mu)}$, $r/\varrho \neq s/\sigma$, etwa $\sigma r = \varrho s + t$ für ein $t \in P$. Wegen $\sigma r, \varrho s \in P_\mu$ ist dann auch $t \in P_\mu$, also $r/\varrho = s/\sigma + t/(\varrho \circ \sigma)$ mit $t/(\varrho \circ \sigma) \in \overline{P}_{(\mu)}$.

Dieser Satz zeigt, daß in Lemma (1.3) und Korollar (1.4), angewandt auf archimedische Halbgruppen P, die Forderung „$\overline{P}$ genügt der Bedingung 1c)" trivialerweise erfüllt ist; insbesondere ist also jede zusammenhängende archimedische Halbgruppe fraktionsregulär. Wir werden in §5, Beispiel 12, sehen, daß andererseits auch die „extrem unzusammenhängenden" (nämlich die durch eine über $\cdot\boldsymbol{Q}$ algebraisch unabhängige Untermenge von $\boldsymbol{R}_+$ erzeugten) archimedischen Halbgruppen fraktionsregulär sind.

Wir wollen jetzt die in §1 eingeführten Begriffe „zusammenhängend", „primitiv" und „fraktionsregulär" für archimedische Halbgruppen mit Hilfe der Proportionen erklären. Hierzu bemerken wir, daß $\Pi_{\mathfrak{P},P}, \Pi_{P,\overline{P}}, \Pi_{\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}}$ und $\Pi_{\mathfrak{P},\overline{P}}$ wegen $\mathfrak{P} \tilde{\subseteq} P \tilde{\subseteq} \overline{P}$, $\mathfrak{P} \tilde{\subseteq} \overline{\mathfrak{P}} \tilde{\subseteq} \overline{P}$ definiert sind, und beweisen:

(3.8) LEMMA. a) *Es ist $r \underset{\overline{P}}{\sim} s$ genau dann, wenn $r :_P s \in \Pi_{\mathfrak{P},P}\mathfrak{P} : \mathfrak{P}$ gilt.*

b) *P ist genau dann zusammenhängend, wenn $\Pi_{\mathfrak{P},P}$ bijektiv ist.*

c) *P ist genau dann fraktionsregulär, wenn $\Pi_{\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}}$ bijektiv ist.*

d) *$r \in P$ ist genau dann primitiv für P, wenn $\{r :_P s \mid s \in P\} \subseteq$ (und somit $=$) $R(P:P)$ ist.*

BEWEIS. a) Aus $\varrho r = \sigma s$ folgt $r :_P s = \varrho r :_P \varrho s = \sigma s :_P \varrho s = \Theta_s \sigma :_P \Theta_s \varrho = \Pi_{\mathfrak{P},P} \sigma :_{\mathfrak{P}} \varrho$. Andererseits folgt aus $r :_P s \in \Pi_{\mathfrak{P},P}\mathfrak{P} : \mathfrak{P}$ die Gleichung $r :_P s = \Theta_s \sigma :_P \Theta_s \varrho = \sigma s :_P \varrho s$ für geeignete $\varrho, \sigma \in \mathfrak{P}$, und daraus folgt wegen (3.1d, e) $\sigma(\varrho s) :_P \sigma s = \varrho s :_P s = \sigma s :_P r = \varrho(\sigma s) :_P \varrho r$, $\sigma s = \varrho r$. — b) folgt unmittelbar aus a). — c) Es sei P fraktionsregulär. Für alle $\bar{\varrho}_i = (\mathfrak{h}\sigma_i)^{\smile} \circ \mathfrak{h}\tau_i \in \overline{\mathfrak{P}}$ $(i = 1, 2)$ gilt $\bar{\varrho}_1 :_{\overline{\mathfrak{P}}} \bar{\varrho}_2 = \mathfrak{h}(\sigma_2 \circ \tau_1) :_{\overline{\mathfrak{P}}} \mathfrak{h}(\sigma_1 \circ \tau_2) = \Pi_{\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}}(\sigma_2 \circ \tau_1) :_{\mathfrak{P}} (\sigma_1 \circ \tau_2) \in \Pi_{\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}}\mathfrak{P} : \mathfrak{P}$, also ist $\Pi_{\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}}$ bijektiv. Andererseits sei $\Pi_{\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}}$ bijektiv. Aus $\eta r \underset{\overline{P}}{\sim} \eta s$ folgt nach a) $\eta r :_{\overline{P}} \eta s \in \Pi_{\mathfrak{P},\overline{P}}\overline{\mathfrak{P}} : \overline{\mathfrak{P}}$, also ist nach Voraussetzung $\eta r :_{\overline{P}} \eta s = \Pi_{\mathfrak{P},\overline{P}}(\Pi_{\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}} \varrho :_{\mathfrak{P}} \sigma) = \Pi_{\mathfrak{P},\overline{P}} \varrho :_{\mathfrak{P}} \sigma$ für geeignete $\varrho, \sigma \in \mathfrak{P}$; und wegen $\eta r :_{\overline{P}} \eta s = \Pi_{P,\overline{P}} r :_P s$, $\Pi_{\mathfrak{P},\overline{P}} \varrho :_{\mathfrak{P}} \sigma = \Pi_{P,\overline{P}}(\Pi_{\mathfrak{P},P} \varrho :_{\mathfrak{P}} \sigma)$ folgt daraus weiter $r :_P s = \Pi_{\mathfrak{P},P} \varrho :_{\mathfrak{P}} \sigma$, also $r \underset{\overline{P}}{\sim} s$. Nach (1.3) ist daher P fraktionsregulär. — d) folgt unmittelbar aus $R(P:P) = \{r :_P \Theta_r \sigma \mid \sigma \in \mathfrak{P}\}$.

Wir bemerken noch, daß $\Pi_{P,\overline{P}}$ stets bijektiv ist (denn für alle $r, s \in P$ und $\varrho, \sigma \in \mathfrak{P}$ gilt $r/\varrho :_{\overline{P}} s/\sigma = \eta(\sigma r) :_{\overline{P}} \eta(\varrho s) = \Pi_{P,\overline{P}} \sigma r :_P \varrho s$).

Aus (3.8d) und einer Bemerkung in §1 folgt sofort:

(3.9) KOROLLAR. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

α) *P ist eudoxisch;*

β) *alle $r \in P$ sind primitiv für P;*

γ) *P ist symmetrisch und zusammenhängend.*

Als nächstes zeigen wir, daß man für archimedische Halbgruppen den Begriff der „regulären Injektion" durch den der „regulären Einbettbarkeit" ersetzen kann.

Wir sagen, daß P *regulär einbettbar in* P' ist, in Zeichen $P \lessdot P'$, wenn $P \tilde{\leqq} P'$ und $\Pi_{P,P'} R(P:P) \leqq R(P':P')$ gelten; in diesem Falle ist die Abbildung

$$\mathfrak{e}_{P,P'} = \Omega_{P'}^{\vdash} \circ \Pi_{P,P'} \circ \Omega_P$$

von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}'$ definiert. Wir bemerken, daß $P \lessdot P'$ in jedem der folgenden Fälle gilt: a) $P \cong P'$; b) $R(P:P) = \{r :_P k r \mid k \in \mathbf{N}\}$; c) P' ist eudoxisch; d) es existieren eine Injektion φ von P in P' und ein $r \in P$ derart, daß φr primitiv für P' ist. — Insbesondere gilt stets $\mathfrak{P} \lessdot P$ (denn für jedes $\sigma \in \mathfrak{P}$ ist $\Pi_{\mathfrak{P},P} \iota :_{\mathfrak{P}} \sigma = \Theta_{r,\iota} :_P \Theta_{r,\sigma} = r :_P \sigma r$ regulär).

(3.10) LEMMA. *Für archimedische Halbgruppen P, P' sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

α) *Es gibt eine Injektion φ von P in P', eine Abbildung $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}'$ und ein $r \in P$ derart, daß $\varphi(\sigma r) = (\mathfrak{f}\sigma)(\varphi r)$ $(\sigma \in \mathfrak{P})$ gilt;*

β) *es gilt $P \lessdot P'$;*

γ) *es gilt $P \tilde{\leqq} P'$, und alle Injektionen von P in P' sind regulär.*

In diesem Falle gehört zu jeder Injektion φ von P in P' dieselbe Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$, nämlich $\mathfrak{f} = \mathfrak{e}_{P,P'}$.

BEWEIS. γ) ⇒ α) ist trivial. — α) ⇒ β): Für jedes $\sigma \in \mathfrak{P}$ ist $\Pi_{P,P'} r :_P \sigma r = \varphi r :_{P'} \varphi(\sigma r) = \varphi r :_{P'} (\mathfrak{f}\sigma)(\varphi r)$ regulär, also gilt $P \lessdot P'$. — β) ⇒ γ): Für jede Injektion φ von P in P' gilt $\varphi \circ \sigma = (\mathfrak{e}_{P,P'}\sigma) \circ \varphi$ wegen $\varphi r :_{P'} \varphi(\sigma r) = \Pi_{P,P'} r :_P \sigma r = (\Pi_{P,P'} \circ \Omega_P)\sigma = (\Omega_{P'} \circ \mathfrak{e}_{P,P'})\sigma = \varphi r :_{P'} (\mathfrak{e}_{P,P'}\sigma)(\varphi r)$ $(r \in P;\ \sigma \in \mathfrak{P})$. Ersichtlich ist $\mathfrak{e}_{P,P'}$ eine Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$, und die in α) betrachtete Abbildung $\mathfrak{f}$ ist notwendig gleich $\mathfrak{e}_{P,P'}$.

Aus (3.10) und einer Bemerkung in §1 folgt insbesondere: Für die Zusammenhangskomponente P_μ von P gilt $P_\mu \lessdot P$ genau dann, wenn jeder Endomorphismus von P_μ durch einen Endomorphismus von P induziert wird. Gilt $P_\mu \lessdot P$ für eine symmetrische Zusammenhangskomponente P_μ, so ist P selbst symmetrisch. Ist andererseits P symmetrisch, so ist jede Zusammenhangskomponente P_μ eudoxisch und regulär einbettbar in P.

Ferner liefern (1.1) und (1.2) für archimedische Halbgruppen P, P' die folgenden Korollare:

(3.11) KOROLLAR. *Es sei $P \lessdot P'$. Dann gilt $\overline{P} \tilde{\leqq} \overline{P'}$, und zu jeder Injektion φ von P in P' gibt es genau eine Injektion $\overline{\varphi}$ von $\overline{P}$ in $\overline{P'}$ mit $\eta' \circ \varphi = \overline{\varphi} \circ \eta$.*

Ist P fraktionsregulär, so gilt $\overline{P} \lessdot \overline{P}'$.

(3.12) KOROLLAR. *Es sei $P \lessdot P'$, und P' sei symmetrisch. Dann gilt $\overline{P} \tilde{\subseteq} P'$, und zu jeder Injektion φ von P in P' gibt es genau eine Injektion $\bar{\varphi}$ von $\overline{P}$ in P' mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \eta$.*

Ist P fraktionsregulär, so gilt $\overline{P} \lessdot P'$.

Wir werden in §5, Beispiele 7 und 9, sehen, daß sich die Aussagen dieser Korollare nicht weiter verschärfen lassen.

Eine archimedische Halbgruppe P^* soll *symmetrische* bzw. *eudoxische Hülle von P* heißen, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

A) *Es gilt $P \lessdot P^*$;*

B) *P^* ist symmetrisch bzw. eudoxisch;*

C) *ist P' symmetrisch bzw. eudoxisch und $P \lessdot P'$, so gilt $P^* \tilde{\subseteq} P'$* [8]).

Aus (3.9) und einer Bemerkung in §1 ergibt sich: Die symmetrische bzw. eudoxische Hülle von P (sofern eine solche existiert) ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Ist P^s bzw. P^e eine symmetrische bzw. eudoxische Hülle von P, so gilt $P^s \lessdot P^e$, und es ist $P^s \cong P^e$ genau dann, wenn P^s zusammenhängend ist. Aus (3.12) folgt, daß $\overline{P}$ sicher dann eine symmetrische Hülle von P ist, wenn $\overline{P}$ symmetrisch ist; insbesondere gilt:

(3.13) SATZ. *Ist P fraktionsregulär, so ist $\overline{P}$ eine symmetrische Hülle von P, die in Verschärfung von* C) *der folgenden Bedingung genügt:*

C') *Ist P' symmetrisch und $P \lessdot P'$, so ist $\overline{P} \lessdot P'$.*

Für fraktionsreguläres P ist also η *universell* hinsichtlich der regulären Injektionen von P in symmetrische Halbgruppen. Ersichtlich hat auch jede Injektion von P in eine beliebige symmetrische Hülle von P diese Eigenschaft.

Aus (3.13) und (1.4) folgt sofort das

(3.14) KOROLLAR. *Ist P zusammenhängend, so ist $\overline{P}$ eine symmetrische und eudoxische Hülle von P.*

Für nicht-fraktionsreguläre P läßt sich über die Fraktionshalbgruppe $\overline{P}$ von P keine allgemeingültige Aussage machen (vgl. §5, Beispiele 8 und 10). Wir wissen auch nicht, ob zu jeder nicht-fraktionsregulären archimedischen Halbgruppe eine symmetrische Hülle existiert. Dagegen wollen wir noch zeigen, daß jede archimedische Halbgruppe eine eudoxische Hülle besitzt.

Zunächst setzen wir die Existenz einer eudoxischen Hülle P^* von P voraus und beweisen: Jede Injektion von P in P^* ist universell hinsichtlich der Injektionen von P in eudoxische Halbgruppen. Jede eudoxische Oberhalbgruppe von P enthält genau eine P umfassende eudoxische Hülle von P. In der Tat, es gilt das

[8]) Man beachte, daß man für die Definition der *eudoxischen* Hülle die Zeichen $\tilde{\subseteq}$, $\lessdot$ nicht zu unterscheiden braucht. (Für den symmetrischen Fall vgl. dagegen §5, Beispiel 9.)

(3.15) LEMMA. *Es sei $\varkappa$ eine Injektion von P in eine eudoxische Hülle P^* von P. Zu jeder Injektion φ von P in irgendeine eudoxische Halbgruppe P' existiert genau eine Injektion φ^* von P^* in P' mit $\varphi = \varphi^* \circ \varkappa$.*

$\varphi^* P^*$ ist die einzige zu der Menge $E_\varphi = \{P'' \mid \varphi P \subseteqq P'' \subseteqq P',\ P''$ eudoxisch$\}$ gehörige eudoxische Hülle von P, und es ist $\varphi^* P^* = \bigcap_{P'' \in E_\varphi} P''$.

BEWEIS. Es sei $r \in P$. Wegen $P^* \tilde{\subseteqq} P'$ existiert nach (3.4) genau eine Injektion φ^* von P^* in P' mit $\varphi^*(\varkappa r) = \varphi r$; nach (3.2) gilt $(\varphi r, \varphi s) \asymp (r, s) \asymp \big(\varphi^*(\varkappa r), \varphi^*(\varkappa s)\big)$ für alle $s \in P$, also ist $\varphi = \varphi^* \circ \varkappa$ wegen (3.1e). Aus der Eindeutigkeit von φ^* folgt $\varphi^* P^* \subseteqq P''$ für jedes $P'' \in E_\varphi$; andererseits ist $\varphi^* P^* \in E_\varphi$, also $\varphi^* P^* = \bigcap_{P'' \in E_\varphi} P''$. Genau dann ist $P'' \in E_\varphi$ eine eudoxische Hülle von P, wenn $P^* \tilde{\subseteqq} P'' \tilde{\subseteqq} P^*$ gilt, und dies trifft genau dann zu, wenn φ^* eine Bijektion von P^* auf P'', d.h. wenn $P'' = \varphi^* P^*$ ist.

Wir zeigen nun:

(3.16) SATZ. *Jede archimedische Halbgruppe besitzt eine eudoxische Hülle.*

BEWEIS. Es sei $r_0 \in P$, und $\varkappa$ sei die durch $\varkappa r_0 = 1$ bestimmte Injektion von P in $\boldsymbol{R}_+$. Ferner sei $P_1 = \varkappa P$, und P_{n+1} sei die durch die Menge $\{u \in \boldsymbol{R}_+ \mid (r, s) \asymp (t, u)$ für passende $r, s, t \in P_n\}$ erzeugte archimedische Halbgruppe $(n \in \boldsymbol{N})$. Dann gilt $P_1 \subseteqq P_2 \subseteqq P_3 \subseteqq \cdots$, und die Vereinigung $\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} P_n$ bildet ersichtlich eine eudoxische Halbgruppe P^*. Um zu zeigen, daß P^* eine eudoxische Hülle von P ist, betrachten wir eine Injektion φ von P in irgendein eudoxisches P' und bezeichnen mit λ die durch $\lambda(\varphi r_0) = 1$ bestimmte Injektion von P' in $\boldsymbol{R}_+$. Aus $(1, \varkappa s) \asymp (r_0, s) \asymp \big(1, \lambda(\varphi s)\big)$ $(s \in P)$ folgt $\varkappa = \lambda \circ \varphi$ und somit $P_1 \subseteqq \lambda P'$. Angenommen, es sei bereits $P_n \subseteqq \lambda P'$ bewiesen. Ist $u \in \boldsymbol{R}_+$ und $(r, s) \asymp (t, u)$ für geeignete $r, s, t \in P_n$, so gilt $u \in \lambda P'$, weil $\lambda P'$ eudoxisch ist; daraus folgt sofort $P_{n+1} \subseteqq \lambda P'$. Also gilt auch $P^* \subseteqq \lambda P'$ und somit $P^* \tilde{\subseteqq} P'$. Daher ist P^* eine eudoxische Hülle von P. Wir bemerken noch, daß P^* gleich der Additionshalbgruppe des kleinsten P enthaltenden Unterhalbkörpers von $\cdot\boldsymbol{R}_+$ ist (vgl. (2.4)).

Im Gegensatz zu der Bildung der Fraktionshalbgruppe $\overline{P}$ ist die im vorstehenden Beweis ausgeführte Konstruktion der eudoxischen Hülle P^* von P kein algebraischer Prozeß, denn es wird dabei von der Existenz der archimedischen Halbgruppe $\boldsymbol{R}_+$ Gebrauch gemacht, die sich aus P nicht auf algebraischem Wege gewinnen läßt. Auch wenn man den Konstruktionsprozeß so abändert, daß man anstelle von $\boldsymbol{R}_+$ eine beliebige eudoxische Halbgruppe P' mit $P \tilde{\subseteqq} P'$ (und für $\varkappa$ eine beliebige Injektion von P in P') verwendet, so bleibt immer noch die Frage offen, ob und wie man ein solches P' durch einen algebraischen Prozeß aus P gewinnen kann.

Aus (3.15) und (3.16) erhält man noch die folgende Charakterisierung der eudoxischen Hüllen:

(3.17) KOROLLAR. *Es sei $P \tilde{\subseteqq} P'$, und P' sei eudoxisch. Genau dann ist P' eine eudoxische Hülle von P, wenn keine eudoxische Halbgruppe P'' mit $P \tilde{\subseteqq} P'' \subset P'$ existiert.*

§ 4. Archimedische Halbringe

Jeder archimedische Halbring $\cdot P$ ist ein A-Halbring (denn seine Additionshalbgruppe P ist eine A-Halbgruppe und Ξ ist injektiv); daher lassen sich die Ausführungen von § 2 auf archimedische Halbringe anwenden. Wir wollen sie in einigen Punkten ergänzen.

Zunächst bemerken wir, daß für jeden archimedischen Halbring $\cdot P$ stets

$$\tau_1 :_P s_1 = \tau_2 :_P s_2 \Leftrightarrow \tau_1 \cdot s_2 = \tau_2 \cdot s_1 \qquad (\tau_i, s_i \in P)$$

gilt. Ferner gilt neben $\mathfrak{P} \lessdot P$ auch $P \lessdot \mathfrak{P}$ (denn Ξ ist eine Injektion von P in $\mathfrak{P}$, und für jedes $\sigma \in \mathfrak{P}$ ist $\Pi_{P,\mathfrak{P}}\tau :_P \sigma\tau = \Xi\tau :_{\mathfrak{P}} \Xi(\sigma\tau) = \Xi\tau :_{\mathfrak{P}} (\sigma \circ \Xi\tau)$ eine reguläre Proportion von $\mathfrak{P}$).

In Lemma (2.2), angewandt auf archimedische Halbringe $\cdot P$ mit Einselement, braucht die Regularität der Injektion φ nicht vorausgesetzt zu werden, sondern sie folgt vielmehr aus jeder der beiden Bedingungen α) und γ); d.h., es gilt das folgende

(4.1) KOROLLAR. *Es seien $\cdot P, \cdot P'$ archimedische Halbringe, $\cdot P$ besitze ein Einselement e, und φ sei eine Injektion von P in P'. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

α) *φ ist eine Injektion von $\cdot P$ in $\cdot P'$;*

β) *es gelten $P \lessdot P'$ und $\varepsilon_{P,P'} \circ \Xi = \Xi' \circ \varphi$;*

γ) *φe ist Einselement von $\cdot P'$.*

Zum Beweis beachte man: Ist φe Einselement von $\cdot P'$, so ist φe primitiv für P' wegen (2.1), und nach einer Bemerkung von § 3 gilt daher $P \lessdot P'$. Der weitere Beweis verläuft genauso wie der von (2.2), unter Berücksichtigung von (3.10).

Aus (4.1) folgt insbesondere: Zu zwei vorgegebenen archimedischen Halbringen $\cdot P, \cdot P'$ mit Einselement existiert höchstens eine Injektion von $\cdot P$ in $\cdot P'$, und diese ist notwendig regulär. Die erstere Behauptung gilt auch für archimedische Halbringe $\cdot P, \cdot P'$ ohne Einselement; sind nämlich φ_1, φ_2 Injektionen von $\cdot P$ in $\cdot P'$, so gilt $\eta' \circ \varphi_i = \overline{\varphi} \circ \eta$ $(i = 1, 2)$ für eine eindeutig bestimmte Injektion $\overline{\varphi}$ von $\cdot \overline{P}$ in $\cdot \overline{P'}$, und daraus folgt $\varphi_1 = \varphi_2$. Dagegen folgt aus der Existenz einer Injektion von $\cdot P$ in $\cdot P'$ im allgemeinen nicht $P \lessdot P'$ (vgl. § 5, Beispiel 4).

Weiter bemerken wir, daß man, bei Anwendung auf archimedische Halbgruppen P, in (2.4) die Worte „symmetrisch und zusammenhängend" durch „eudoxisch" ersetzen und in den darauffolgenden Ausführungen auf die Voraussetzung der Fraktionsregularität von P verzichten kann (denn die Additionshalbgruppe eines archimedischen Halbringes ist stets eine zusammenhängende archimedische Halbgruppe und daher fraktionsregulär).

Aus einer Bemerkung von § 2 folgt, daß jede nicht-eudoxische Halbgruppe, die sich zu einem archimedischen Halbring mit Einselement machen läßt, auch zu einem solchen ohne Einselement gemacht werden kann. In § 5,

Beispiel 6, werden wir zeigen, daß es archimedische Halbgruppen gibt, die sich zu einem archimedischen Halbring ohne Einselement, aber zu keinem mit Einselement machen lassen. Daß es zusammenhängende archimedische Halbgruppen gibt, die überhaupt nicht zu einem archimedischen Halbring gemacht werden können, zeigt §5, Beispiel 5. Ist jedoch P zusammenhängend und *endlicherzeugt* (d.h. existiert eine endliche Untermenge U von P derart, daß P gleich der durch U erzeugten archimedischen Halbgruppe ist), so läßt sich P stets zu einem archimedischen Halbring machen, denn es gilt das folgende

(4.2) LEMMA. *Es sei P eine zusammenhängende und endlicherzeugte archimedische Halbgruppe. Zu jedem $s\in P$ gibt es ein $\sigma\in\mathfrak{P}$ derart, daß s/σ quasiprimitiv für P ist.*

BEWEIS. P sei durch $\{r_1,\dots,r_k\}<P$ erzeugt, und es seien $\varrho_i,\sigma_i\in\mathfrak{P}$ so gewählt, daß $\sigma_i r_i=\varrho_i s$ $(i=1,\dots,k)$ gilt; ferner sei $\sigma=\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_k$ und $\tau_i=\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_{i-1}\circ\varrho_i\circ\sigma_{i+1}\circ\cdots\circ\sigma_k$ $(i=1,\dots,k)$. Für jedes $t\in P$ gilt eine Gleichung $t=\sum_{i=1,\dots,k} m_i r_i$ mit passenden $m_i\in\mathbf{Z}$, und es ist $\sigma t=\sum_{i=1,\dots,k} m_i(\sigma r_i)=\sum_{i=1,\dots,k} m_i(\tau_i s)=\tau s$ für $\tau=\sum_{i=1,\dots,k} m_i\tau_i\in\mathfrak{P}$. Also ist s/σ quasiprimitiv für P.

Schließlich bemerken wir noch, daß man in Lemma (2.6), angewandt auf archimedische Halbringe $\cdot P'$, auf die Forderung der Regularität von φ verzichten kann. In der Tat, ist φ eine beliebige Injektion von P in P', so ist $\hat{\varphi}=\eta'\circ\varphi$ eine notwendig reguläre Injektion von P in die (eudoxische) Additionshalbgruppe $\overline{P'}$ des archimedischen Halbkörpers $\cdot\overline{P'}$, und es gilt daher (2.6) zunächst für $\hat{\varphi}$ anstelle von φ. Da η' eine Injektion von $\cdot P'$ in $\cdot\overline{P'}$ ist, folgt daraus sofort die Gültigkeit von (2.6) für φ selbst.

§5. Ergänzungen und Beispiele

(1) Es sei P eine archimedische Halbgruppe. Die Menge $P:P$ aller Proportionen von P bildet hinsichtlich der durch die Vorschrift

$$(r:_P s)+(r:_P t)=r:_P(s+t)\quad\text{bzw.}\quad(r:_P s)\cdot(s:_P t)=r:_P t$$

definierten Addition und Multiplikation und der durch die Vorschrift

$$r_1:_P s_1>r_2:_P s_2\Leftrightarrow[k r_1\leqq l s_1\ \textit{und}\ k r_2>l s_2\ \textit{für geeignete}\ k,l\in\mathbf{N}]$$

definierten (strikten) Totalordnung einen *archimedischen Pseudohalbkörper*[9]) mit dem Einselement $r:_P r$ (unabhängig von der Wahl von $r\in P$). Für $P\subsetneqq P'$ ist $\Pi_{P,P'}$ eine (ordnungserhaltende) Injektion von $P:P$ in $P':P'$; insbesondere ist $\Pi_{P,\bar{P}}$ eine Bijektion von $P:P$ auf $\bar{P}:\bar{P}$. (Man beachte, daß zu $\bar{r}_1,\bar{r}_2,\bar{r}_3\in\bar{P}$ stets $r_1,r_2,r_3\in P$ mit $(r_i,r_j)\asymp(\bar{r}_i,\bar{r}_j)$ $(i,j=1,2,3)$ existieren.)

[9]) „Pseudo-" bedeutet hier: Die Addition und die Multiplikation sind nicht notwendig auf ganz $P:P$ definiert, und die Bedingung 3c) ist zu ersetzen durch: 3c′) $\mathfrak{r}>\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}\rightsquigarrow\mathfrak{s}\Leftrightarrow\mathfrak{r}=\mathfrak{s}+\mathfrak{t}$ *für passendes* $\mathfrak{t}\in P:P$ $(\mathfrak{r},\mathfrak{s}\in P:P)$. (Hierbei schreiben wir $\mathfrak{r}\rightsquigarrow\mathfrak{s}$ genau dann, wenn $\mathfrak{r}=t:_P r$, $\mathfrak{s}=t:_P s$ für geeignete $r,s,t\in P$ gilt.)

Die Abbildung Ω_P ist eine Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in den Pseudohalbkörper $P:P$; genau dann ist Ω_P eine Bijektion, wenn P eudoxisch ist. Für jedes $r \in P$ ist $\Omega_P = \mathsf{H}_r \circ \Theta_r$, wobei H_r die durch die Vorschrift

$$\mathsf{H}_r s = r :_P s \qquad (s \in P)$$

definierte Injektion von P in die Additions-Pseudohalbgruppe von $P:P$ bezeichnet. Ist $r \in P$ primitiv für P, so ist H_r eine Injektion von $^r P$ in $P:P$.

Für jedes P läßt sich der Pseudohalbkörper $P:P$ kanonisch in den Halbkörper $\cdot\boldsymbol{R}_+$ einbetten. In der Tat, bezeichnet H_1 die durch $\mathsf{H}_1 s = 1 :_{\boldsymbol{R}_+} s$ $(s \in \boldsymbol{R}_+)$ bestimmte Bijektion von $\cdot\boldsymbol{R}_+$ auf $\boldsymbol{R}_+ : \boldsymbol{R}_+$, so ist $\mathsf{H}_1^{-} \circ \Pi_{P, \boldsymbol{R}_+}$ eine Injektion von $P:P$ in $\cdot\boldsymbol{R}^+$.

Ist P zusammenhängend, so sind Addition und Multiplikation auf ganz $P:P$ definiert, und $P:P$ bildet einen archimedischen Halbkörper. Seine Additionshalbgruppe ist eine eudoxische Hülle von P.

(2) Es sei P eine archimedische Halbgruppe und $r \in P$. Für jeden das Einselement ι enthaltenden archimedischen Unterhalbring $\mathfrak{R}$ von $\circ\mathfrak{P}$ ist $P' = \Theta_r \mathfrak{R}$ eine archimedische Unterhalbgruppe von P mit den Eigenschaften: r ist primitiv für P' und $P' \lessdot P$. Andererseits ist jede diesen Bedingungen genügende archimedische Unterhalbgruppe P' von P von der Form $P' = \Theta_r \mathfrak{R}$ für passendes $\mathfrak{R}$. — Daß ein Element $r \in P$ auch primitiv für eine archimedische Unterhalbgruppe P'' von P mit $P'' \ll P$ sein kann, zeigt das folgende Beispiel: Es sei P die durch $\boldsymbol{Q}_+ \cup \{t\}$ erzeugte archimedische Halbgruppe, wobei $t \in \boldsymbol{R}_+$ transzendent über $\cdot\boldsymbol{Q}$ ist; dann ist jedes $q \in \boldsymbol{Q}_+$ primitiv für $\boldsymbol{Q}_+$, aber es ist $\boldsymbol{Q}_+ \ll P$.

(3) Die Unterhalbgruppe P' der A-Halbgruppe P heißt *normal* in P, wenn $\varrho P' \subseteqq P'$ für alle $\varrho \in \mathfrak{P}$ gilt; in diesem Falle ist die Abbildung, die jedem $\varrho \in \mathfrak{P}$ seine Beschränkung auf P' zuordnet, eine Injektion von $\circ\mathfrak{P}$ in $\circ\mathfrak{P}'$. Insbesondere ist jede Zusammenhangskomponente P_μ von P normal in P. Ist P' normal in P und in einer Zusammenhangskomponente von P enthalten, so ist P' zusammenhängend. — Es sei P' eine zusammenhängende archimedische Unterhalbgruppe von $\boldsymbol{R}_+$ mit $1 \in P'$ und $\boldsymbol{Q}_+ \not\subseteqq P'$ (z.B. $P' = \boldsymbol{Q}[u]_+$ für ein $u \in \boldsymbol{R}_+$, $u \notin \boldsymbol{Q}_+$). Ferner sei $x \in \boldsymbol{R}_+$ transzendent über $\cdot\boldsymbol{Q}(P')$, und P sei die durch $P' \cup \{x\}$ erzeugte archimedische Halbgruppe. Dann ist $\mathfrak{P} = \{n\iota \mid n \in \boldsymbol{N}\}$ (denn für jedes $\varrho \in \mathfrak{P}$ gelten $1 :_P \varrho 1 = x :_P \varrho x$, $\varrho x = x \cdot \varrho 1$ und somit $\varrho 1 \in \boldsymbol{N}$), P' ist normal in P, aber P' ist in keiner Zusammenhangskomponente von P enthalten.

(4) Es sei $\{x, y, z\} \subset \boldsymbol{R}_+$ algebraisch unabhängig über $\cdot\boldsymbol{Q}$, und $\cdot P$ bzw. $\cdot P'$ sei der durch $S = \{y^i \cdot z^{j-1} \mid i, j \in \boldsymbol{N}\}$ bzw. $S \cup \{x\}$ erzeugte archimedische Unterhalbring (ohne Einselement) von $\cdot\boldsymbol{R}_+$. Dann existiert eine Injektion von $\cdot P$ in $\cdot P'$ (nämlich die identische), aber es gilt $P \not\ll P'$. In der Tat $y :_P y \cdot z$ ist regulär, dagegen nicht $y :_{P'} y \cdot z$, denn aus $y :_{P'} y \cdot z = x :_{P'} t$ folgte $t = x \cdot z \notin P'$.

(5) Es sei U eine unendliche Menge von Primzahlen, und P sei die durch $\{p^{-1} \mid p \in U\}$ erzeugte archimedische Halbgruppe. Dann ist P zusammenhängend, läßt sich aber auf keine Weise zu einem archimedischen Halbring

machen. (Zum Beweis beachte man: Es sei v_p die p-adische Bewertung von $\cdot\mathbf{Q}$; dann gilt $v_p r \geqq -1$ für alle $r \in P$, und für jede hinsichtlich der Addition distributive Multiplikation $\odot$ von P gilt daher $v_p(1 \odot 1) = v_p\left(p^2 \cdot (p^{-1} \odot p^{-1})\right) = v_p(p^2) + v_p(p^{-1} \odot p^{-1}) \geqq 1$ $(p \in U)$; also ist $1 \odot 1 = 0 \notin P$.)

(6) Es sei $\{u, v\} \subset \boldsymbol{R}_+$ algebraisch unabhängig über $\cdot\mathbf{Q}$. Die archimedische Halbgruppe $P = (\mathbf{Q}[u, v] \cdot u + \mathbf{Q}[u, v] \cdot v)_+$ bildet hinsichtlich der natürlichen Multiplikation einen archimedischen Halbring ohne Einselement, läßt sich aber auf keine Weise zu einem archimedischen Halbring mit Einselement machen. (Gäbe es nämlich ein für P primitives $r \in P$, so hätten wir $u \overset{r}{\cdot} u = u^2 \cdot r^{-1}$, $v \overset{r}{\cdot} v = v^2 \cdot r^{-1}$, was unmöglich ist.) Insbesondere ist also $P \ncong \mathfrak{P}$, obwohl $P \lessdot \mathfrak{P} \lessdot P$ gilt.

(7) Es sei $\{u, v\}$ wie in (6), $P = \mathbf{Q}[u]_+$, $P' = (\mathbf{Q}[u] + \mathbf{Q} \cdot v)_+$. Dann ist P' symmetrisch und $P \subseteqq P'$, aber $\overline{P} \cong \mathbf{Q}(u)_+ \nsubseteqq P'$.

(8) Es sei $u \in \boldsymbol{R}_+$ algebraisch vom Grad $m > 1$ oder transzendent über $\cdot\mathbf{Q}$ (im letzteren Fall setzen wir $m = \infty$), und es sei P die durch $\mathbf{Q}_+ \cup \{u^i \mid 1 \leqq i < m\}$ erzeugte archimedische Halbgruppe. Dann ist $\mathfrak{P} = \{n\iota \mid n \in \boldsymbol{N}\}$, $\mathbf{Q}_+$ ist eine Zusammenhangskomponente von P, $\mathbf{Q}_+ \lessdot P$, und $\overline{P}$ ist isomorph zu $\mathbf{Q}[u]_+$ und somit zusammenhängend. P ist nicht fraktionsregulär, denn es gilt $(\mathfrak{h}\mathfrak{P})^{\llcorner} \circ \mathfrak{h}\mathfrak{P} \subset \overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{P}}$ bzw. $(\mathfrak{h}\mathfrak{P})^{\llcorner} \circ \mathfrak{h}\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{Q}} \subset \overline{\mathfrak{P}}$ im Falle $m < \infty$ bzw. $m = \infty$; im ersteren Falle ist $\overline{P}$ eudoxisch, im letzteren ist $\overline{P}$ unsymmetrisch.

(9) Es seien u, P wie in (8), und $v \in \boldsymbol{R}_+$ sei transzendent über $\cdot\mathbf{Q}(u)$. Dann ist $P' = (\mathbf{Q}[u] + \mathbf{Q} \cdot v)_+$ symmetrisch, und es gelten $P \lessdot P'$, $\overline{P} \subsetneqq P'$. Es ist aber $\overline{P} \not\lessdot P'$ (denn $\eta 1 :_{\overline{P}} \eta u$ ist regulär, dagegen nicht $1 :_{P'} u$).

(10) Es seien u, v wie in (9), und es sei P die durch $\mathbf{Q}_+ \cup \{u^i \mid 1 \leqq i < m\} \cup \{u^i \cdot v \mid 0 \leqq i < m\}$ erzeugte archimedische Halbgruppe. Dann ist $\mathfrak{P} = \{n\iota \mid n \in \boldsymbol{N}\}$, $\overline{P}$ ist isomorph zu $P' = (\mathbf{Q}[u] + \mathbf{Q}[u] \cdot v)_+$, und wegen $(\mathfrak{h}\mathfrak{P})^{\llcorner} \circ \mathfrak{h}\mathfrak{P} \subset \overline{\mathfrak{P}}$ ist P nicht fraktionsregulär. P' ist unzusammenhängend (denn anderenfalls wäre $1 \underset{P'}{\sim} v$, und daraus folgte nach (2.6) $x = x \cdot 1^2 = y \cdot v^2$ für passende $x, y \in P'$), und P' ist genau dann symmetrisch, wenn $m < \infty$ (d.h. wenn u algebraisch über $\cdot\mathbf{Q}$) ist; dasselbe gilt für $\overline{P}$.

(11) Unter einem *Operatorenhalbring* bzw. einem *vollen Operatorenhalbring* einer archimedischen Halbgruppe P verstehen wir einen archimedischen Halbring Λ derart, daß eine Injektion bzw. Bijektion ξ von Λ in bzw. auf $\circ\mathfrak{P}$ existiert. — Ist $\cdot P'$ ein archimedischer Halbring mit dem Einselement e' und ist $P \lessdot P'$, so wird $\circ\mathfrak{P}$ durch $\Theta'_{e'} \circ \mathfrak{e}_{P, P'}$ auf einen vollen Operatorenhalbring Λ von P abgebildet, und Λ ist der größte in $\cdot P'$ enthaltene Operatorenhalbring von P. Besitzt auch $\overline{P}$ einen vollen Operatorenhalbring $\bar{\Lambda} \subseteqq \cdot P'$, so enthält $\bar{\Lambda}$ den Quotientenkörper $\frac{\Lambda}{\Lambda}$ von Λ, und es gilt $\frac{\Lambda}{\Lambda} = \bar{\Lambda}$ genau dann, wenn P fraktionsregulär ist.

(12) Es sei $\cdot P'$ ein archimedischer Halbring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung, und E' sei die Menge aller Einheiten von $\cdot P'$. Ferner sei P eine archimedische Halbgruppe und φ eine Injektion von P in P'. Mit Hilfe von (2.6)

zeigt man: a) Existiert ein $r \in P$ derart, daß φr quadratfrei in $\cdot P'$ ist, so gilt $P \lessdot P'$. b) Ist φr, für jedes $r \in P$, quadratfrei in $\cdot P'$ und enthält $\cdot P'$ einen Operatorenhalbring Λ^0 von P mit $E' \subseteqq \frac{\Lambda^0}{\Lambda^0}$, so ist auch $\overline{P} \lessdot P'$, und es gilt $E' = \frac{\Lambda^0}{\Lambda^0} = \frac{\Lambda}{\Lambda} = \bar{\Lambda}$ (wobei Λ bzw. $\bar{\Lambda}$ den in $\cdot P'$ enthaltenen vollen Operatorenhalbring von P bzw. $\overline{P}$ bezeichnet); insbesondere ist dann P fraktionsregulär. — Die in b) gemachte Voraussetzung über die Existenz von Λ^0 ist trivial im Falle $E' = \boldsymbol{Q}_+$, denn P besitzt stets den Operatorenhalbring $\Lambda^0 = \boldsymbol{N}$, und es ist $\boldsymbol{Q}_+ = \frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{N}}$. Die *beiden* in b) gemachten Voraussetzungen sind sicher dann erfüllt, wenn P durch eine über $\cdot \boldsymbol{Q}$ algebraisch unabhängige Untermenge U von $\boldsymbol{R}_+$ erzeugt ist (denn dann ist jedes $u \in U$ sogar prim in $\cdot P' = \cdot \boldsymbol{Q}[U]_+$, und $E' = \boldsymbol{Q}_+$). In diesem Falle gelten $\circ\mathfrak{P} \cong \cdot \boldsymbol{N}$, $\circ\overline{\mathfrak{P}} \cong \cdot \boldsymbol{Q}_+$, und alle Zusammenhangskomponenten von P bzw. $\overline{P}$ sind von der Form $\boldsymbol{N} \cdot \sum_{u \in U} n_u u$ bzw. $\boldsymbol{Q} \cdot \left(\sum_{u \in U} n_u u \right)$ (für geeignete $n_u \in \boldsymbol{Z}$; $n_u = 0$ für fast alle $u \in U$). Besteht U aus mehr als einem Element, so besitzen P und $\overline{P}$ unendlich viele Zusammenhangskomponenten, und diese sind sämtlich isomorph zu $\boldsymbol{N}$ bzw. $\boldsymbol{Q}_+$.

Bonn, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 15. April 1961)

NASTOLD, H.-J.
Math. Zeitschr. 77, 359–390 (1961)

Zur Cohomologietheorie in der algebraischen Geometrie. I.

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

HANS-JOACHIM NASTOLD

Einleitung[1])

Seit dem Erscheinen der grundlegenden Serreschen Arbeit „Faisceaux algébriques cohérents" [*18*] hat die Garbentheorie und die Cohomologietheorie in der abstrakten algebraischen Geometrie eine Reihe beachtlicher Erfolge zu verzeichnen. Genannt seien hier nur SERRES Dualitätssatz [*19*], die Verallgemeinerung des Riemann-Roch-Hirzebruchschen Satzes durch GROTHENDIECK [*2*], GROTHENDIECKS Dualitätssätze für kohärente Garben [*10*] und die Fassung, welche GROTHENDIECK der Zariskischen Theorie der holomorphen Funktionen gegeben hat [*12*]. Ein Teil dieser Ergebnisse ist bisher nur für den Fall der Geometrie über einem algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper bewiesen worden. Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit war der Wunsch, von dieser Einschränkung loszukommen.

Wir beweisen im zweiten Teil dieser Arbeit den *Serreschen Dualitätssatz* für lokal freie Garben auf einer singularitätenfreien projektiven Varietät *über einem beliebigen Konstantenkörper k und für beliebigen Funktionenkörper R/k* auf dem ursprünglichen Serreschen Wege. A. GROTHENDIECK hat allgemeinere Dualitätssätze [*10*], [*12*] entwickelt. Das Hauptanliegen unserer Untersuchungen besteht darin, die Dualität mittels der durch einen Differentiationsprozeß gewonnenen *Differentialformen höchster Stufe* ganz wie im klassischen Fall auch unter den genannten allgemeinen Voraussetzungen zu realisieren. Wir stützen uns hier auf Ergebnisse von E. KUNZ [*14*], die an (unveröffentlichte) Untersuchungen von F. K. SCHMIDT anknüpfen. Dort wird gezeigt, wie im Falle der Charakteristik p die Bildung der Kählerschen Differentialformen über passenden Unterkörpern des Konstantenkörpers k, den Differentialkonstantenkörpern, vernünftige Differentialformen auf einer abstrakten Varietät liefert. Die Wahl des Differentialkonstantenkörpers ist dabei noch weitgehend willkürlich. Für die Dualität wird aber nur die Garbe der Keime holomorpher Differentialformen der *höchsten Stufe* benützt, und die letztere erweist sich als unabhängig von der Wahl des Differentialkonstantenkörpers. Gleichzeitig zeigt der ursprüngliche Serresche Beweisgang auch, daß die in [*14*] definierte kanonische Klasse in Analogie zum Fall der Dimension 1 die

[1]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

im Riemann-Rochschen Satz auftretende Klasse ist. Ferner ergibt sich nach dem Serreschen Vorbild [20] der *Riemann-Rochsche Satz für Flächen* und andere klassische Resultate von ZARISKI nun *bei beliebigen Konstantenkörpern k und Funktionenkörpern R|k*. Dies ist von Interesse, solange die Grothendiecksche Fassung des Riemann-Rochschen Satzes noch nicht unter allgemeineren Voraussetzungen als in [2] bewiesen ist.

Im folgenden ersten Teil der Arbeit (§1) entwickeln wir dazu die Cohomologietheorie sogleich auf Präschemata im Sinne von GROTHENDIECK. Dieser Teil entstand aus dem Bestreben, eine Einführung in die *Cohomologietheorie auf Schemata* zu geben, ohne viel aus der Garbentheorie und der homologischen Algebra vorauszusetzen, *unter Beschränkung auf die* in der algebraischen Geometrie zunächst interessierende *Kategorie der quasi-kohärenten Garben*. Wir bedienen uns dabei der „funktoriellen Sprache", setzen deren Kenntnis jedoch nicht voraus, sondern entwickeln sie an unserem konkreten Gegenstand. Nach allgemeinen Ausführungen über Garben und geringte Räume im ersten Abschnitt werden im zweiten Abschnitt zunächst affine Schemata und die Kategorie der quasi-kohärenten Garben auf ihnen eingeführt. Sodann werden Präschemata definiert. Das sind, abweichend von der Terminologie bei GROTHENDIECK, geringte Räume, die eine endliche Überdeckung durch offene affine Mengen zu noetherschen Ringen besitzen. Auf solchen Präschemata untersuchen wir die Kategorie der quasi-kohärenten Garben und abgeleitete Funktoren in letzterer, sowie deren Berechnung mittels Čechscher Auflösungen. Der dritte Abschnitt befaßt sich mit projektiven Schemata über einem affinen Schema. Wir beweisen die Äquivalenz der Kategorie der quasi-kohärenten Garben auf einem projektiven Schema und einer Quotientenkategorie der Kategorie der graduierten Moduln über dem zugehörigen graduierten Ring und abschließend die Endlichkeitssätze im projektiven Fall.

Alle im folgenden auftretenden Ringe seien kommutativ mit Einselement, alle Homomorphismen zwischen solchen unitär, desgleichen alle Moduln über Ringen. Das Literaturverzeichnis bezieht sich auf beide Teile und befindet sich am Ende.

§ 1. Cohomologietheorie auf Schemata

1.1. Garben und geringte Räume

1.1.1. *Kategorien* ([9], chap. I.1.1., 1.2., 1.8. und [8], chap. I.1.7.). Eine Kategorie $\boldsymbol{K}$ besteht aus einer nicht leeren Klasse von *Objekten* $A, B, C, \ldots$ und Mengen $\mathrm{Hom}(A, B)$ für alle Objekte $A, B \in \boldsymbol{K}$, deren Elemente *Morphismen* von A in B genannt werden, mit einer Verknüpfung $\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$ für alle $A, B, C \in \boldsymbol{K}$, der *Zusammensetzung* der Morphismen, so daß

(i) die Zusammensetzung assoziativ ist,

(ii) für alle $A \in \boldsymbol{K}$ ein $e_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$ mit $u \circ e_A = u$, $e_A \circ v = v$ für alle $u \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $v \in \mathrm{Hom}(C, A)$ existiert.

$u \in \mathrm{Hom}(A, B)$ heißt ein *Isomorphismus*, wenn es ein $v \in \mathrm{Hom}(B, A)$ mit $v \circ u = e_A$ und $u \circ v = e_B$ gibt.

BEISPIELE. a) Objekte = Mengen, $\mathrm{Hom}(A, B)$ = Menge der Abbildungen der Menge A in die Menge B. b) Objekte = abelsche Gruppen, $\mathrm{Hom}(A, B)$ = Menge der Homomorphismen der Gruppe A in die Gruppe B. c) Objekte = Ringe, $\mathrm{Hom}(A, B)$ = Menge der Ringhomomorphismen des Ringes A in den Ring B. Zusammensetzung für a), b) und c) = übliche Zusammensetzung von Abbildungen.

Für $u \in \mathrm{Hom}(A, B)$ schreibt man oft anschaulich $u: A \to B$.

Ist $\boldsymbol{K}$ eine Kategorie, so heißt die Kategorie $\boldsymbol{K}^0$ bestehend aus denselben Objekten wie $\boldsymbol{K}$, den Morphismen $\mathrm{Hom}^0(A, B) = \mathrm{Hom}(B, A)$ und derselben Zusammensetzung die zu K *duale Kategorie.*

$\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}'$ seien zwei Kategorien. Wir nennen (kovarianten) *Funktor* von $\boldsymbol{K}$ in $\boldsymbol{K}'$ eine „Funktion", die jedem Objekt $A \in \boldsymbol{K}$ ein Objekt $F(A) \in \boldsymbol{K}'$ und jedem Morphismus $u \in \mathrm{Hom}(A, B)$ einen Morphismus $F(u) \in \mathrm{Hom}\big(F(A), F(B)\big)$ zuordnet, so daß $F(e_A) = e_{F(A)}$ und $F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$ ist. Ein kontravarianter Funktor von $\boldsymbol{K}$ in $\boldsymbol{K}'$ ist ein kovarianter Funktor von $\boldsymbol{K}^0$ in $\boldsymbol{K}'$.

F und G seien zwei Funktoren von $\boldsymbol{K}$ in $\boldsymbol{K}'$. Ein *Morphismus von Funktoren* oder eine natürliche Transformation f von F in G ist eine „Funktion", die jedem $A \in \boldsymbol{K}$ einen Morphismus $f(A)$ von $F(A)$ in $G(A)$ zuordnet, so daß für jeden Morphismus $u: A \to B$ in $\boldsymbol{K}$, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(u)} & F(B) \\ {\scriptstyle f(A)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f(B)} \\ G(A) & \xrightarrow{G(u)} & G(B) \end{array}$$

kommutativ ist. Morphismen von Funktoren lassen sich zusammensetzen. Sind $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}'$ zwei feste Kategorien und bilden die Objekte von $\boldsymbol{K}$ eine Menge, so bilden die Funktoren von $\boldsymbol{K}$ in $\boldsymbol{K}'$ als Objekte und die Morphismen von Funktoren als Morphismen zwischen diesen Objekten eine neue Kategorie.

J sei eine im folgenden festbleibende teilweise geordnete Menge. Ein *inverses System über J mit Werten in der Kategorie* $\boldsymbol{K}$ ist ein System von Objekten und Morphismen aus $\boldsymbol{K}$ (A_i, r_i^j), $A_i \in \boldsymbol{K}$ für alle $i \in J$, $r_i^j \in \mathrm{Hom}(A_j, A_i)$ für alle $i < j \in J$ mit $r_i^k = r_i^j \circ r_j^k$ für alle $i < j < k \in J$ und $r_i^i = e_{A_i}$ für alle $i \in J$.

Betrachtet man J als eine Kategorie mit den Elementen von J als Objekten und den Morphismen $\mathrm{Hom}(i, j)$ aus einem Element bestehend, falls $i < j$, und leer sonst, so kann man ein inverses System über J mit Werten in $\boldsymbol{K}$ auch auffassen als einen kontravarianten Funktor von J in $\boldsymbol{K}$. Die oben definierten Morphismen von Funktoren ergeben dann Morphismen zwischen inversen Systemen: Ein Morphismus des inversen Systems (A_i, r_i^j) in das inverse System $(\tilde{A}_i, \tilde{r}_i^j)$ ist eine Familie $(u_i) \in \prod_{i \in J} \mathrm{Hom}(A_i, \tilde{A}_i)$ von Morphismen aus $\boldsymbol{K}$ mit $u_i \circ r_i^j = \tilde{r}_i^j \circ u_j$ für alle $i \leq j \in J$. $\prod_{i \in J} \mathrm{Hom}(A_i, \tilde{A}_i)$ bedeutet hier und im folgenden das Produkt der Mengen $\mathrm{Hom}(A_i, \tilde{A}_i)$. Die Klasse aller inversen Systeme über J mit Werten in $\boldsymbol{K}$ bildet mit den so definierten Morphismen nun wieder eine Kategorie.

Wir nennen ein System (A, r_i) bestehend aus einem Objekt $A \in \boldsymbol{K}$ und einer Familie $(r_i) \in \prod_{i \in J} \mathrm{Hom}(A, A_i)$ von Morphismen aus $\boldsymbol{K}$ mit $r_i = r_i^j \circ r_j$ für alle $i < j \in J$ *inverser Limes* des inversen Systems (A_i, r_i^j), wenn für alle $T \in \boldsymbol{K}$ die für $t \in \mathrm{Hom}(T, A)$ durch $r_i \circ t = s_i \in \mathrm{Hom}(T, A_i)$ definierte Abbildung $\mathrm{Hom}(T, A) \to \left((s_i);\ (s_i) \in \prod_{i \in J} \mathrm{Hom}(T, A_i),\ s_i = r_i^j \circ s_j \text{ für alle } i < j \in J\right)$ bijektiv[2]) ist. Der inverse Limes ist, falls er existiert, bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt. Wählt man daher für jedes inverse System, welches einen inversen Limes besitzt, einen solchen aus (etwa mittels des Hilbertschen τ-Symbols), und bezeichnet das zugehörige Objekt aus $\boldsymbol{K}$ mit $\varprojlim (A_i, r_i^j)$ oder $\varprojlim_{i \in J} A_i$, so ist $\varprojlim_{i \in J}$, falls für alle inversen Systeme über J mit Werten in $\boldsymbol{K}$ existierend, ein Funktor von der Kategorie der inversen Systeme über J mit Werten in $\boldsymbol{K}$ in die Kategorie $\boldsymbol{K}$.

Als Spezialfall des inversen Limes erhält man für eine trivial geordnete Menge J, d.h. für kein Elementepaar $i \neq j \in J$ soll $i < j$ gelten, das *(direkte) Produkt* einer Familie $(A_i)_{i \in J}$ von Objekten aus $\boldsymbol{K}$, welches mit $\prod_{i \in J} A_i$ bezeichnet und durch $\mathrm{Hom}\left(T, \prod_{i \in J} A_i\right) \to \prod_{i \in J} \mathrm{Hom}(T, A_i)$ bijektiv für alle $T \in \boldsymbol{K}$ charakterisiert ist. Dual zum Begriff des inversen Systems bzw. Limes ist der des *direkten Systems* bzw. *Limes*. Letzterer liefert analog als Spezialfall die direkte Summe $\bigoplus_{i \in J} A_i$. In unseren obigen Beispielen a), b) und c) existiert für eine beliebige teilweise geordnete Menge J der inverse Limes jedes inversen Systems über J mit Werten in einer dieser Kategorien. Man erhält ihn folgendermaßen: In jedem der drei Fälle sind die Objekte A_i des inversen Systems Mengen. Wir können daher die folgende Untermenge des Produktes $\prod_{i \in J} A_i$ bilden: $A = \left((a_i);\ (a_i) \in \prod_{i \in J} A_i,\ r_i^j(a_j) = a_i \text{ für alle } i < j \in J\right)$. a_i bezeichnet dabei ein Element aus A_i. In den Fällen b) und c) läßt sich die Menge A auf genau eine Weise mit der Struktur einer abelschen Gruppe bzw. eines Ringes versehen, so daß die natürlichen Projektionen $r_i : A \to A_i$, definiert durch $r_{i_0}((a_i)) = a_{i_0}$, sämtlich Homomorphismen sind. Das System (A, r_i) besitzt dann die Eigenschaften eines inversen Limes des inversen Systems (A_i, r_i^j).

Der direkte Limes existiert für beliebige direkte Systeme in den Fällen a) und b) und im Falle c) jedenfalls dann, wenn die teilweise geordnete Menge J aufsteigend gefiltert ist, d.h. wenn zu $i, j \in J$ ein $k \in J$ mit $i < k$, $j < k$ existiert.

1.1.2. *Prägarben und Garben* ([*13*], chap. 0, 3.1., 3.2., [*8*], chap. I.1.9., chap. II, 1.1.). X sei ein topologischer Raum, $\mathfrak{U} = (U)$ das System aller offenen Mengen auf X. Wir denken uns $\mathfrak{U}$ mit der durch die Inklusion gegebenen teilweisen Ordnung versehen. $\boldsymbol{K}$ sei eine der als Beispiele a), b) und c) in 1.1.1. angeführten Kategorien. Wir nennen ein inverses System über $\mathfrak{U}$ mit Werten

[2]) Wir nennen eine Abbildung $u : A \to B$ *injektiv*, wenn aus $u(a) = u(a')$ $a = a'$ folgt, *surjektiv*, wenn es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $u(a) = b$ gibt, und *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

in $\boldsymbol{K}$ eine *Prägarbe auf X mit Werten in $\boldsymbol{K}$*, kurz eine *Prägarbe von Mengen, abelschen Gruppen bzw. Ringen auf X*. Eine Prägarbe ist also ein System $\mathfrak{F}=(\mathfrak{F}(U), r_U^V)$ von Objekten $\mathfrak{F}(U)\in\boldsymbol{K}$ für alle $U\in\mathfrak{U}$ und Morphismen $r_U^V:\mathfrak{F}(V)\to\mathfrak{F}(U)$ für alle $U\subset V\in\mathfrak{U}$ mit $r_U^W=r_U^V\circ r_V^W$ für alle $U\subset V\subset W\in\mathfrak{U}$ und $r_U^U=e_{\mathfrak{F}(U)}$ für alle $U\in\mathfrak{U}$. Abweichend von 1.1.1. schreiben wir hier $\mathfrak{F}(U)$ anstelle von $\mathfrak{F}_U$. Wir nennen einen Morphismus $u=(u_U)\in\prod_{U\in\mathfrak{U}}\mathrm{Hom}(\mathfrak{F}(U),\mathfrak{G}(U))$ des inversen Systems $\mathfrak{F}=(\mathfrak{F}(U), r_U^V)$ in das inverse System $\mathfrak{G}=(\mathfrak{G}(U), t_U^V)$ (s. 1.1.1.) einen *Morphismus der Prägarbe $\mathfrak{F}$ in die Prägarbe $\mathfrak{G}$*. Mit den so definierten Morphismen bildet die Klasse der Prägarben auf X mit Werten in $\boldsymbol{K}$ wieder eine Kategorie.

Eine Prägarbe $\mathfrak{F}$ auf X mit Werten in $\boldsymbol{K}$ heißt eine *Garbe*, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

(F) *Ist $(U_\alpha)\subset\mathfrak{U}$ eine Familie von offenen Mengen von X, $U=\bigcup_\alpha U_\alpha$ und $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta$, so ist das System $(\mathfrak{F}(U), r_{U_\alpha}^U, r_{U_{\alpha\beta}}^{U_\alpha})$ inverser Limes des aus $\mathfrak{F}$ durch Beschränkung auf die Teilmenge $(U_\alpha, U_{\alpha\beta})\subset\mathfrak{U}$ entstehenden inversen Systems über $(U_\alpha, U_{\alpha\beta})$.*

Beachtet man, daß sich in den von uns hier allein betrachteten Fällen von Kategorien des Typs a), b) und c) (1.1.1.) der inverse Limes des betrachteten inversen Systems allein aus den *Mengen* $\mathfrak{F}(U_\alpha)$, $\mathfrak{F}(U_{\alpha\beta})$ und den zugehörigen Abbildungen zwischen diesen Mengen auf die am Ende von 1.1.1. angegebene Art bestimmen läßt, so erkennt man, daß die Eigenschaft (F) äquivalent ist mit den beiden Definitionseigenschaften einer Garbe in [8], chap. II, 1.1.

(F 1) Ist $(U_\alpha)\subset\mathfrak{U}$ eine Familie von offenen Mengen von X, $U=\bigcup_\alpha U_\alpha$ und $s, s'\in\mathfrak{F}(U)$, so folgt aus $r_{U_\alpha}^U(s)=r_{U_\alpha}^U(s')$ für alle α $s=s'$.

(F 2) Ist $(U_\alpha)\subset\mathfrak{U}$ eine Familie von offenen Mengen von X, $U=\bigcup_\alpha U_\alpha$ und $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta$, dann gibt es zu jedem $(s_\alpha)\in\prod_\alpha\mathfrak{F}(U_\alpha)$ mit $r_{U_{\alpha\beta}}^{U_\alpha}(s_\alpha)=r_{U_{\alpha\beta}}^{U_\beta}(s_\beta)$ für alle α,β ein $s\in\mathfrak{F}(U)$ mit $r_{U_\alpha}^U(s)=s_\alpha$ für alle α.

(F 1) besagt gerade, daß der durch die Morphismen $r_{U_\alpha}^U, r_{U_{\alpha\beta}}^U$ gegebene Morphismus von $\mathfrak{F}(U)$ in den wie am Ende von 1.1.1. konstruierten inversen Limes injektiv ist, (F 2) besagt, daß letzterer surjektiv ist. Daraus folgt aber in unseren Kategorien $\boldsymbol{K}$, daß er ein Isomorphismus ist.

Die Elemente s von $\mathfrak{F}(U)$ ($\mathfrak{F}(U)$ ist in unseren Fällen a), b) und c) stets eine Menge) nennt man *Schnitte* der Garbe $\mathfrak{F}$ *über* U und schreibt auch $\Gamma(U,\mathfrak{F})$ anstelle von $\mathfrak{F}(U)$.

Für einen Punkt x unseres topologischen Raumes X betrachten wir das System $\mathfrak{U}(x)$ der offenen Mengen U mit $x\in U$. Umkehr der Enthaltenseinsrelation liefert auf $\mathfrak{U}(x)$ eine teilweise Ordnung, bei welcher $\mathfrak{U}(x)$ aufsteigend gefiltert ist. Einschränkung der Prägarbe $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{U}(x)$ ergibt dann ein *direktes* System über $\mathfrak{U}(x)$ mit Werten in $\boldsymbol{K}$. In unseren Kategorien existiert der direkte Limes $\varinjlim_{x\in U}\mathfrak{F}(U)$. Er wird mit $\mathfrak{F}_x$ bezeichnet und *Faser* (über x) genannt.

Ist $u:\mathfrak{F}\to\mathfrak{G}$ ein Morphismus von Prägarben, so erhält man eindeutig einen Morphismus $u_x:\mathfrak{F}_x\to\mathfrak{G}_x$ (Funktoreigenschaft des direkten Limes): $\mathfrak{F}\Rightarrow\mathfrak{F}_x$, $u\Rightarrow u_x$ ist ein Funktor von der Kategorie der Prägarben auf X in die Kategorie $\boldsymbol{K}$. Für $s\in\mathfrak{F}(U)$, $x\in U$ bezeichnet man das kanonische Bild von s in $\mathfrak{F}_x$ mit s_x. s_x ist der *Keim* von s in x. Ist $\mathfrak{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen oder Ringen, so nennt man die Menge der Punkte $x\in X$ mit $\mathfrak{F}_x\neq(0)$ den *Träger* von $\mathfrak{F}$: $\mathrm{Tr}(\mathfrak{F})$. $\mathfrak{B}$ sei eine Basis der offenen Mengen $\mathfrak{U}$ von X. Mit der Inklusion als Ordnungsrelation ist $\mathfrak{B}$ wieder eine teilweise geordnete Menge. Ein inverses System $\mathfrak{F}$ über $\mathfrak{B}$ mit Werten in $\boldsymbol{K}$ nennen wir eine *Prägarbe $\mathfrak{F}$ über $\mathfrak{B}$ mit Werten in $\boldsymbol{K}$*. *$\mathfrak{F}$ läßt sich erweitern zu einer Prägarbe $\mathfrak{F}'$ auf X mit Werten in $\boldsymbol{K}$*. Man setzt für $U\in\mathfrak{U}$ $\mathfrak{F}'(U)=\varprojlim_{V\in\mathfrak{B}}\mathfrak{F}(V)$, wo $\mathfrak{B}=(V;\,V\in\mathfrak{B},\,V\subset U)$ ist. Für $U\in\mathfrak{B}$ erhält man so offenbar einen Isomorphismus $\mathfrak{F}'(U)\simeq\mathfrak{F}(U)$. Die Morphismen $r'^{U}_{U'}$: $\mathfrak{F}'(U)\to\mathfrak{F}'(U')$ für $U'\subset U\in\mathfrak{U}$ ergeben sich aus der Definition des inversen Limes. Sind $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ zwei Prägarben über $\mathfrak{B}$ und $u:\mathfrak{F}\to\mathfrak{G}$ ein Morphismus von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}$, das ist ein Morphismus des inversen Systems $\mathfrak{F}$ über $\mathfrak{B}$ in das inverse System $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{B}$, so liefert die Funktoreigenschaft des inversen Limes einen Morphismus $u':\mathfrak{F}'\to\mathfrak{G}'$ der erweiterten Prägarben $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{G}'$. Ferner ist für $x\in X$ die Faser $\mathfrak{F}'_x\simeq\varinjlim_{x\in V\in\mathfrak{B}}\mathfrak{F}(V)$.

Ist $\mathfrak{F}$ eine *Garbe* auf X, $\mathfrak{F}_1$ die durch Einschränkung auf $\mathfrak{B}$ entstehende Prägarbe über $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{F}'_1$ die erweiterte Prägarbe auf X, so ist zufolge der Definitionseigenschaft (F) einer Garbe und der Eindeutigkeit des inversen Limes $\mathfrak{F}'_1$ kanonisch isomorph zu $\mathfrak{F}$.

Damit die einer Prägarbe $\mathfrak{F}$ über $\mathfrak{B}$ zugeordnete erweiterte Prägarbe $\mathfrak{F}'$ auf X eine Garbe ist, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{F}$ über $\mathfrak{B}$ die folgende Eigenschaft besitzt:

(F_0) *Ist $U\in\mathfrak{B}$ und (U_α) eine Überdeckung von U durch Mengen $U_\alpha\in\mathfrak{B}$, $U_\alpha\subset U$, so ist für $\mathfrak{V}=\big(V;\,V\in\mathfrak{B},\,V\subset U_\alpha\cap U_\beta$ für ein Paar $(\alpha,\beta)\big)$ das System $\big(\mathfrak{F}(U),r^{U}_{U_\alpha},r^{U}_{V}\big)$ inverser Limes des aus $\mathfrak{F}$ durch Beschränkung auf die Teilmenge $(U_\alpha)\cup\mathfrak{V}\subset\mathfrak{B}$ mit der Ordnungsrelation $U_\alpha>V$, wenn $U_\alpha>V$, entstehenden inversen Systems über $(U_\alpha)\cup\mathfrak{V}$.*

Zum Beweis mit den Eigenschaften des inversen Limes vgl. [*13*], chap. 0, 3.2.

Die folgende Bemerkung wird für uns später nützlich sein:

(F_0) *folgt aus der Bedingung*

(F'_0) *Zu jedem $U\in\mathfrak{B}$ gibt es eine (eventuell von U abhängige) Teilmenge $\mathfrak{B}'\subset\mathfrak{B}$, die eine Basis der offenen Mengen von U bildet und mit U_1, U_2 auch $U_1\cap U_2$ enthält, so daß die Aussage (F_0) für dieses U gilt, wenn in ihr überall $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{B}'$ ersetzt wird.* Wegen $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta\in\mathfrak{B}'$ ist hier natürlich $\varprojlim_{W\in(U_\alpha)\cup\mathfrak{B}}\mathfrak{F}(W)$ kanonisch isomorph zu $\varprojlim_{W\in(U_\alpha,\,U_{\alpha\beta})}\mathfrak{F}(W)$.

BEWEIS. Zunächst ist unter den Gegebenheiten von (F_0) der auf Grund der Definition des inversen Limes existierende kanonische Morphismus

$j: \mathscr{F}(U) \to \varprojlim_{W \in (U_\alpha) \cup \mathfrak{B}} \mathscr{F}(W)$ ein Monomorphismus: Dazu sei $\mathfrak{B}'$ eine nach (F_0') zu U gewählte Teilmenge von $\mathfrak{B}$. Dann gibt es $U'_{\alpha,\iota} \in \mathfrak{B}'$ mit $U_\alpha = \bigcup_\iota U'_{\alpha,\iota}$. Nun ist $U = \bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcup_{\alpha,\iota} U'_{\alpha,\iota}$ und für $\mathfrak{B}' = \big(V'; V' \in \mathfrak{B}',\ V' \subset U'_{\alpha,\iota} \cap U'_{\beta,\varkappa}$ für ein Paar $((\alpha,\iota),(\beta,\varkappa))\big)$ nach (F_0') der kanonische Morphismus $i: \mathscr{F}(U) \to \varprojlim_{W' \in (U'_{\alpha,\iota})_{\alpha,\iota} \cup \mathfrak{B}'} \mathscr{F}(W')$ ein Isomorphismus. Das System $(U'_{\alpha,\iota})_{\alpha,\iota} \cup \mathfrak{B}'$ ist eine „Verfeinerung" des Systems $(U_\alpha) \cup \mathfrak{B}$. Folglich läßt sich der kanonische Morphismus i über $j: \mathscr{F}(U) \to \varprojlim_{W \in (U_\alpha) \cup \mathfrak{B}} \mathscr{F}(W)$ faktorisieren:

$$\mathscr{F}(U) \xrightarrow{j} \varprojlim_{W \in (U_\alpha) \cup \mathfrak{B}} \mathscr{F}(W) \xrightarrow{k} \varprojlim_{W' \in (U'_{\alpha,\iota})_{\alpha,\iota} \cup \mathfrak{B}'} \mathscr{F}(W');$$

es ist $i = k \circ j$. i war ein Isomorphismus. Folglich ist j ein Monomorphismus, wie oben behauptet. Ferner ist k ein Epimorphismus. Um nun zu zeigen, daß j sogar ein Isomorphismus ist, womit (F_0) bewiesen ist, genügt es, noch zu zeigen, daß k ein Monomorphismus ist. Nun ist $U_\alpha = \bigcup_\iota U'_{\alpha,\iota}$, $U'_{\alpha,\iota} \in \mathfrak{B}$ und für $\mathfrak{B}_\alpha = \big(V; V \in \mathfrak{B},\ V \subset U'_{\alpha,\iota} \cap U'_{\alpha,\varkappa}$ für ein Paar $(\iota,\varkappa)\big)$, $\mathfrak{B}'_\alpha = \big(V', V' \in \mathfrak{B}',\ V' \subset U'_{\alpha,\iota} \cap U'_{\alpha,\varkappa}$ für ein Paar $(\iota,\varkappa)\big)$ wegen $U'_{\alpha,\iota} \cap U'_{\alpha,\varkappa} \in \mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ in der Folge $\mathscr{F}(U_\alpha) \to \varprojlim_{W' \in (U'_{\alpha,\iota})_\iota \cup \mathfrak{B}'_\alpha} \mathscr{F}(W') \simeq \varprojlim_{W \in (U'_{\alpha,\iota})_\iota \cup \mathfrak{B}_\alpha} \mathscr{F}(W)$ der letzte Morphismus ein Isomorphismus.

Der zusammengesetzte Morphismus ist nach dem bereits Bewiesenen angewandt auf U_α ein Monomorphismus. Folglich gilt dasselbe von

$$\mathscr{F}(U_\alpha) \to \varprojlim_{W' \in (U'_{\alpha,\iota})_\iota \cup \mathfrak{B}'_\alpha} \mathscr{F}(W')$$

für jedes α. Dann ist aber auch k monomorph.

1.1.3. *Direkte und reziproke Bilder* ([13], chap. 0, 3.4., 3.5., 3.7.). X und Y seien zwei topologische Räume, $\varphi: X \to Y$ eine stetige Abbildung. $\mathscr{F}$ sei wie in 1.1.2. eine Prägarbe auf X mit Werten in $\boldsymbol{K}$. Wir setzen für jede offene Menge $U \subset Y$ $\mathscr{G}(U) = \mathscr{F}\big(\bar{\varphi}^1(U)\big)$ und für zwei offene Mengen $U \subset V \subset Y$ $s_U^V = r_{\bar{\varphi}^1(U)}^{\bar{\varphi}^1(V)}$: $\mathscr{F}\big(\bar{\varphi}^1(V)\big) \to \mathscr{F}\big(\bar{\varphi}^1(U)\big)$. Das System $\big(\mathscr{G}(U), s_U^V\big)$ ist eine Prägarbe auf Y mit Werten in $\boldsymbol{K}$, die wir das *direkte Bild von* $\mathscr{F}$ *bei* φ nennen und mit $\varphi_*(\mathscr{F})$ bezeichnen. Ist $\mathscr{F}$ eine Garbe, so ist auch $\varphi_*(\mathscr{F})$ eine Garbe. Für zwei Prägarben $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ auf X und einen Morphismus $u: \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ liefert die Familie $(u_{\bar{\varphi}^1(U)})_U$, $u_{\bar{\varphi}^1(U)}: \mathscr{F}_1\big(\bar{\varphi}^1(U)\big) \to \mathscr{F}_2\big(\bar{\varphi}^1(U)\big)$ einen Morphismus $\varphi_*(u): \varphi_*(\mathscr{F}_1) \to \varphi_*(\mathscr{F}_2)$: φ_* ist ein kovarianter Funktor von der Kategorie der Prägarben (Garben) auf X in diejenige der Prägarben (Garben) auf Y. Ferner ist für stetige Abbildungen $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\varphi'} Z$ $(\varphi' \circ \varphi)_* = \varphi'_* \circ \varphi_*$. Für $x \in X$ hat man kanonische Morphismen der Fasern $\varphi_x: \varphi_*(\mathscr{F})_{\varphi(x)} \to \mathscr{F}_x$.

Ist $\mathscr{F}$ eine Prägarbe auf X und $\mathscr{G}$ eine Prägarbe auf Y, so heißt ein Morphismus $u: \mathscr{G} \to \varphi_*(\mathscr{F})$ ein *φ-Morphismus* von $\mathscr{G}$ in $\mathscr{F}$. Für $x \in X$ hat man dann kanonische Morphismen $\mathscr{G}_{\varphi(x)} \to F_x$.

X und Y seien wieder topologische Räume, $\varphi: X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathscr{G}$ eine Prägarbe auf Y. Ein Paar $(\mathscr{G}', v)$ bestehend aus einer *Garbe* $\mathscr{G}'$ auf X und einem φ-Morphismus $v: \mathscr{G} \to \mathscr{G}'$, also einem Morphismus $v: \mathscr{G} \to \varphi_*(\mathscr{G}')$, heißt ein *reziprokes Bild von* $\mathscr{G}$ *bei* φ, wenn für jede *Garbe* $\mathscr{F}$ auf X die für $u \in \mathrm{Hom}_X(\mathscr{G}', \mathscr{F})$ durch $u \to \varphi_*(u) \circ v \in \mathrm{Hom}_Y\big(\mathscr{G}, \varphi_*(\mathscr{F})\big)$ definierte Abbildung $\mathrm{Hom}_X(\mathscr{G}', \mathscr{F}) \to \mathrm{Hom}_Y\big(\mathscr{G}, \varphi_*(\mathscr{F})\big)$ bijektiv ist. Das Paar $(\mathscr{G}', v)$ ist, falls es existiert, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und wird mit $\big(\varphi^*(\mathscr{G}), v_{\mathscr{G}}\big)$ bezeichnet, $v_{\mathscr{G}}: \mathscr{G} \to \varphi_*\big(\varphi^*(\mathscr{G})\big)$.

Für jede Prägarbe $\mathscr{G}$ *von Mengen, Gruppen oder Ringen auf* Y *existiert ein reziprokes Bild* $\mathscr{G}'$ *bei* φ. Man erhält es folgendermaßen: Für offenes $U \subset X$ sei $\mathscr{G}'(U)$ die Menge bestehend aus allen Familien $s' = (s'_x)_{x \in U}$ mit $s'_x \in \mathscr{G}_{\varphi(x)}$ für alle $x \in U$, für die es zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung V von $\varphi(x)$ in Y, eine Umgebung $W \subset \bar{\varphi}^1(V) \cap U$ von x und ein Element $s \in \mathscr{G}(V)$ mit $s'_z = s_{\varphi(z)}$ für jedes $z \in W$ gibt. Es ist klar, wie $\mathscr{G}'(U)$ noch mit der Struktur einer Gruppe bzw. eines Ringes zu versehen ist. Hinsichtlich des Nachweises, daß das so erhaltene $\mathscr{G}'$ ein reziprokes Bild von $\mathscr{G}$ bei φ ist, sei auf [*13*], chap. 0, 3.7. verwiesen. Daraus ergibt sich für das reziproke Bild $\big(\varphi^*(\mathscr{G}), v\big)$: Der kanonische Morphismus $\varphi_x \circ v_{\varphi(x)}: \mathscr{G}_{\varphi(x)} \to \big(\varphi^*(\mathscr{G})\big)_x$ ist ein Isomorphismus. Schließlich ist $\varphi^*(\mathscr{G})$ ein kovarianter Funktor in $\mathscr{G}$.

SPEZIALFÄLLE. Ist $\varphi = \mathrm{Id}: X \to X$ die identische Abbildung, $\mathscr{F}$ eine Prägarbe auf X, so heißt $\mathrm{Id}^*(\mathscr{F})$ die *der Prägarbe* $\mathscr{F}$ *zugeordnete* oder auch von ihr erzeugte *Garbe*. Ist $X \subset Y$, $j: X \to Y$ die kanonische Injektion und $\mathscr{G}$ eine Garbe auf Y, so nennt man $j^*(\mathscr{G})$ die auf X induzierte Garbe. Sie wird auch mit $\mathscr{G}|X$ bezeichnet.

1.1.4. *Geringte Räume* ([*13*], 4.1., 4.2.). Ein *geringter Raum* ist ein Paar $(X, \mathscr{A})$ bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe von Ringen $\mathscr{A}$ auf X. $\mathscr{A}$ heißt die *Strukturgarbe* des Raumes und wird auch mit $\mathscr{O}_X$ bezeichnet, ihre Fasern in $x \in X$ mit $\mathscr{O}_{X,x}$ bzw. $\mathscr{O}_x$. Ein *Morphismus* $(X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ zwischen geringten Räumen ist ein Paar $(\varphi, \theta) = f$ bestehend aus einer stetigen Abbildung $\varphi: X \to Y$ und einem φ-Morphismus $\theta: \mathscr{B} \to \mathscr{A}$, d.h. einem Morphismus $\theta: \mathscr{B} \to \varphi_*(\mathscr{A})$ der Garben von Ringen auf Y. Die geringten Räume mit diesen Morphismen bilden eine Kategorie. In ihr ist z.B. $f = (\varphi, \theta)$ ein Monomorphismus, wenn φ eine stetige injektive Abbildung und $\theta: \mathscr{B} \to \varphi_*(\mathscr{A})$ ein Epimorphismus der Garben von Ringen auf Y ist. Dabei heißt ein Morphismus $f: X \to Y$ in einer beliebigen Kategorie *monomorph*, wenn für jedes Objekt T der Kategorie die für $u \in \mathrm{Hom}(T, X)$ durch $u \to f \circ u \in \mathrm{Hom}(T, Y)$ definierte Abbildung $\mathrm{Hom}(T, X) \to \mathrm{Hom}(T, Y)$ injektiv ist. Dual dazu wird der Begriff des Epimorphismus definiert.

Für eine Teilmenge $M \subset X$ ist $(M, \mathscr{A}|M)$ ein geringter Raum, auf M *induziert* durch $(X, \mathscr{A})$. Man hat einen Monomorphismus $(M, \mathscr{A}|M) \to (X, \mathscr{A})$, die kanonische *Injektion*.

$(X, \mathscr{A})$ sei ein geringter Raum. Eine Garbe $\mathscr{F}$ von abelschen Gruppen auf X heißt ein $\mathscr{A}$-*Modul*, wenn für jedes offene $U \subset X$ die abelsche Gruppe $\mathscr{F}(U)$ die Struktur eines $\mathscr{A}(U)$-Moduls trägt, so daß für alle offenen $U \subset V \subset X$

die Homomorphismen $r_U^V: \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ mit den Ringhomomorphismen $\mathscr{A}(V) \to \mathscr{A}(U)$ verträgliche Modulhomomorphismen sind. Sind $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ zwei $\mathscr{A}$-Moduln auf X, so heißt ein Morphismus $u: \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ der Garben von abelschen Gruppen auf X ein *$\mathscr{A}$-Homomorphismus*, wenn für jedes offene $U \subset X$ der Homomorphismus $u_U: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ $\mathscr{A}(U)$-linear ist. Die Menge aller dieser $\mathscr{A}$-Homomorphismen $u: \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ wird mit $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ bezeichnet. Die $\mathscr{A}$-Moduln mit den $\mathscr{A}$-Homomorphismen als Morphismen bilden eine Kategorie.

$(X, \mathscr{A})$, $(Y, \mathscr{B})$ seien zwei geringte Räume, $f = (\varphi, \theta): (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ ein Morphismus. θ ist ein Morphismus $\mathscr{B} \to \varphi_*(\mathscr{A})$ der Garben von Ringen. Mit $\mathscr{F}$ als $\mathscr{A}$-Modul auf X ist dann $\varphi_*(\mathscr{F})$ ein $\varphi_*(\mathscr{A})$-Modul auf Y und vermöge $\theta: \mathscr{B} \to \varphi_*(\mathscr{A})$ wird $\varphi_*(\mathscr{F})$ zu einem $\mathscr{B}$-Modul. Letzterer wird *direktes Bild von $\mathscr{F}$ bei dem Morphismus f* genannt und mit $f_*(\mathscr{F})$ bezeichnet. f_* ist ein *kovarianter Funktor* von der Kategorie der $\mathscr{A}$-Moduln in die Kategorie der $\mathscr{B}$-Moduln.

$\mathscr{G}$ sei ein $\mathscr{B}$-Modul. $\varphi^*(\mathscr{G})$ ist zunächst eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. Die Definition der Schnitte von $\varphi^*(\mathscr{G})$ und $\varphi^*(\mathscr{B})$ in 1.1.3. liefert aber eine natürliche $\varphi^*(\mathscr{B})$-Modulstruktur von $\varphi^*(\mathscr{G})$. Andererseits hat man vermöge $\theta: \mathscr{B} \to \varphi_*(\mathscr{A})$ nach Definition des reziproken Bildes einen Morphismus $\theta^*: \varphi^*(\mathscr{B}) \to \mathscr{A}$, vermöge dessen $\mathscr{A}$ ein $\varphi^*(\mathscr{B})$-Modul wird. Bildung des Tensorproduktes ([8], chap. II, 2.8.) $\varphi^*(\mathscr{G}) \underset{\varphi^*(\mathscr{B})}{\otimes} \mathscr{A}$ ergibt daher einen $\mathscr{A}$-Modul, der als *reziprokes Bild von $\mathscr{G}$ bei dem Morphismus f* und mit $f^*(\mathscr{G})$ bezeichnet wird. Es ist $\big(f^*(\mathscr{G})\big)_x = \mathscr{G}_{\varphi(x)} \underset{\mathscr{B}_{\varphi(x)}}{\otimes} \mathscr{A}_x$. f^* ist ein *kovarianter Funktor* von der Kategorie der $\mathscr{B}$- in diejenige der $\mathscr{A}$-Moduln. Ferner hat man eine kanonische *Isomorphie* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}\big(f^*(\mathscr{G}), \mathscr{F}\big) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}\big(\mathscr{G}, f_*(\mathscr{F})\big)$.

1.2. Schemata

1.2.1. *Affine Schemata* ([13], chap. I, §1, [4], chap. 3, 1., [7], exp. 1., 2.). Wir gehen aus von einem Ring A und versehen die Menge $X = \mathrm{Spec}(A) = (\mathfrak{p}; \mathfrak{p}$ Primideal von $A)$, deren Elemente mit x, die zugehörigen Primideale mit $\mathfrak{p}_x$ bezeichnet werden, mit der Zariski-Topologie: Eine Basis $\mathfrak{B}$ derselben bilden die Mengen $D(f) = \big(x;\ x \in X,\ f(x) \neq 0\big)$ für alle $f \in A$. Dabei bedeutet $f(x) \neq 0$: $f \notin \mathfrak{p}_x$. Es gilt $D(f) \cap D(g) = D(fg)$. Mit $A_f = A_{S_f}$, dem Quotientenring von A nach der multiplikativ abgeschlossenen Menge $S_f = (f^n;\ n \geqq 0)$, und den kanonischen Homomorphismen $r_g^f: A_f \to A_g$ für $D(f) \supset D(g)$ (vgl. [13], chap. I, 1.3.) erhält man eine Prägarbe von Ringen über $\mathfrak{B}$ (1.1.2.). Die letztere erfüllt die Bedingung (F_0) aus 1.1.2. Dies ergibt sich aus einfachen Eigenschaften der Quotientenbildung ([13], chap. I, 1.3.7.). Erweiterung auf X liefert somit nach 1.1.2. eine Garbe $\tilde{A}$ von Ringen auf X mit $\Gamma\big(D(f), \tilde{A}\big) = A_f$ für alle $f \in A$. Das Paar $(X, \tilde{A})$ heißt das zu A gehörige *affine Schema*. Einschränkung auf die offene Menge $D(f)$ liefert einen zum affinen Schema des Ringes A_f kanonisch isomorphen geringten Raum. Die $D(f)$ heißen daher auch *spezielle offene affine Teilmengen* des affinen Schemas (X, A). Allgemein

heißt eine offene Menge U eines geringten Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ *offene affine Teilmenge* von $(X, \mathcal{O}_X)$, wenn $(U, \mathcal{O}_X|U)$ isomorph einem affinen Schema ist.

M sei ein A-Modul. Bildet man entsprechend wie oben für $f \in A$ die Quotientenmoduln M_f, so erhält man A_f-Moduln und für $D(f) \supset D(g)$ kanonische Modulhomomorphismen: Wie oben bildet das so entstehende System von Moduln und Homomorphismen über $\mathfrak{B}$ eine *Garbe über* $\mathfrak{B}$, aus der durch Erweiterung eine Garbe von $\tilde{A}$-Moduln auf X entsteht. Letztere ist ein $\tilde{A}$-Modul und wird mit $\tilde{M}$ bezeichnet. Der zu dem A_f-Modul M_f gehörige $\tilde{A}_f$-Modul $\tilde{M}_f$ über $D(f)$ ist kanonisch isomorph zu der Einschränkung $\tilde{M}|D(f)$.

Sind M, N zwei A-Moduln und $u: M \to N$ ein A-Homomorphismus, dann gehören zu u für alle $f \in A$ kanonisch A_f-Homomorphismen $u_f: M_f \to N_f$, und für $D(f) \supset D(g)$ hat man kommutative Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} M_f & \xrightarrow{u_f} & N_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_g & \xrightarrow{u_g} & N_g \end{array}$$

Man erhält so einen $\tilde{A}$-Homomorphismus $\tilde{u}: \tilde{M} \to \tilde{N}$, und es gilt:

Der kanonische Homomorphismus $u \to \tilde{u}$ *von* $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ *in* $\mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M}, \tilde{N})$ *ist bijektiv* ([13], chap. I, 1.3.8.).

In dem Wort „Homomorphismus" kommt zum Ausdruck, daß $\mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M}, \tilde{N})$ eine abelsche Gruppe ist. In der Tat: Sei $(X, \mathcal{O})$ ein geringter Raum (1.1.4.), $\mathfrak{B}$ eine Basis der offenen Mengen von X und $\boldsymbol{K}$ die Kategorie der *Prägarben von $\mathcal{O}$-Moduln über* $\mathfrak{B}$ (1.1.2. und 1.1.4.) mit den $\mathcal{O}$-Homomorphismen als Morphismen. Dann gilt folgendes: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ist eine abelsche Gruppe für alle $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \boldsymbol{K}$, und die Zusammensetzung (1.1.1. und 1.1.2.) der Morphismen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ ist bilinear für alle $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \in \boldsymbol{K}$. Ferner existiert ein 0-Objekt 0 mit $e_0 = 0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(0, 0)$. Eine Kategorie mit diesen Eigenschaften heißt eine *additive Kategorie*. Während man für eine beliebige Kategorie erklären kann, was ein Monomorphismus und ein Epimorphismus ist (s. 1.1.4.), kann man für eine additive Kategorie *Kern, Kokern, Bild und Kobild* erklären: Ein Kern des Morphismus $u: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist ein Monomorphismus $i: \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft: Genau diejenigen $v: \mathcal{X} \to \mathcal{F}$ mit $u \circ v = 0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ lassen sich über i faktorisieren: $v = i \circ w$ mit $w \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{X}, \mathcal{F}')$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}' & \xrightarrow{i} & \mathcal{F} & \xrightarrow{u} & \mathcal{G} \\ {\scriptstyle w}\uparrow & \nearrow_{v} & & & \\ \mathcal{X} & & & & \end{array}$$

Äquivalent damit ist: Ein Kern von $u: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist ein Morphismus $i: \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$, so daß für jedes $\mathcal{X} \in \boldsymbol{K}$ die Folge von *abelschen Gruppen* $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{X}, \mathcal{F}') \xrightarrow{i} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ exakt ist. Ein Kern ist, wenn er existiert, im wesentlichen eindeutig bestimmt. Dual dazu definiert man Kokern und damit Bild und Kobild (vgl. [9], chap. I, 1.3., 1.4., [8], chap. I, 1.8.).

Wir wollen nun in der Kategorie $\boldsymbol{K}$ der Prägarben von $\mathcal{O}$-Moduln über $\mathfrak{B}$ die Frage nach dem Kern eines $\mathcal{O}$-Homomorphismus $u:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ stellen: Nach 1.1.2. ist $u=(u_U)_{U\in B}$, $u_U:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$ mit

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{u_U} & \mathcal{G}(U)\\ \downarrow{\scriptstyle r_V^U} & & \downarrow{\scriptstyle s_V^U}\\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{u_V} & \mathcal{G}(V)\end{array}$$

kommutativ für alle $V\subset U\in\mathfrak{B}$. Wir betrachten nun die Kerne $\mathcal{F}'(U)$ von $u_U:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$ für alle $U\in\mathfrak{B}$ und erhalten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}0\to\mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{i_U} & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{u_U} & \mathcal{G}(U)\\ \downarrow{\scriptstyle r'^U_V} & & \downarrow{\scriptstyle r_V^U} & & \downarrow{\scriptstyle s_V^U}\\ 0\to\mathcal{F}'(V) & \xrightarrow{i_V} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{u_V} & \mathcal{G}(V)\end{array}$$

mit exakten Zeilen.

Das System $(\mathcal{F}'(U), r'^U_V)$ von $\mathcal{O}(U)$-Moduln und Homomorphismen ist eine Prägarbe von $\mathcal{O}$-Moduln über $\mathfrak{B}$ und $i=(i_U)_{U\in\mathfrak{B}}$ ist ein $\mathcal{O}$-Homomorphismus $i:\mathcal{F}'\to\mathcal{F}$. i ist ein Kern von $u:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$: Für jeden $\mathcal{O}$-Homomorphismus $v:\mathcal{X}\to\mathcal{F}$ mit $u\circ v=0$ hat man kommutative Diagramme (1) und $u_U\circ v_U=0$ für alle $U\in\mathfrak{B}$. Da $\mathcal{F}'(U)$ Kern des $\mathcal{O}(U)$-Homomorphismus $u_U:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$ ist, gibt es $\mathcal{O}(U)$-Homomorphismen $w_U:\mathcal{X}(U)\to\mathcal{F}'(U)$ mit $v_U=i_U\circ w_U$ für alle $U\in\mathfrak{B}$. Aus der Kommutativität der Diagramme (1) ergibt sich die Kommutativität der gestrichelten Diagramme in (2) und somit die Existenz eines $\mathcal{O}$-Homomorphismus $w:\mathcal{X}\to\mathcal{F}'$ mit $v=i\circ w$.

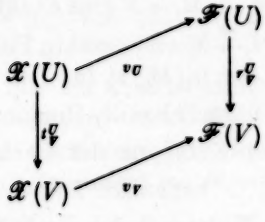

Abb. 1

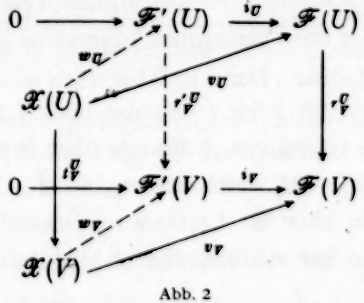

Abb. 2

Somit gilt: In der Kategorie $\boldsymbol{K}$ der (Prägarben von) $\mathcal{O}$-Moduln über $\mathfrak{B}$ hat jeder $\mathcal{O}$-Homomorphismus einen Kern und dual dazu einen Kokern. Ferner ist der kanonische $\mathcal{O}$-Homomorphismus $\bar{u}:\mathrm{Kobild}\,u\to\mathrm{Bild}\,u$ ein Isomorphismus. Eine additive Kategorie mit diesen beiden Eigenschaften heißt eine *abelsche Kategorie* ([9], chap. I, 1.4., [8], chap. I, 1.8.). In einer additiven, speziell also in einer abelschen Kategorie ist erklärt, wann eine Folge von Objekten und Morphismen $0\to\mathcal{F}\to\mathcal{G}\to\mathcal{H}\to 0$ eine *exakte Folge* heißt.

Betrachtet man anstelle der Prägarben $\boldsymbol{K}$ die *Garben von $\mathcal{O}$-Moduln über* $\mathfrak{B}$, so bilden diese mit denselben Morphismen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ wie in $\boldsymbol{K}$

jedenfalls eine additive Kategorie $\boldsymbol{K}'$, eine *Unterkategorie* von $\boldsymbol{K}$. Für einen $\mathcal{O}$-Homomorphismus $u:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$, $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\boldsymbol{K}'$, ist nun der oben *in* $\boldsymbol{K}$ gebildete Kern und Kokern nicht notwendig wieder in $\boldsymbol{K}'$ enthalten. Ist dies jedoch der Fall, so sind Kern und Kokern in $\boldsymbol{K}$ zugleich Kern und Kokern von $u:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ *in* $\boldsymbol{K}'$. Gilt dies für alle $u:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$, $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\boldsymbol{K}'$, so ist $\boldsymbol{K}'$ sicher ebenfalls abelsch. Da nach 1.1.2. eine natürliche Äquivalenz ([9], chap. I, 1.2.) zwischen der Kategorie der *Garben von $\mathcal{O}$-Moduln auf X* und der Kategorie der Garben von $\mathcal{O}$-Moduln über $\mathfrak{B}$ besteht, kann man im angegebenen Falle den Kern und dual dazu den Kokern eines $\mathcal{O}$-Homomorphismus $u:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ wie oben bestimmen.

1.2.2. *Quasi-kohärente Garben. Die Funktoren $M\Rightarrow\tilde{M}$, $u\Rightarrow\tilde{u}$ und $\tilde{M}\Rightarrow\tilde{M}(X)=\Gamma(X,\tilde{M})$, $\tilde{u}\Rightarrow\tilde{u}_X$ liefern eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der A-Moduln M und der Unterkategorie der Kategorie der $\tilde{A}$-Moduln auf X bestehend aus den $\tilde{A}$-Moduln von der Form $\tilde{M}$, M ein A-Modul, und den Morphismen der Kategorie der $\tilde{A}$-Moduln.*

Diese Unterkategorie ist, da äquivalent zur Kategorie der A-Moduln, eine abelsche Kategorie, *die Kategorie $\boldsymbol{K}''$ der quasi-kohärenten (abgekürzt q.k.) Garben auf $(X,\tilde{A})$*.

Ist für $\tilde{u}:\tilde{M}\to\tilde{N}$, $\tilde{M},\tilde{N}\in\boldsymbol{K}''$, der Morphismus $\tilde{i}:\tilde{M}'\to\tilde{M}$ ein Kern von $\tilde{u}$ in $\boldsymbol{K}''$, so braucht $\tilde{i}$ a priori nicht auch Kern von $\tilde{u}:\tilde{M}\to\tilde{N}$ in der größeren Kategorie $\boldsymbol{K}'$ aller $\tilde{A}$-Moduln zu sein. Daß dies hier jedoch der Fall ist, sieht man so: Wir betrachten die Basis $\mathfrak{B}$ der offenen Mengen von X bestehend aus den speziellen offenen affinen Teilmengen $D(f)$, $f\in A$, von $(X,\tilde{A})$. Auf Grund der oben genannten Äquivalenz ist $0\to M'\xrightarrow{i}M\xrightarrow{u}N$ eine exakte Folge von A-Moduln. Dann ist aber auch $0\to M'_f\xrightarrow{i_f}M_f\xrightarrow{u_f}N_f$ eine exakte Folge von A_f-Moduln für jedes $f\in A$, also nach 1.2.1. die durch $\left(M'_f, r^f_g \text{ für } D(f)\supset D(g)\right)$ gegebene Garbe von $\tilde{A}$-Moduln über $\mathfrak{B}$ mit den natürlichen A_f-Homomorphismen $i_f:M'_f\to M_f$ ein Kern von $\tilde{u}:\tilde{M}\to\tilde{N}$ in der Kategorie der Garben von $\tilde{A}$-Moduln über $\mathfrak{B}$. Letztere ist jedoch nach 1.1.2. kanonisch äquivalent zur Kategorie der Garben von $\tilde{A}$-Moduln auf X. Entsprechendes gilt für den Kokern.

Ist $0\to\mathcal{F}'\to\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ eine exakte Folge von q.k. Garben von $\tilde{A}$-Moduln auf $(X,\tilde{A})$ und U offen in X, so ist die eingeschränkte Folge $0\to\mathcal{F}'|U\to\mathcal{F}|U\to\mathcal{G}|U$ eine exakte Folge von $\tilde{A}|U$-Moduln auf U. Dazu sei $\mathfrak{B}'$ die Basis der offenen Mengen von U bestehend aus den speziellen offenen affinen Mengen $D(f)$, $f\in A$, mit $D(f)\subset U$. Einschränkung der Garben von $\tilde{A}$-Moduln auf $\mathfrak{B}'$ liefert, da wir von q.k. Garben ausgingen, eine exakte Folge von Garben von $\tilde{A}$-Moduln über $\mathfrak{B}'$. Erweiterung auf U ergibt dann das Gewünschte (vgl. 1.1.2.). Entsprechendes gilt für exakte Folgen der Gestalt $\mathcal{F}\to\mathcal{G}\to\mathcal{G}'\to 0$ und damit für beliebige kurze exakte Folgen $0\to\mathcal{F}'\to\mathcal{F}\to\mathcal{F}''\to 0$.

Der unser affines Schema $(X, \tilde{A})$ definierende Ring A sei nun *noethersch*. V sei offen in X und $\mathfrak{F}$ ein $\tilde{A}|V$-Modul. *Dann sind äquivalent*

(*i*) *Es existiert eine q.k. Garbe* $\mathfrak{G}$ *auf* X *mit* $\mathfrak{G}|V \simeq \mathfrak{F}$.

(*ii*) *Es existiert eine offene Überdeckung* (U_i) *von* V *durch Mengen* $U_i = D(f_i)$, $f_i \in A$, $D(f_i) \subset V$, *so daß* $\mathfrak{F}|U_i$ *q.k. ist* (U_i *ist affin*!).

(*iii*) *Jeder Punkt* $x \in V$ *ist in einer offenen affinen Menge* $U \subset X$ *enthalten, für welche* $\mathfrak{F}|U$ *q.k. ist.*

(*iv*) *1. Für jedes* $f \in A$ *mit* $D(f) \subset V$ *und jedes* $s \in \Gamma(D(f), \mathfrak{F})$ *existiert ein* $n \geqq 0$, *so daß* $f^n s$ *sich zu einem Schnitt von* $\mathfrak{F}$ *über* V *fortsetzen läßt.*

2. Für jedes $f \in A$ *mit* $D(f) \subset V$ *und jedes* $t \in \Gamma(V, \mathfrak{F})$, *so daß* $t|D(f) = r^V_{D(f)}(t) = 0$, *existiert ein* $n \geqq 0$ *mit* $f^n t = 0$.

Beweis. [*13*], chap. I, 1.4.

Eine Garbe von $\tilde{A}|V$-Moduln heißt *quasi-kohärent* (abgekürzt q.k.) *auf* V, wenn (i) bis (iv) erfüllt sind. (i) zeigt: Ist $\mathfrak{F}$ q.k. auf V und $U \subset V$, so ist auch $\mathfrak{F}|U$ q.k. auf U. (iii) zeigt: Quasi-Kohärenz ist eine lokale Eigenschaft.

Eine Folge $0 \to \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'' \to 0$ *von q.k. Garben auf* X *ist genau dann exakt, wenn für eine offene affine Überdeckung* $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ *für alle* α *die eingeschränkten Folgen* $0 \to \mathfrak{F}'|U_\alpha \to \mathfrak{F}|U_\alpha \to \mathfrak{F}''|U_\alpha \to 0$ *von* $\tilde{A}|U_\alpha$*-Moduln exakt sind.*

Beweis. Wie oben bei der Einschränkung von exakten Folgen auf eine offene Menge $U \subset X$ mit folgender Basis der offenen Mengen von X: $\mathfrak{B}$ besteht aus allen $D(f)$, $f \in A$, mit $D(f) \subset U_\alpha$ für ein α. — Ebenso ergibt sich:

Eine Folge $0 \to \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'' \to 0$ *von q.k. Garben auf* X *ist genau dann exakt, wenn für alle* U_α *einer offenen affinen Überdeckung* $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ *bzw. wenn für alle offenen affinen* $U \subset X$ *die zugehörigen Folgen der Schnittflächenmoduln* $0 \to \mathfrak{F}'(U_\alpha) \to \mathfrak{F}(U_\alpha) \to \mathfrak{F}''(U_\alpha) \to 0$ *bzw.* $0 \to \mathfrak{F}'(U) \to \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}''(U) \to 0$ *exakt sind.*

Ist $\mathfrak{F} \simeq \tilde{M}$ q.k. auf X, so ist nach bekannten Eigenschaften der Quotientenbildung ([*13*], chap. 0, 1.4.5.) die Faser $\mathfrak{F}_x \simeq M_{\mathfrak{p}_x}$ ($M_{\mathfrak{p}_x}$ ist der Quotientenmodul von M nach dem Primideal $\mathfrak{p}_x \subset A$, also $M_{\mathfrak{p}_x} = M_S$ mit $S = A - \mathfrak{p}_x$). *Daher ist* $\mathfrak{F} = 0$ *äquivalent mit* $\mathfrak{F}_x = 0$ *für alle* $x \in X$.

Beweis. Ist $\mathfrak{F} \neq 0$, so ist $M \neq (0)$, also für ein Element $m \neq 0$ aus M $1 \notin \mathrm{Ann}(m)$ [3]). Dann gibt es aber ein $\mathfrak{p}_x \supset \mathrm{Ann}(m)$, woraus $\frac{m}{1} \neq 0$ in $M_{\mathfrak{p}_x} \simeq \mathfrak{F}_x$ folgt. Damit ergibt sich:

Eine Folge $0 \to \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'' \to 0$ *von q.k. Garben auf* X *ist genau dann exakt, wenn für alle* $x \in X$ *die zugehörigen Folgen der Fasern* $0 \to \mathfrak{F}'_x \to \mathfrak{F}_x \to \mathfrak{F}''_x \to 0$ *exakt sind.*

A sei wieder ein *noetherscher Ring*. Eine q.k. Garbe $\mathfrak{F}$ auf dem affinen Schema $(X, \tilde{A})$ heißt *kohärent* (abgekürzt k.), wenn es einen endlich erzeugten A-Modul M gibt, so daß $\mathfrak{F} \simeq \tilde{M}$.

[3]) $\mathrm{Ann}(m)$ bezeichnet den Annulator des Elementes m, ein Ideal in A.

V sei eine offene Menge von X, $\mathscr{F}$ ein $\tilde{A}|V$-Modul. *Dann sind äquivalent:*

(*i*) *Es existiert eine k. Garbe* $\mathscr{G}$ *auf* X *mit* $\mathscr{G}|V \simeq \mathscr{F}$.

(*ii*) *Jeder Punkt* $x \in V$ *ist in einer offenen affinen Menge* $U \subset V$ *enthalten, für welche* $\mathscr{F}|U$ *k. auf* U *ist.*

BEWEIS. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Voraussetzung (i) ist $\mathscr{G} \simeq \tilde{M}$, M ein endlich erzeugter A-Modul. Für $x \in D(f) \subset V$, $f \in A$, ist dann $\mathscr{F}|D(f) \simeq \tilde{M}|D(f) \simeq \tilde{M}_f$, und M_f ist ein endlich erzeugter A_f-Modul, also $\mathscr{F}|D(f)$ kohärent.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $V = \bigcup_i U_i$ sei eine endliche offene affine Überdeckung von V mit $\mathscr{F}|U_i$ kohärent, d.h. $\mathscr{F}|U_i \simeq \tilde{M}_i$, M_i endlich erzeugter $\tilde{A}(U_i)$-Modul. Nun ist nach Obigem $\mathscr{F}$ q.k., also $\mathscr{F} \simeq \tilde{M}|V$, M ein A-Modul und $M = \varinjlim M_\lambda$, M_λ endlich erzeugte A-Moduln. Dann ist $\varinjlim \tilde{M}_\lambda \simeq \tilde{M}$ und wegen der Vertauschbarkeit von direktem Limes und Quotientenbildung ([*13*], chap. 0, 1.3.) $\mathscr{F}|U_i \simeq \tilde{M}|U_i \simeq \varinjlim \tilde{M}_\lambda|U_i$. Ist nämlich $\mathfrak{B}$ die aus den $D(f)$, $f \in A$, bestehende Basis der offenen Mengen von X, so ist für jedes $U = D(f) \in \mathfrak{B}$ $\tilde{M}(U) = M_f = \varinjlim (M_\lambda)_f = \varinjlim \tilde{M}_\lambda(U)$. Folglich ist die durch Einschränkung von $\tilde{M}$ auf $\mathfrak{B}$ entstehende Prägarbe über $\mathfrak{B}$ direkter Limes der Prägarben $\tilde{M}_\lambda$ über $\mathfrak{B}$. Mit $\mathfrak{B}_i = (U;\ U \in \mathfrak{B},\ U \subset U_i)$ ist somit auch die durch Einschränkung von $\tilde{M}$ auf $\mathfrak{B}_i$ entstehende Prägarbe über $\mathfrak{B}_i$ direkter Limes der durch Einschränkung der $\tilde{M}_\lambda$ auf $\mathfrak{B}_i$ entstehenden Prägarben über $\mathfrak{B}_i$. Die Prägarben sind aber sämtlich Garben über $\mathfrak{B}_i$ (sie erfüllen (F_0) aus 1.1.2.), und die Kategorie der Garben über $\mathfrak{B}_i$ ist äquivalent zur Kategorie der Garben auf U_i. Folglich ist $\tilde{M}|U_i$ direkter Limes der Garben $\tilde{M}_\lambda|U_i$. Die U_i sind nun affin, die $\tilde{M}$, $\tilde{M}_\lambda$ q.k. Vermöge $i_\lambda: M_\lambda \to M$ hat man $\tilde{i}_\lambda: \tilde{M}_\lambda \mapsto \tilde{M}$ und somit $\tilde{M}_\lambda(U_i) \to \tilde{M}(U_i)$. Dies sind Monomorphismen, und wegen $\varinjlim \tilde{M}_\lambda|U_i \simeq \tilde{M}|U_i$ ist $\varinjlim \tilde{M}_\lambda(U_i) = \tilde{M}(U_i)$. Aus $\tilde{M}(U_i) \simeq M_i$ endlich erzeugter $A(U_i)$-Modul folgt aber $0 \to \tilde{M}_{\lambda_i}(U_i) \to \tilde{M}(U_i) \to 0$ für ein λ_i und folglich $0 \to \tilde{M}_{\lambda_0}|U_i \to \tilde{M}|U_i \to 0$ für ein λ_0 und alle i. Wegen $V = \bigcup_i U_i$ gilt somit $0 \to \tilde{M}_{\lambda_0}|V \to \tilde{M}|V \to 0$, also $\tilde{M}_{\lambda_0}|V \simeq \tilde{M}|V \simeq \mathscr{F}$ q.e.d.

Als Folgerung ergibt sich: Für alle offenen affinen $U \subset X$ ist $\tilde{A}(U) = \Gamma(U;\tilde{A})$ noethersch. Ist nämlich $\mathfrak{i}$ ein Ideal in $\tilde{A}(U)$, also $0 \to \mathfrak{i} \to \tilde{A}(U)$, und $U = \bigcup_i U_i$, $U_i = D(f_i)$, $f_i \in A$, so sind die Ringe $\tilde{A}(U_i) \simeq A_{f_i}$ noethersch, und wegen $0 \to \tilde{\mathfrak{i}}(U_i) \to \tilde{A}(U_i)$ ist $\tilde{\mathfrak{i}}(U_i)$ endlich erzeugter $\tilde{A}(U_i)$-Modul. Somit sind die Einschränkungen $\tilde{\mathfrak{i}}|U_i$ kohärent, woraus die Kohärenz von $\tilde{\mathfrak{i}}$ auf U folgt. $\mathfrak{i}$ ist also endlich erzeugter $\tilde{A}(U)$-Modul.

1.2.3. *Präschemata, Kategorie der quasi-kohärenten Garben.* Ein *Präschema*[4]) ist ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der sich durch *endlich* viele offene affine Mengen, die zu *noetherschen* Ringen gehören, überdecken läßt.

[4]) Abweichend von der Terminologie bei GROTHENDIECK [*13*]. Ein Präschema in unserem Sinne heißt dort „noethersches Präschema".

$(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ seien zwei Präschemata. Ein Morphismus $f=(\varphi, \theta)$: $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ (1.1.4.) heißt *Morphismus der Präschemata*, wenn für alle $x \in X$ die zugehörigen Homomorphismen $\theta_x^{\#}: \mathcal{O}_{\varphi(x)} \to \mathcal{O}_x$ der Fasern *lokal* sind, d.h. wenn für die maximalen Ideale $\mathfrak{m}_{\varphi(x)}$ von $\mathcal{O}_{\varphi(x)}$ und $\mathfrak{m}_x$ von $\mathcal{O}_x$ $\theta_x^{\#}(\mathfrak{m}_{\varphi(x)}) \subset \mathfrak{m}_x$ gilt. Mit den so definierten Morphismen bilden die Präschemata eine Kategorie.

Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Präschema, $(S, \mathcal{O}_S)$ ein affines Schema zum Ring A, dann entsprechen sich eineindeutig die Morphismen $(X, \mathcal{O}_X) \to (S, \mathcal{O}_S)$ und die Ringhomomorphismen $A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ([*13*], chap. I, 2.2.).

Eine Garbe $\mathcal{F}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln auf X heißt *quasi-kohärent* bzw. *kohärent* (q.k. bzw. k.), wenn sie einer der drei äquivalenten Bedingungen genügt:

(i) Es existiert eine endliche Überdeckung von X durch offene affine Mengen U_α, so daß $\mathcal{F}|U_\alpha$ q.k. bzw. k. ist für alle α.

(ii) Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine offene affine Umgebung U mit $\mathcal{F}|U$ q.k. bzw. k.

(iii) Für jede offene affine Menge $U \subset X$ ist $\mathcal{F}|U$ q.k. bzw. k.

Die Äquivalenz der drei Bedingungen folgt unmittelbar aus 1.2.2.

Wir betrachten nun die Kategorie $\boldsymbol{K}''$ der q.k. Garben auf X. Dazu sei $\mathfrak{B}$ *die aus allen offenen affinen* $U \subset X$ *bestehende Basis* der offenen Mengen von X. Dann genügt es, die q.k. Garben über $\mathfrak{B}$ zu betrachten (1.1.2.). Quasi-Kohärenz von $\mathcal{F}$ bedeutet:

(Q) *Für jedes* $U \in \mathfrak{B}$ *und* $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = A$ *gilt mit* $\Gamma(U, \mathcal{F}) = M$ $\Gamma(D(f), \mathcal{F}) = M_f$, *und es ist für* $D(f) > D(g)$, $f, g \in A$, $r_{D(g)}^{D(f)}: \Gamma(D(f), \mathcal{F}) \to \Gamma(D(g), \mathcal{F})$ *der kanonische Homomorphismus* $M_f \to M_g$.

Wir zeigen nun: *Die Kategorie* $\boldsymbol{K}''$ *der q.k. Garben auf* X *ist eine abelsche Kategorie.*

Dazu bilden wir Kern $\mathcal{F}'$ und Kokern $\mathcal{F}''$ eines Morphismus $u: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \boldsymbol{K}''$, in der größeren Kategorie $\boldsymbol{K}$ der *Prägarben* (von $\mathcal{O}_X$-Moduln) *über* $\mathfrak{B}$ wie in 1.2.1. Da für alle $U \in \mathfrak{B}$ und $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ aus $0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ exakt $0 \to \mathcal{F}'(U)_f \to \mathcal{F}(U)_f \to \mathcal{G}(U)_f$ exakt folgt, erfüllen auch die Prägarben $\mathcal{F}'$ bzw. $\mathcal{F}''$ über $\mathfrak{B}$ die Bedingung (Q). Daraus folgt aber nach 1.2.1.: $\mathcal{F}'$ bzw. $\mathcal{F}''$ erfüllen (F_0') aus 1.1.2.: Man nehme für $U \in \mathfrak{B}$ als Menge $\mathfrak{B}'$ die Menge der speziellen offenen affinen Mengen $D(f)$ für alle $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Damit sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$ Garben über $\mathfrak{B}$, also aus $\boldsymbol{K}''$, und somit Kern und Kokern von $u: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in $\boldsymbol{K}''$. Die obige Behauptung ist somit bewiesen.

Gleichzeitig hat sich ergeben: *Die in* 1.2.2. *angegebenen Kriterien für die Exaktheit einer Folge* $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ *von q.k. Garben auf* X *gelten unverändert für ein Präschema* $(X, \mathcal{O}_X)$.

Die *kohärenten Garben* auf X bilden eine abelsche Unterkategorie der Kategorie der q.k. Garben mit folgender Eigenschaft: Sind $\mathcal{F}', \mathcal{F}, \mathcal{F}''$ q.k. und ist $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ exakt, so ist mit zweien der $\mathcal{F}', \mathcal{F}, \mathcal{F}''$ auch die dritte Garbe kohärent.

(A) *In der Kategorie* $\boldsymbol{K}''$ *der q.k. Garben, auf die wir uns im folgenden immer beschränken wollen, existieren direkte Limites beliebiger direkter Systeme* $(\mathcal{F}_i, u_j^i)$ (1.1.1.).

BEWEIS. Für $U \in \mathfrak{B}$ bilde man $\mathscr{F}(U) = \varinjlim \mathscr{F}_i(U)$. Man erhält so eine Prägarbe $\mathscr{F}$ über $\mathfrak{B}$. $\mathscr{F}$ erfüllt aber wegen der Vertauschbarkeit von Quotientenbildung und direkten Limites ([13], chap. 0, 1.3.) die obige Bedingung (Q) und ist somit eine q.k. Garbe über $\mathfrak{B}$. Also ist $\mathscr{F} = \varinjlim \mathscr{F}_i$ in $\boldsymbol{K}''$.

(B) *Ist J eine teilweise geordnete aufsteigend gefilterte Menge, so ist der Funktor $\varinjlim_{i \in J} \mathscr{F}_i$ ein exakter Funktor* (vgl. [3], chap. II, 4.) *von der Kategorie der direkten Systeme $(\mathscr{F}_i, u_j^i)$ über J mit Werten in $\boldsymbol{K}''$ in die Kategorie $\boldsymbol{K}''$.*

BEWEIS. Dies ergibt sich mit der unter (A) angegebenen Konstruktion von $\varinjlim_{i \in J} \mathscr{F}_i$ über $\mathfrak{B}$ aus der Tatsache, daß $\varinjlim_{i \in J} \mathscr{F}_i(U)$ in der Kategorie der $\mathcal{O}(U)$-Moduln ein exakter Funktor für alle $U \in \mathfrak{B}$ ist.

Mit einfachen Fortsetzungssätzen für q.k. Garben ([13], chap. I, 9.4.) ergibt sich ([13], chap. I, 9.4.9.):

Jede q.k. Garbe auf einem Präschema X ist direkter Limes von kohärenten Untergarben.

Da die Klassen von Typen kohärenter Garben auf X eine Menge bilden und in einer abelschen Kategorie direkte Limites sich stets als Quotientenobjekte direkter Summen ergeben ([9], chap. I, 1.8.), gilt:

(C) *Es existiert eine Familie $(\mathscr{F}_i)_{i \in I}$ von kohärenten Garben $\mathscr{F}_i$ auf X, so daß für jede q.k. Garbe $\mathscr{F}$ auf X ein Epimorphismus $u: (\bigoplus_{i \in I} \mathscr{F}_i)^J \to \mathscr{F}$*[5]*) existiert* ($\bigoplus_{j \in J} \mathscr{F}_i$ *ist dann ein Generator der Kategorie $\boldsymbol{K}''$ im Sinne von* ([9], chap. I, 1.9.)).
Jede aufsteigende Folge von q.k. Untergarben von $\mathscr{F}_i$ ist stationär.

(A) bis (C) sind gerade die Eigenschaften einer abelschen Kategorie, die in [6] einer allgemeinen Theorie der *injektiven Objekten in abelschen Kategorien* zugrundegelegt werden. Insbesondere existieren also in unserer Kategorie $\boldsymbol{K}''$ der q.k. Garben auf X genügend viele injektive Objekte, d.h. zu jedem $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}''$ existiert ein Monomorphismus $u: \mathscr{F} \to \mathscr{I}$, $\mathscr{I}$ injektiv in $\boldsymbol{K}''$ ([9], chap. I, 1.10.). Hierfür läßt sich auch ein kurzer direkter Beweis angeben ([6], 3.h., p. 17—07 f.)

1.2.4. *Funktoren auf der Kategorie der q.k. Garben, abgeleitete Funktoren* ([7], 3.4.). $(X, \mathcal{O}_X)$ sei ein Präschema, $\mathscr{F}$ eine q.k. Garbe auf X. Dann ist der Modul $\Gamma(X, \mathscr{F})$ der *globalen Schnittflächen* von $\mathscr{F}$ ein $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$-Modul. *Der Funktor $\Gamma: \mathscr{F} \to \Gamma(X, \mathscr{F})$ von der Kategorie der q.k. Garben auf X in die Kategorie der k-Moduln ist linksexakt. Ist X affin, so ist Γ sogar exakt.*

BEWEIS. Nur die erste Behauptung bedarf eines Beweises. Mit der wie in 1.2.3. aus den offenen affinen Mengen bestehenden Basis $\mathfrak{B}$ für die Topologie von X ist $\Gamma(X, \mathscr{F}) = \varprojlim_{U \in \mathfrak{B}} \Gamma(U, \mathscr{F})$ (1.1.2.). Aus $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ exakt folgt $0 \to \mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}''(U) \to 0$ exakt für alle $U \in \mathfrak{B}$ und $\varprojlim$ ist ein linksexakter Funktor.

[5]) $(\mathscr{G})^J$ bedeutet $\bigoplus_{j \in J} \mathscr{G}_j$ mit $\mathscr{G}_j = \mathscr{G}$ für alle $j \in J$.

$f=(\varphi,\theta)$: $(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ sei ein Morphismus von Präschemata. Dann ist f_* (1.1.4.) ein linksexakter Funktor von der Kategorie der q.k. Garben auf X in die Kategorie der q.k. Garben auf Y. Besitzt f die Eigenschaft: i) Für jede offene affine Menge $V<Y$ ist $f^{-1}(V)$ affin auf X, oder ii) Es existiert eine Überdeckung $Y=\bigcup_\alpha V_\alpha$ durch offene affine V_α mit $f^{-1}(V_\alpha)$ affin auf X für alle α, so ist f_* sogar exakt.

Beweis. Ist $\mathcal{F}$ q.k. auf X, so ist $f_*(\mathcal{F})$ q.k. auf Y ([13], chap. I, 9.2.). Die Behauptung über Linksexaktheit bzw. Exaktheit ergibt sich unmittelbar aus der Definition von f_* und dem Exaktheitsverhalten des Funktors Γ.

Andere wichtige Funktoren sind die Bifunktoren i) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$, ii) $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$, iii) $\mathcal{F}\underset{\mathcal{O}}{\otimes}\mathcal{G}$, $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\boldsymbol{K}''$, der Kategorie der q.k. Garben auf $(X,\mathcal{O}_X)$.

i) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ ist ein Bifunktor von $\boldsymbol{K}''\times\boldsymbol{K}''$ in die Kategorie der abelschen Gruppen, kontravariant im 1., kovariant im 2. Argument. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ ist in beiden Argumenten linksexakt (S. [3], chap. II, 4.). $0\to\mathcal{F}'\xrightarrow{i}\mathcal{F}\xrightarrow{u}\mathcal{G}$ z.B. ist nämlich nach Definition (1.2.1.) genau dann exakt, wenn für alle $\mathcal{X}\in\boldsymbol{K}''$ die Folge von abelschen Gruppen $0\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{X},\mathcal{F}')\xrightarrow{i}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{X},\mathcal{F})\xrightarrow{u}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{X},\mathcal{G})$ exakt ist.

ii) $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ ist folgendermaßen definiert: $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}|U}(\mathcal{F}|U,\mathcal{G}|U)$ für U offen in X. Mit der natürlichen Einschränkung $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}|U}(\mathcal{F}|U,\mathcal{G}|U)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}|V}(\mathcal{F}|V,\mathcal{G}|V)$ für $U>V$ erhält man so eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln auf X. Ist $\mathcal{F}$ kohärent, so ist $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ q.k. Ist auch $\mathcal{G}$ kohärent, so ist $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ kohärent. Dies ergibt sich aus $\mathrm{Hom}_A(M,N)_S\simeq\mathrm{Hom}_{A_S}(M_S,N_S)$ für A-Moduln M, N, falls M endlich erzeugt ist ([13], chap. 0, 1.3.5.).

Es ist die Faser $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})_x\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x)$ ([18], 14.). $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ ist linksexakt in beiden Argumenten.

iii) $\mathcal{F}\underset{\mathcal{O}}{\otimes}\mathcal{G}$: Mit obiger Basis $\mathfrak{B}$ der offenen Mengen von X setzen wir für $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\boldsymbol{K}''$ $(\mathcal{F}\underset{\mathcal{O}}{\otimes}\mathcal{G})(U)=\mathcal{F}(U)\underset{\mathcal{O}(U)}{\otimes}\mathcal{G}(U)$ für $U\in\mathfrak{B}$. Wegen der Vertauschbarkeit von Tensorprodukt und Quotientenbildung ([13], chap. 0, 1.3.4.) wird dadurch eine q.k. Garbe über $\mathfrak{B}$ und damit auf X definiert. Mit $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist auch $\mathcal{F}\underset{\mathcal{O}}{\otimes}\mathcal{G}$ kohärent. Es ist $(\mathcal{F}\underset{\mathcal{O}}{\otimes}\mathcal{G})_x\simeq\mathcal{F}_x\underset{\mathcal{O}_x}{\otimes}\mathcal{G}_x$ (Vertauschbarkeit von direktem Limes und Tensorprodukt). $\mathcal{F}\underset{\mathcal{O}}{\otimes}\mathcal{G}$ ist rechts-exakt in beiden Argumenten.

Nach 1.2.3. enthält unsere Kategorie $\boldsymbol{K}''$ der q.k. Garben auf einem Präschema $(X,\mathcal{O}_X)$ genügend viele injektive Objekte. Dabei heißt $\mathcal{J}\in\boldsymbol{K}''$ *injektiv*, wenn der Funktor $\mathcal{F}\Rightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{J})$, $\mathcal{F}\in\boldsymbol{K}''$, exakt ist. S sei ein *additiver* und kovarianter *Funktor* von $\boldsymbol{K}''$ in eine abelsche Kategorie $\boldsymbol{H}$ (S heißt additiv, wenn für $u,v:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ $S(u+v)=S(u)+S(v)$), z.B. der Funktor $\mathcal{F}\Rightarrow\Gamma(X,\mathcal{F})$, $\mathcal{F}\Rightarrow f_*(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}\Rightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G},\mathcal{F})$, oder $\mathcal{F}\Rightarrow\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{G},\mathcal{F})$. Für $\mathcal{F}\in\boldsymbol{K}''$ heißt eine exakte Folge $0\to\mathcal{F}\xrightarrow{\varepsilon}\mathcal{J}^0\xrightarrow{d^0}\mathcal{J}^1\xrightarrow{d^1}\mathcal{J}^2\xrightarrow{d^2}\cdots$, $\mathcal{J}^n$ injektiv in $\boldsymbol{K}''$, eine *injektive Auflösung von* $\mathcal{F}$. Dann definiert die Folge $(S(\mathcal{J}^n)$,

$S(d^n))_{n\geq 0}$ einen Komplex in $\boldsymbol{H}$, dessen Cohomologieobjekte $R^nS(\mathscr{F}) = \text{Kern } S(d^n)/\text{Bild } S(d^{n-1})$ nur von $\mathscr{F}$ und nicht von der gewählten Auflösung abhängen. Dies sind die *abgeleiteten Funktoren von* S ([9], chap. I, 2.3., [3], chap. V., 3.). *Die Folge* $(R^nS)_{n\geq 0}$ *hat die Eigenschaften:*

(*i*) *Die* R^nS *sind (additive) Funktoren von* $\boldsymbol{K}''$ *in* $\boldsymbol{H}$.

(*ii*) *Für jede exakte Folge* $0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0$ *in* $\boldsymbol{K}''$ *hat man (verbindende) Morphismen* $\partial: R^nS(\mathscr{F}'')\to R^{n+1}S(\mathscr{F}')$ *in* $\boldsymbol{H}$.

(*iii*) *Für ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{F}' & \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{F}'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle u''} \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{G}' & \longrightarrow & \mathscr{G} & \longrightarrow & \mathscr{G}'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

in $\boldsymbol{K}''$ *mit exakten Zeilen hat man kommutative Diagramme in* $\boldsymbol{H}$

$$\begin{array}{ccc} R^nS(\mathscr{F}'') & \xrightarrow{\partial} & R^{n+1}S(\mathscr{F}') \\ {\scriptstyle R^nS(u'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R^{n+1}S(u')} \\ R^nS(\mathscr{G}'') & \xrightarrow{\partial} & R^{n+1}S(\mathscr{G}') \end{array}$$

(*iv*) *Für jede exakte Folge* $0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0$ *in* $\boldsymbol{K}''$ *ist die zugehörige Folge* $\cdots\xrightarrow{\partial} R^nS(\mathscr{F}')\to R^nS(\mathscr{F})\to R^nS(\mathscr{F}'')\xrightarrow{\partial} R^{n+1}S(\mathscr{F}')\to\cdots$ *exakt in* $\boldsymbol{H}$.

(*v*) *Ist* S *linksexakt, so sind die Funktoren* S *und* R^0S *natürlich isomorph.*

(*vi*) *Ist* $\mathscr{J}$ *injektiv in* $\boldsymbol{K}''$, *so ist* $R^nS(\mathscr{J}) = 0$ *für* $n > 0$.

Durch (*i*) bis (*vi*) ist die Folge $(R^nS)_{n\geq 0}$ bis auf Isomorphie eindeutig charakterisiert.

$0\to\mathscr{F}\xrightarrow{\varepsilon'}\mathscr{F}^0\xrightarrow{\delta^0}\mathscr{F}^1\xrightarrow{\delta^1}\mathscr{F}^2\xrightarrow{\delta^2}\cdots$ sei eine Auflösung von $\mathscr{F}$ in $\boldsymbol{K}''$, d.h. eine exakte Folge in $\boldsymbol{K}''$ mit nicht notwendig injektiven $\mathscr{F}^n$. Dann existieren Morphismen $v^n: \mathscr{F}^n\to\mathscr{J}^n$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{F} & \xrightarrow{\varepsilon'} & \mathscr{F}^0 & \xrightarrow{\delta^0} & \mathscr{F}^1 & \xrightarrow{\delta^1} & \mathscr{F}^2 & \xrightarrow{\delta^2} & \cdots \\ & & {\scriptstyle id}\downarrow & & {\scriptstyle v^0}\downarrow & & {\scriptstyle v^1}\downarrow & & {\scriptstyle v^2}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{F} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathscr{J}^0 & \xrightarrow{d^0} & \mathscr{J}^1 & \xrightarrow{d^1} & \mathscr{J}^2 & \xrightarrow{d^2} & \cdots \end{array}$$

in $\boldsymbol{K}''$ kommutativ ist. Daraus erhält man einen Morphismus der Komplexe in $\boldsymbol{H}$ $S(v): \big(S(\mathscr{F}^n), S(\delta^n)\big)\to\big(S(\mathscr{J}^n), S(d^n)\big)$ und Morphismen zwischen den Cohomologieobjekten dieser Komplexe $v^n_*: H^n\big(S(\mathscr{F}^*)\big)\to H^n\big(S(\mathscr{J}^*)\big) = R^nS(\mathscr{F})$. *Die* v^n_* *hängen nicht von der Wahl der* v^n, *sondern nur von der Auflösung* $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}^0\to\mathscr{F}^1\to\cdots$ *ab*, da die v^n bis auf Homotopie eindeutig bestimmt sind ([3], chap. V, 2.). Sie sind *Isomorphismen, wenn die* $\mathscr{F}^n$, $n\geq 0$, *S-azyklisch* sind, d.h. wenn $R^pS(\mathscr{F}^n) = 0$ für $p\geq 1$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{F} & \xrightarrow{\varepsilon'} & \mathscr{F}^0 & \xrightarrow{\delta^0} & \mathscr{F}^1 & \xrightarrow{\delta^1} & \mathscr{F}^2 & \xrightarrow{\delta^2} & \cdots \\ & & {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle u^0}\downarrow & & {\scriptstyle u^1}\downarrow & & {\scriptstyle u^2}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{G} & \xrightarrow{\eta'} & \mathscr{G}^0 & \xrightarrow{\tau^0} & \mathscr{G}^1 & \xrightarrow{\tau^1} & \mathscr{G}^2 & \xrightarrow{\tau^2} & \cdots \end{array}$$

sei ein kommutatives Diagramm in $\boldsymbol{K}''$ mit exakten Zeilen. Die Auflösungen $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}^0\to\mathscr{F}^1\to\cdots$ und $0\to\mathscr{G}\to\mathscr{G}^0\to\mathscr{G}^1\to\cdots$ definieren Morphismen $v_*^n: H^n\big(S(\mathscr{F}^*)\big)\to R^nS(\mathscr{F})$ und $w_*^n: H^n\big(S(\mathscr{G}^*)\big)\to R^nS(\mathscr{G})$. Ferner definieren u und die u^n Morphismen $R^nS(u): R^nS(\mathscr{F})\to R^nS(\mathscr{G})$, $u_*^n: H^n\big(S(\mathscr{F}^*)\big)\to H^n\big(S(\mathscr{G}^*)\big)$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^n\big(S(\mathscr{F}^*)\big) & \xrightarrow{v_*^n} & R^nS(\mathscr{F}) \\ {\scriptstyle u_*^n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R^nS(u)} \\ H^n\big(S(\mathscr{G}^*)\big) & \xrightarrow{w_*^n} & R^nS(\mathscr{G}) \end{array}$$

kommutativ ([7], p. 3—11[6]).

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{F}^0 & \longrightarrow & \mathscr{F}^1 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{G} & \longrightarrow & \mathscr{G}^0 & \longrightarrow & \mathscr{G}^1 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E}^0 & \longrightarrow & \mathscr{E}^1 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

sei ein kommutatives Diagramm in $\boldsymbol{K}''$ mit exakten Zeilen, ferner seien die Folgen $0\to S(\mathscr{F}^n)\to S(\mathscr{G}^n)\to S(\mathscr{E}^n)\to 0$ exakt in $\boldsymbol{H}$ für $n\geqq 0$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^n\big(S(\mathscr{G}^*)\big) & \longrightarrow & H^n\big(S(\mathscr{E}^*)\big) & \xrightarrow{\partial} & H^{n+1}\big(S(\mathscr{F}^*)\big) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & R^nS(\mathscr{G}) & \longrightarrow & R^nS(\mathscr{E}) & \xrightarrow{\partial} & R^{n+1}S(\mathscr{F}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

kommutativ ([7], p. 3—13).

Die letzteren Aussagen sollen im folgenden Abschnitt zur Berechnung der abgeleiteten Folge $(R^nS)_{n\geqq 0}$ mit Hilfe der Čechschen Überdeckungen angewandt werden. Wir interessieren uns dabei vornehmlich für die abgeleiteten Funktoren $R^n\Gamma(\ )$ und $R^nf_*(\ )$. Die ersteren werden als *Cohomologiemoduln auf* X und mit $H^n(X,\ )$, die letzteren als *direkte Bilder bei* $f: (X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ bezeichnet.

1.2.5. *Berechnung der abgeleiteten Funktoren nach* Čech, *Schemata.* $(X,\mathcal{O}_X)$ sei ein Präschema, V eine offene Menge von X. Mit der kanonischen Injektion $i: V\to X$ ist für eine q.k. Garbe $\mathscr{F}$ auf X $i^*(\mathscr{F})$ q.k. auf V: Es ist nach 1.1.3., 1.1.4. $i^*(\mathscr{F})(U)\simeq\mathscr{F}(U)$ für jedes offene $U\subset V$, und diese Isomorphie ist mit den Restriktionshomomorphismen $r_{U'}^{U}$ für $U\supset U'$ verträglich. $\mathscr{F}\Rightarrow i^*(\mathscr{F})$ ist ein *exakter Funktor.* $\mathscr{F}\Rightarrow i_*\big(i^*(\mathscr{F})\big)$ ist daher ein linksexakter Funktor von der Kategorie $\boldsymbol{K}''$ der q.k. Garben auf X in $\boldsymbol{K}''$. Wir schreiben auch $i_*\big(i^*(\mathscr{F})\big)=\mathscr{F}_V$.

Mit $g_U = r^U_{V\cap U}: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V\cap U) = \mathscr{F}_V(U)$ für jedes offene $U \subset X$ erhält man einen Morphismus g_V des Funktors $\mathrm{Id}: \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}$ in den Funktor $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}_V$ (vgl. 1.1.1.).

$\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ sei eine endliche Familie von offenen Mengen von X. Wir schreiben $\mathscr{F}_i$ anstelle von $\mathscr{F}_{U_i}$, $\mathscr{F}_{ij}$ anstelle von $(\mathscr{F}_i)_j$, ..., g_i anstelle von g_{U_i}. $\boldsymbol{K}''$ ist eine abelsche Kategorie mit endlichen direkten Produkten (diese stimmen in beliebigen additiven Kategorien mit den endlichen direkten Summen überein ([9], chap. I, 1.3.) und direkte Summen sind Spezialfälle von direkten Limites (1.1.1.)). Zu $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ hat man eine Familie von Funktoren $(\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}_i)_{i\in I}$ von $\boldsymbol{K}''$ in $\boldsymbol{K}''$, für jedes $i \in I$ einen Morphismus g_i des Funktors $\mathrm{Id}: \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}$ in den Funktor $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}_i$ und für jedes Paar (i, j) einen Isomorphismus g_{ij} des Funktors $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}_{ij}$ mit dem Funktor $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}_{ji}$, so daß $g_{ij} \circ g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$. Dann definiert man einen Funktor $\mathscr{C}^*$ von $\boldsymbol{K}''$ in die Komplexe über $\boldsymbol{K}''$: I werde vollständig geordnet, $\mathscr{C}^n(\mathscr{F}) = \prod_{i_0<i_1<\cdots<i_n} \mathscr{F}_{i_0 i_1 \ldots i_n}$, wo das Produkt über alle aufsteigenden Folgen von $n+1$ Elementen aus I erstreckt wird. Mit der natürlichen Projektion $p_{i_0 \ldots i_n}: \mathscr{C}^n(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}_{i_0 \ldots i_n}$ erhält man einen Morphismus $g_{i_k} \circ p_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{n+1}}: \mathscr{C}^n(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{n+1} i_k}$. Mit $d^n_{i_0 \ldots i_{n+1}}$ bezeichnen wir die Zusammensetzung des Morphismus $\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k g_{i_k} \circ p_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{n+1}}$ und des kanonischen Isomorphismus von $\mathscr{F}_{i_0 i_1 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{n+1} i_k}$ auf $\mathscr{F}_{i_0 i_1 \ldots i_k \ldots i_{n+1}}$. Dann erhält man den *Corandmorphismus* $d^n = \prod_{i_0<\cdots<i_{n+1}} d^n_{i_0 \ldots i_{n+1}}: \mathscr{C}^n(\mathscr{F}) \to \mathscr{C}^{n+1}(\mathscr{F})$.

Es ist $d^{n+1} \circ d^n = 0$. $\big(\mathscr{C}^n(\mathscr{F}), d^n\big)$ ist ein *Komplex über* $\boldsymbol{K}''$, der alternierende *Čechsche Komplex* oder auch *Koszulkomplex zu* $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$. Er wird mit $\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ bezeichnet.

Für offenes $U \subset X$ ist $\Gamma\big(U, \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) = \prod_{i_0<i_1<\cdots<i_n} \mathscr{F}(U_{i_0 i_1 \ldots i_n} \cap U)$, wo $U_{i_0 i_1 \ldots i_n} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_n}$.

Ist $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von X, d.h. $X = \bigcup_i U_i$, so hat man vermöge der $g_i: \mathscr{F} \to \mathscr{F}_i$ einen Morphismus $\varepsilon: \mathscr{F} \to \prod_i \mathscr{F}_i$. *Die Folge*

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{d^0} \mathscr{C}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{d^1} \cdots \to \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{d^n} \mathscr{C}^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \cdots$$

ist dann exakt, bildet also eine Auflösung von $\mathscr{F}$ *im Sinne von* 1.2.4. ([6], p. 3–18 oder [8], chap. II, 5.2.), *die Čechsche Auflösung zu* $\mathfrak{U}$.

Bezeichnen wir für einen Funktor S wie in 1.2.4. die Cohomologieobjekte des Komplexes $\big(S(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})), S(d^n)\big)_{n\geqq 0}$ mit $S^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$, dann sind dies Funktoren von $\mathscr{F}$, und man hat (1.2.4.) Morphismen von Funktoren $v^n_{\mathscr{F}}: S^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to R^n S(\mathscr{F})$. Ist die Folge $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{E} \to 0$ exakt in $\boldsymbol{K}''$ und sind auch die Folgen $0 \to S\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) \to S\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{G})\big) \to S\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{E})\big) \to 0$ exakt in $\boldsymbol{H}$ für $n \geqq 0$, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S^n(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) & \longrightarrow & S^n(\mathfrak{U}, \mathscr{E}) & \xrightarrow{\partial} & S^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \\ \downarrow{\scriptstyle v^n_{\mathscr{G}}} & & \downarrow{\scriptstyle v^n_{\mathscr{E}}} & & \downarrow{\scriptstyle v^{n+1}_{\mathscr{F}}} \\ R^n S(\mathscr{G}) & \longrightarrow & R^n S(\mathscr{E}) & \xrightarrow{\partial} & R^{n+1} S(\mathscr{F}) \end{array}$$

kommutativ

Sind für $n \geqq 0$ die $\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ S-azyklisch, d.h. ist $R^p S\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) = 0$ für $p \geqq 1$, so sind die $v^n_{\mathscr{F}}$ sämtlich Isomorphismen (1.2.4.), und man kann die abgeleiteten Funktoren $R^p S$ mit Hilfe der Čechschen Auflösung berechnen.

Für das folgende benötigen wir die beiden

VORAUSSETZUNGEN. (*i*) *Der Durchschnitt von je zwei offenen affinen Mengen des Präschemas* $(X, \mathscr{O}_X)$ *ist wieder eine affine Menge.*

(*ii*) *Für den Morphismus* $f = (\varphi, \theta) : (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ *der Präschemata gilt: Ist* U' *offen und affin in* Y *und* U *offen und affin in* X, *so ist* $U \cap \overline{\varphi}^1(U')$ *affin in* X.

$\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ sei eine *endliche Überdeckung von* X *durch offene affine Mengen* U_i. Dann gilt:

Unter der Voraussetzung (*i*) *ist der Čechsche Komplex* $\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ *für jedes* $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}''$ Γ*-azyklisch. Unter den Voraussetzungen* (*i*) *und* (*ii*) *ist der Čechsche Komplex* $\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ *für jedes* $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}''$ f_**-azyklisch.*

Mit $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{E} \to 0$ *exakt in* $\boldsymbol{K}''$ *sind dann auch die Folgen*

$$0 \to \Gamma\big(\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) \to \Gamma\big(\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{G})\big) \to \Gamma\big(\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{E})\big) \to 0 \quad \textit{und}$$

$$0 \to f_*\big(\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) \to f_*\big(\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{G})\big) \to f_*\big(\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{E})\big) \to 0 \quad \textit{exakt.}$$

BEWEIS. Hinsichtlich der letzten Behauptung beachte man, daß nach Obigem $\Gamma\big(V, \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) = \prod_{i_0 < i_1 < \cdots < i_n} \mathscr{F}(U_{i_0 i_1 \ldots i_n} \cap V)$. Für $V = X$ ist nun nach Voraussetzung (*i*) $U_{i_0 \ldots i_n} \cap V$ wieder affin. Aus der Exaktheit von $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{E} \to 0$ ergibt sich aber die Exaktheit von $0 \to \mathscr{F}(U_{i_0 i_1 \ldots i_n}) \to \mathscr{G}(U_{i_0 \ldots i_n}) \to \mathscr{E}(U_{i_0 \ldots i_n}) \to 0$ und damit die Behauptung. Ebenso ist nach Voraussetzung (*ii*) für $V = \overline{\varphi}^1(U')$, U' offen und affin in Y, $U_{i_0 \ldots i_n} \cap V$ affin.

Hinsichtlich der ersten beiden Behauptungen haben wir $R^p S\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) = 0$ für $p \geqq 1$ und $S = \Gamma$ bzw. f_* zu zeigen. Dazu betrachten wir die folgende injektive Auflösung von $\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) : 0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{J}^0 \xrightarrow{d^0} \mathscr{J}^1 \xrightarrow{d^1} \mathscr{J}^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$ sei eine injektive Auflösung von $\mathscr{F}$. Dann ist $0 \to \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{J}^0) \xrightarrow{d^0} \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{J}^1) \xrightarrow{d^1} \cdots$ eine *injektive Auflösung von* $\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$. Wie wir aus [6], p. 17—07 und p. 17—30 entnehmen, ist nämlich für offenes affines $V \subset X$, $i : V \to X$, mit $\mathscr{J}$ auch $\mathscr{J}_V = i_*\big(i^*(\mathscr{J})\big)$ injektiv, nach Definition ist $\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{J}) = \prod_{i_0 < i_1 < \cdots < i_n} \mathscr{J}_{i_0 i_1 \ldots i_n}$, und $U_{i_0 \ldots i_n} = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_n}$ ist affin nach Voraussetzung (*i*). Die Exaktheit der Folge $0 \to \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{J}^0) \to \cdots$ ergibt sich aus der Exaktheit von $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{J}^0 \to \mathscr{J}^1 \to \cdots$ wie oben beim Beweis der letzten Behauptung. Anwendung der Funktoren Γ und f_* auf den Komplex $\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{J}^n), d^n\big)_{n \geqq 0}$ ergibt aber, wie man wieder wie oben erkennt, einen exakten Komplex. Folglich sind die $R^p\Gamma\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big)$ und die $R^p f_*\big(\mathscr{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\big) = 0$ für $p \geqq 1$.

Als FOLGERUNGEN erhält man:

Unter den Voraussetzungen (*i*) *und* (*ii*) *kann man die abgeleiteten Funktoren* $H^q(X, \mathscr{F}) = R^q\Gamma(X, \mathscr{F})$ *und* $R^q f_*(\mathscr{F})$, $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}''$, *mit Hilfe einer beliebigen Čech-*

schen Auflösung $\mathfrak{C}^*(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ *von* $\mathfrak{F}$ *zu einer endlichen Überdeckung* $\mathfrak{U}=(U_i)_{i\in I}$ *von* X *durch offene affine Mengen* $U_i<X$ *berechnen* (1.2.4.).

BEMERKUNG. Da für die in der größeren Kategorie aller $\mathcal{O}$-Moduln abgeleiteten Funktoren von Γ und f_* *angewandt auf Objekte* $\mathfrak{F}\in\boldsymbol{K}''$ dasselbe gilt ([7], 3. oder [8], chap. II, 5.), stimmen die wie oben definierten $H^q(X, \mathfrak{F})$ und $R^qf_*(\mathfrak{F})$ mit den dort definierten abgeleiteten Funktoren überein.

Besitzt X *eine endliche offene affine Überdeckung* $\mathfrak{U}$, *so daß alle Durchschnitte von je* $n+2$ *verschiedenen* $U_i\in\mathfrak{U}$ *leer sind, so ist* $\mathfrak{C}^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})=0$ *für* $q>n$, *also* $H^q(X, \mathfrak{F})=0$ *und* $R^qf_*(\mathfrak{F})=0$ *für alle* $q>n$ *und* $\mathfrak{F}\in\boldsymbol{K}''$.

Für ein affines Präschema X *ist für* $q>0$ *und alle* $\mathfrak{F}\in\boldsymbol{K}''$ $H^q(X, \mathfrak{F})=0$[6]. (Nach 1.2.4. ist $\mathfrak{F}\Rightarrow\Gamma(X, \mathfrak{F})$, $\mathfrak{F}\in\boldsymbol{K}''$, ein exakter Funktor.)

Besitzt der Morphismus $f=(\varphi, \theta):(X, \mathcal{O}_X)\to(Y, \mathcal{O}_Y)$ *die in* 1.2.4. *angegebenen Eigenschaften i) oder ii), so ist für* $q>0$ *und alle* $\mathfrak{F}\in\boldsymbol{K}''$ $R^qf_*(\mathfrak{F})=0$[6]. (Nach 1.2.4. ist dann nämlich $\mathfrak{F}\Rightarrow f_*(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{F}\in\boldsymbol{K}''$, ein exakter Funktor.)

Unter denselben Voraussetzungen gilt: $H^q(X, \mathfrak{F})$ *ist kanonisch isomorph zu* $H^q\big(Y, f_*(\mathfrak{F})\big)$.

BEWEIS. Ist $\mathfrak{U}'$ eine endliche offene affine Überdeckung von Y und $\mathfrak{U}=\big(\varphi^{-1}(U_i'); U_i'\in\mathfrak{U}'\big)$ eine ebensolche Überdeckung von X, so ist $\Gamma\big(\mathfrak{C}^n(\mathfrak{U}', f_*(\mathfrak{F}))\big)=\Gamma\big(\mathfrak{C}^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})\big)$.

Ist $f:(X, \mathcal{O}_X)\to(Y, \mathcal{O}_Y)$ *ein Morphismus der Präschemata und* $\mathfrak{F}$ *q.k. auf* X, *so sind auch die* $R^qf_*(\mathfrak{F})$ *q.k. auf* Y. *Ist* U' *offen und affin in* Y, *so ist* $\Gamma\big(U', R^qf_*(\mathfrak{F})\big)\simeq H^q\big(f^{-1}(U'), \mathfrak{F}\big)$ ([7], p. 3–22).

Zu den Voraussetzungen (*i*) und (*ii*) ist folgendes zu bemerken: Sie sind im allgemeinen nicht erfüllt. Um sie sicher zu stellen, hat man den Begriff des Präschemas zu dem des *Schemas* einzuschränken. Nach GROTHENDIECK ([13], chap. I, 2.5.) definiert man:

Gegeben sei ein festes Präschema S. Ein Präschema X zusammen mit einem Morphismus $f:X\to S$ der Präschemata heißt ein *Präschema über* S oder *S-Präschema*. Ist S affin zum Ring A, so spricht man auch von einem Präschema über A bzw. *A-Präschema*.

X, Y seien S-Präschemata. Ein Morphismus $u:X\to Y$ der Präschemata ist ein *Morphismus der Präschemata über* S oder ein S-Morphismus, wenn das Diagramm $X\overset{u}{\to}Y$ kommutativ ist.
$\searrow\swarrow$
S

Die S-Präschemata mit den S-Morphismen bilden eine Kategorie. In dieser Kategorie existiert das (direkte) *Produkt von zwei S-Präschemata* X, Y im Sinne von 1.1.1. ([13], chap. I, §3). Es wird mit $X\underset{S}{\times}Y$ bezeichnet.

Ein S-Präschema X heißt *separiert*, wenn der Diagonalmorphismus $X\to X\underset{S}{\times}X$ *abgeschlossen* ist (s. [13], chap. I, §4, §5). X heißt dann auch ein *S-Schema*. Jedes Präschema ist auf natürliche Weise ein Präschema über

[6]) Hiervon gilt auch die Umkehrung. Vgl. dazu [12] und [7], exp. 2.

dem affinen Schema $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{Z})$, das zum Ring $\boldsymbol{Z}$ der ganzen Zahlen gehört. Ein Präschema X wird *Schema* genannt, wenn das $\boldsymbol{Z}$-Präschema X separiert ist. Jedes affine Schema ist ein Schema ([13], chap. I, 5.5.).

Die S-Schemata bzw. die Schemata bilden mit den S-Morphismen bzw. den $\boldsymbol{Z}$-Morphismen (das sind die gewöhnlichen Morphismen von Präschemata) jeweils eine Kategorie.

Die Voraussetzungen (i) und (ii) sind jedenfalls dann erfüllt, wenn man sich auf Schemata beschränkt ([13], chap. I, 5.5.10.).

k sei ein Körper. Ein *algebraisches k-Präschema* X ist ein k-Präschema, das sich durch endlich viele offene affine Mengen U_i überdecken läßt, deren zugehörige Ringe A_i (als Ringe) über k endlich erzeugt sind. (Vermöge des Morphismus $X \to \mathrm{Spec}(k)$ hat man kanonische Injektionen $k \to A_i$.) Ist X ein Schema oder, was dasselbe ist, ein k-Schema, so heißt X ein *algebraisches k-Schema* oder ein *algebraischer Raum*.

Ein Präschema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *reduziert* bzw. *normal* bzw. *regulär* im Punkte $x \in X$, wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_x$, die Faser der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ über x, reduziert (d.h. ohne nilpotente Elemente) bzw. normal (d.h. integer und ganz abgeschlossen) bzw. regulär (d.h. von endlicher globaler homologischer Dimension) ist.

1.3. Projektive Schemata

1.3.1. *Projektive Schemata über einem affinen Schema* ([12], [18], chap. III). In [12] wird für ein beliebiges Präschema Y der Begriff des *projektiven Präschemas X über Y* oder des *projektiven Morphismus* $\varphi: X \to Y$ definiert. (Wir schreiben hier anstelle von $f = (\varphi, \theta): (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ in 1.1.4. kürzer $\varphi: X \to Y$.) Ist $\mathcal{F}$ eine q.k. Garbe auf X, so interessiert man sich für die direkten Bilder $R^q\varphi_*(\mathcal{F})$. Das sind q.k. Garben auf Y. Ist U offen in Y, so gilt $R^q\varphi_*(\mathcal{F})\,|\,U = R^q\big(\varphi\,|\,\overline{\varphi}^1(U)\big)_*\big(\mathcal{F}\,|\,\overline{\varphi}^1(U)\big)$. Für offenes affines $U' \subset U$ ist nämlich nach 1.2.5.

$$R^q\varphi_*(\mathcal{F})\,(U') = \Gamma\big(U', R^q\varphi_*(\mathcal{F})\big) \simeq H^q\big(\overline{\varphi}^1(U'), \mathcal{F}\big) = H^q\big(\overline{\varphi}^1(U'), \mathcal{F}\,|\,\overline{\varphi}^1(U)\big)$$
$$\simeq \Gamma\big(U', R^q(\varphi\,|\,\overline{\varphi}^1(U))_*\,(\mathcal{F}\,|\,\overline{\varphi}^1(U))\big) = R^q(\varphi\,|\,\overline{\varphi}^1(U))_*\,(\mathcal{F}\,|\,\overline{\varphi}^1(U))\,(U').$$

Daher genügt es, sich auf ein *affines Schema* Y zu beschränken. Für einen projektiven Morphismus $\varphi: X \to Y$, Y affin, wird aber $R^q\varphi_*(\mathcal{F})$ als q.k. Garbe über Y durch den $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = A$-Modul $\Gamma\big(Y, R^q\varphi_*(\mathcal{F})\big) \simeq H^q(X, \mathcal{F})$ bestimmt. Wir beschränken uns also auf projektive Morphismen $\varphi: X \to Y$, Y affin, und die Berechnung von $H^q(X, \mathcal{F})$, $\mathcal{F}$ q.k. auf X. Wir werden in 1.3.3. zeigen: *Für kohärentes $\mathcal{F}$ auf X sind die $H^q(X, \mathcal{F})$ endlich erzeugte A-Moduln.* Damit ist gezeigt: *Die Bilder kohärenter Garben bei projektiven Morphismen sind wieder kohärent.* Allgemeiner gilt dies für beliebige *eigentliche* Morphismen. Zum Beweis führt man die letztere Aussage mit Hilfe des Chowschen Lemmas auf die erstere zurück. Hierzu sei auf [11] verwiesen. Im Spezialfall: Y = affines Schema, zu einem *Körper k* gehörig, erhält man so für ein projektives Schema über k: Die Cohomologiemoduln $H^q(X, \mathcal{F})$

sind für kohärente $\mathfrak{F}$ endlich-dimensional über k. Speziell gilt dies für $H^0(X, \mathfrak{F}) = \Gamma(X, \mathfrak{F})$, den Modul der Schnitte von $\mathfrak{F}$.

Ein *projektives Schema* $(X, \mathcal{O}_X)$ *über dem* zum Ring A gehörigen *affinen Schema* $(Y, \tilde{A})$, oder ein *projektives Schema über* A wird gegeben durch eine *graduierte* A*-Algebra* B, die von endlich vielen Elementen 1. Grades erzeugt wird: $B = \bigoplus_{n \geqq 0} B^n = A[t_0, \ldots, t_r]$, $t_i \in B^1$, $B^0 = A$. $(X, \mathcal{O}_X)$ entsteht aus B folgendermaßen: Man versieht das projektive Spektrum des graduierten Ringes B, $X = \mathrm{Spec}^0(B) = \left(\mathfrak{p};\ \mathfrak{p} \text{ homogenes Primideal in } B,\ \mathfrak{p} \not\supset \bigoplus_{n \geqq 1} B^n\right)$, mit der Zariski-Topologie: Eine Basis $\mathfrak{B}$ derselben bilden die Mengen $D(f) = \left(x;\ x \in X,\ f(x) \neq 0\right)$, f homogen $\in B$. $f(x) \neq 0$ bedeutet wieder $f \notin \mathfrak{p}_x$. Es ist $D(f) \cap D(g) = D(fg)$. Mit $\tilde{B}^0\left(D(f)\right) = (B_f)^0 = (b/f^n;\ b \in B,\ n \geqq 0,\ \mathrm{Grad}\ b - \mathrm{Grad}\ f^n = 0)$, dem Bestandteil 0-ten Grades des Quotientenringes von B nach der multiplikativ abgeschlossenen Menge $S_f = (f^n;\ n \geqq 0)$ — letzterer ist graduiert, da S_f nur aus homogenen Elementen besteht —, und den kanonischen Homomorphismen $r_g^f : (B_f)^0 \to (B_g)^0$ für $D(f) \supset D(g)$ erhält man wie in 1.2.1. eine *Garbe* von Ringen über $\mathfrak{B}$. Erweiterung auf X liefert nach 1.1.2. eine Garbe $\tilde{B}^0$ von Ringen auf X mit $\Gamma\left(D(f), \tilde{B}^0\right) = (B_f)^0$ für alle homogenen $f \in B$. Das Paar $(X, \tilde{B}^0)$ heißt *das zu* B *gehörige projektive Schema*. Daß der geringte Raum $(X, \tilde{B}^0)$ tatsächlich ein Schema im Sinne von 1.2.3. und 1.2.5. ist, ist noch nachzuweisen. Anders als im affinen Fall ist hier der graduierte Ring B durch das Schema $(X, \tilde{B}^0)$ *nicht* eindeutig bestimmt.

Es sei $t \in B^1$, $t \neq 0$. Dann ist B_t ein graduierter Ring und $(B_t)^0$ ein Unterring von B_t. Es ist $B_t = (B_t)^0[t, t^{-1}]$ und zwar frei über $(B_t)^0$. Die homogenen Primideale $\mathfrak{p}$ von B mit $t \notin \mathfrak{p}$ entsprechen nun eineindeutig den homogenen Primidealen von B_t: $\mathfrak{p} \leftrightarrow \mathfrak{p}_t$, und die letzteren entsprechen eineindeutig den Primidealen von $(B_t)^0$: $\mathfrak{p}_t \leftrightarrow \mathfrak{p}_t \cap (B_t)^0$. Ferner gilt für $D(f) \subset D(t)$, f homogen $\in B$: $f \notin \mathfrak{p}$ ist gleichbedeutend mit $\frac{f}{t^n} \notin \mathfrak{p}_t \cap (B_f)^0$, $\frac{f}{t^n} \in (B_t)^0$, und $(B_f)^0 \simeq (B_t)^0_{f/t^n}$. Somit ist $\left(D(t), \tilde{B}^0 \middle| D(t)\right) \cong \left(\mathrm{Spec}\left((B_t)^0\right), \widetilde{(B_t)^0}\right)$ als geringter Raum, d.h. $D(t)$ ist offen und affin zum Ring $(B_t)^0$. Für $B = A[t_0, \ldots, t_r]$, $t_i \in B^1$, bilden die $X_i = D(t_i)$ somit eine endliche offene affine Überdeckung von X zu Ringen $(B_{t_i})^0 = A\left[\frac{t_0}{t_i}, \ldots, \frac{t_r}{t_i}\right]$, die also mit A ebenfalls noethersch sind. $(X, \tilde{B}^0)$ ist daher ein Präschema im Sinne von 1.2.3., falls A *noethersch* ist, was wir im folgenden immer voraussetzen wollen. Ebenso ergibt sich: $X_i \cap X_j = D(t_i t_j)$ ist offen und affin, und der Ring $\Gamma(X_i \cap X_j, \tilde{B}^0) = (B_{t_i t_j})^0$ wird von der Vereinigung der kanonischen Bilder von $\Gamma(X_i, \tilde{B}^0) = (B_{t_i})^0$ und $\Gamma(X_j, \tilde{B}^0) = (B_{t_j})^0$ erzeugt. Nach [*13*], chap. I, 5.5.6. ist $(X, \tilde{B}^0)$ also ein Schema im Sinne von 1.2.5. Die kanonischen Homomorphismen $A \to (B_{t_i})^0$ ergeben Morphismen $\varphi_i : X_i \to Y$ der zugehörigen affinen Schemata, die sich zu einem Morphismus $\varphi : X \to Y$ zusammensetzen. Dies ist der *projektive Morphismus* zu der graduierten A-Algebra B. X läßt sich auch als *Quotientenraum* eines offenen Teils

eines affinen Schemas auffassen: Wir betrachten das affine Schema $(S, \tilde{B})$ zum Ring B und in S die abgeschlossene Menge $O = \{x;\ \mathfrak{p}_x \supset \bigoplus_{n \geq 1} B^n\}$. $T = S - O$ ist dann offen in S, und es ist $T = \bigcup_i T_i$, $T_i = D(t_i) = \{x;\ x \in S,\ t_i(x) \neq 0\}$, also offen und affin zum Ring B_{t_i}. Den kanonischen Monomorphismen $(B_{t_i})^0 \to B_{t_i}$ entsprechen Epimorphismen $\psi_i : T_i \to X_i$ der zugehörigen affinen Schemata, die sich zu einem Epimorphismus $\psi : T \to X$ zusammensetzen. Letzterer hat die Eigenschaft: $\overline{\psi}^1(X_i) = T_i$ ist offen und affin in T für alle X_i einer offenen affinen Überdeckung $\bigcup_i X_i = X$. Dies ist die Eigenschaft *ii*) aus 1.2.4., die nach 1.2.5. $R^q \psi_*(\mathscr{F}) = 0$ für $q > 0$ impliziert. Für q.k. $\mathscr{F}$ auf T ist somit $R^q(\varphi\psi)_*(\mathscr{F}) \simeq R^q\varphi_*(\psi_*\mathscr{F})$. Da in $\varphi : X \to Y$ Y affin ist, ist dazu nur zu zeigen $\Gamma\big(Y, R^q(\varphi\psi)_*(\mathscr{F})\big) \simeq \Gamma\big(Y, R^q\varphi_*(\psi_*\mathscr{F})\big)$. Nun ist die linke Seite isomorph $H^q(T, \mathscr{F})$, die rechte Seite isomorph $H^q(X, \psi_*\mathscr{F})$. Die letzten beiden Moduln sind aber zufolge der Eigenschaft *ii*) von ψ isomorph (1.2.5., Folgerungen).

M sei ein graduierter B-Modul, $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} M^n$. Analog wie oben erhält man mit $\tilde{M}^0\big(D(f)\big) = (M_f)^0$ für jedes homogene $f \in B$ — M_f ist dann ein graduierter B_f-Modul — und den kanonischen Homomorphismen $r_g^f : (M_f)^0 \to (M_g)^0$ für $D(f) \supset D(g)$ eine Garbe von Moduln über $\mathfrak{B}$ und damit einen $\tilde{B}^0$-Modul auf X: $\tilde{M}^0$. $\tilde{M}^0$ ist q.k. auf X, und es ist $\tilde{M}^0(X_i) = (M_{t_i})^0$. *$M \Rightarrow \tilde{M}^0$ ist ein additiver exakter Funktor von der Kategorie $\mathbf{C}$ der graduierten B-Moduln mit den homogenen Homomorphismen vom Grade 0 als Morphismen in die Kategorie $\mathbf{K}$ der q.k. Garben auf X.* Es ist die Faser über $x \in X$ $(\tilde{M}^0)_x \simeq (M_{\mathfrak{p}_x})^0$, ein $(B_{\mathfrak{p}_x})^0$-Modul.

Für eine ganze Zahl p definiert man $M(p) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} M(p)^n$, $M(p)^n = M^{p+n}$. Wir bezeichnen die Strukturgarbe des projektiven Schemas $(X, \tilde{B}^0)$ auch wieder mit $\mathcal{O}_X$. $B(p)$ ist ein graduierter B-Modul. Wir definieren: $\mathcal{O}_X(p) = \widetilde{B(p)}^0$. $\mathcal{O}_X(p)$ ist offenbar lokal isomorph zu $\mathcal{O}_X$, insbesondere also kohärent. Für eine beliebige q.k. Garbe $\mathscr{F}$ auf X definiert man $\mathscr{F}(p) = \mathscr{F} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_X(p)$. $\mathscr{F}(p)$ ist lokal isomorph zu $\mathscr{F}$, also q.k., und kohärent, falls $\mathscr{F}$ kohärent ist. Eine äquivalente Definition des Funktors $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}(p)$ findet man in [*18*], 54.

Satz 1. *Für jedes $\mathscr{F} \in \mathbf{K}$ existiert ein Epimorphismus $\bigoplus_\alpha \mathcal{O}(p_\alpha) \to \mathscr{F} \to 0$.*

Beweis. $\mathscr{F} | X_i$ ist q.k., X_i affin, $\mathscr{F} | X_i$ wird also von einer Familie $(s_i^\alpha)_\alpha$ von Schnitten $s_i^\alpha \in \mathscr{F}(X_i)$ als $\mathcal{O}_{X_i}$-Modul erzeugt. Mit Eigenschaft (*iv*) der q.k. Garben aus 1.2.2. zeigt man wie in [*18*], 55.: Zu $s_i^\alpha \in \mathscr{F}(X_i)$ existiert eine natürliche Zahl n_α und ein $s^\alpha \in \mathscr{F}(n_\alpha)(X)$ mit $s^\alpha | X_i = s_i^\alpha$. Zu $s^\alpha \in \mathscr{F}(n_\alpha)(X)$ gehört aber ein $\mathcal{O}_X$-Homomorphismus $\sigma^\alpha : \mathcal{O}_X \to \mathscr{F}(n_\alpha)$ und dazu ein $\hat{\sigma}^\alpha$: $\mathcal{O}_X(-n_\alpha) \to \mathscr{F}$. Nach Wahl der $(s_i^\alpha)_\alpha$ gilt nun $\bigoplus_\alpha \mathcal{O}_X(-n_\alpha) \xrightarrow{\oplus \hat{\sigma}^\alpha} \mathscr{F} \to 0$ w.z.z.w.

Satz 2. *Ist $\mathscr{F}$ k. auf X, so gilt für $n \geqq n(\mathscr{F})$: $\mathscr{F}(n)$ wird als $\mathcal{O}_X$-Modul von den Schnitten $\mathscr{F}(n)(X)$ erzeugt.*

Folgerungen. *Ist $\mathscr{F}$ k. auf X, so gibt es Zahlen n, k mit $\mathcal{O}_X(n)^k \to \mathscr{F} \to 0$ ($\mathcal{O}_X(n)^k$ = k-fache direkte Summe)* ([*18*], 55.).

Ist $\mathcal{F}$ q.k. auf X, so hat man eine exakte Folge

$$\bigoplus_{\beta} \mathcal{O}_X(n_\beta) \to \bigoplus_{\alpha} \mathcal{O}_X(n_\alpha) \to \mathcal{F} \to 0.$$

Ist $\mathcal{F}$ k. auf X, so hat man eine exakte Folge $\mathcal{O}(m)^k \to \mathcal{O}(n)^l \to \mathcal{F} \to 0$.

1.3.2. *Quasi-kohärente Garben auf einem projektiven Schema* ([18], 56.—60., 65.). Wir befassen uns hier mit der Beziehung zwischen graduierten B-Moduln und quasi-kohärenten Garben auf dem zu B gehörigen projektiven Schema. Die ersteren treten an die Stelle der A-Moduln bei einem affinen Schema zum Ring A. Im Gegensatz zum affinen Fall ist jedoch hier die Situation nicht ganz so einfach. Für einen graduierten B-Modul M hat man mit den Bezeichnungen von 1.3.1. folgendes Diagramm

Räume	Ringe $\Gamma(\ldots, \mathcal{O})$	Moduln $\Gamma(\ldots, \mathcal{F})$	Garben $\mathcal{F}$	
$S =$	$S \dashleftarrow\!\dashrightarrow B$	M	$\widetilde{M}$	$\widetilde{M}$
Inj. $j\uparrow$	$j_i\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow j_i^*$	$\downarrow j^*$
$T = \bigcup_i T_i$	$\dashleftarrow\!\dashrightarrow B_{t_i}$	$M_{t_i} = M \underset{B}{\otimes} B_{t_i}$	$\mathcal{B}(M)\mid T_i$	$\mathcal{B}(M)$
affin $\psi\downarrow$	$\psi_i\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow (\psi_{i*})^\circ$	$\downarrow (\psi_*)^\circ$
$X = \bigcup_i X_i$	$\dashleftarrow\!\dashrightarrow (B_{t_i})^0$	$(M_{t_i})^0$	$\mathcal{A}(M)\mid X_i$	$\mathcal{A}(M)$
proj. $\varphi\downarrow$	$\varphi_i\downarrow$	$\uparrow$		
$Y =$	$Y \dashleftarrow\!\dashrightarrow A$			

Wir bezeichnen hier die M zugeordnete q.k. Garbe $\widetilde{M}^0$ auf X mit $\mathcal{A}(M) = \widetilde{M}^0$ und, wenn $\widetilde{M}$ die dem B-Modul M auf dem affinen Schema S zugeordnete q.k. Garbe bezeichnet und $j: T \to S$ die kanonische Injektion, die Einschränkung $\widetilde{M}\mid T = j^*(\widetilde{M})$ mit $\mathcal{B}(M) = j^*(\widetilde{M})$. $\mathcal{B}(M)$ ist q.k. auf T, und das direkte Bild $\psi_*(\mathcal{B}(M))$ besitzt eine direkte Summenzerlegung $\psi_*(\mathcal{B}(M)) = \bigoplus_n \mathcal{A}(M(n)) \simeq \bigoplus_n \mathcal{A}(M)(n)$ (letzteres wegen $\mathcal{A}(M(n)) = \widetilde{(M \underset{B}{\otimes} B(n))}^0 \simeq \widetilde{M}^0 \underset{\tilde{B}^0}{\otimes} \widetilde{B(n)}^0 = \mathcal{A}(M) \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_X(n) = \mathcal{A}(M)(n)$). Die graduierten B_{t_i}-Moduln M_{t_i} besitzen nämlich aufgefaßt als $(B_{t_i})^0$-Moduln eine direkte Summenzerlegung $M_{t_i} = \bigoplus_n (M_{t_i})^n$, deren 0-ter Summand gerade $(M_{t_i})^0$ ist. $\mathcal{A}(M)$ erhält man also folgendermaßen:

$$M \to \widetilde{M} \to \mathcal{B}(M) = j^*(\widetilde{M}) \to \psi_*(\mathcal{B}(M)) \to \psi_*(\mathcal{B}(M))^0 = \mathcal{A}(M).$$

Ist $M^n = 0$ für $n \geqq N$, so ist $\mathcal{A}(M) = 0$. Hiervon gilt die Umkehrung, falls M endlich erzeugt ist. $\mathcal{A}(M) = 0$ ist nämlich äquivalent mit der Aussage: Für alle homogenen $m \in M$ gilt: Ist $x \in X$, so folgt $\mathfrak{p}_x \not\supset \mathrm{Ann}(m)$. Genau dann ist nämlich die Faser $(\widetilde{M}^0)_x = (M_{\mathfrak{p}_x})^0 = 0$. „Aus $x \in X$ folgt $\mathfrak{p}_x \not\supset \mathrm{Ann}(m)$" ist aber gleichbedeutend mit „$\mathrm{Ann}(m) \supset (t_0, \ldots, t_n)^\sigma$ für ein σ". Schließlich ist genau dann $\mathcal{A}(M) = 0$, wenn $\mathcal{B}(M) = 0$ ist.

Da $M \Rightarrow \mathcal{A}(M)$ ein exakter Funktor ist, gilt: Die graduierten B-Moduln M mit $\mathcal{A}(M) = 0$ bilden eine Unterkategorie $\boldsymbol{C}'$ der Kategorie $\boldsymbol{C}$ aller graduierten B-Moduln mit der Eigenschaft: Ist $M' \to M \to M''$ exakt in $\boldsymbol{C}$, und

sind $M', M'' \in \boldsymbol{C}'$, so folgt $M \in \boldsymbol{C}'$. Nach [9], chap. I, 1.11. kann man dann die *Quotientenkategorie* $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ bilden. Da $\boldsymbol{C}$ eine abelsche Kategorie ist, ist auch $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ abelsch. Wir zeigen:

SATZ 3. *Die Kategorie $\boldsymbol{K}$ der q.k. Garben auf dem projektiven Schema X zu B und die Kategorie $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ sind äquivalent im Sinne von* [9] chap. I, 1.2.

Dazu definieren wir zunächst noch einen Funktor Γ von $\boldsymbol{K}$ in $\boldsymbol{C}$ und Morphismen $\alpha: M \to \Gamma\big(\mathscr{A}(M)\big)$, $M \in \boldsymbol{C}$, $\beta: \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{F})\big) \to \mathscr{F}$, $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}$: Wir setzen $\Gamma(\mathscr{F}) = \bigoplus_n \Gamma\big(X, \mathscr{F}(n)\big) = \bigoplus_n \mathscr{F}(n)(X)$. Da $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F}(n)$ exakt und $\mathscr{F}(n) \Rightarrow \mathscr{F}(n)(X)$ linksexakt ist, ist $\mathscr{F} \Rightarrow \Gamma(\mathscr{F})$ linksexakt. $\Gamma(\mathscr{F})$ ist ein graduierter B-Modul: Man hat kanonische Homomorphismen $B^p \to \Gamma\big(X, \mathscr{O}_X(p)\big)$, $b \to \frac{b}{1}$, und $\mathscr{O}_X(p) \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \mathscr{F}(q) \simeq \mathscr{F}(q)(p) \simeq \mathscr{F}(p+q)$, also Abbildungen $B^p \times \Gamma\big(X, \mathscr{F}(q)\big) \to \Gamma\big(X, \mathscr{F}(p+q)\big)$. — Definition von $\alpha: M \to \Gamma\big(\mathscr{A}(M)\big)$: $m \in M^n$, $m \in M(n)^0$: $m \to \frac{m}{1} \in \Gamma\big(X, \mathscr{A}(M(n))\big) = \Gamma\big(X, \mathscr{A}(M)(n)\big)$. — Definition von $\beta: \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{F})\big) \to \mathscr{F}$: Für $f \in B^k$ definieren wir Homomorphismen $\mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{F})\big)\big(D(f)\big) \to \mathscr{F}\big(D(f)\big)$:

$$\mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{F})\big)\big(D(f)\big) = \big(\Gamma(\mathscr{F})_f\big)^0 \ni \frac{s}{f^n}, \quad s \in \Gamma\big(X, \mathscr{F}(nk)\big),$$

$$\frac{1}{f^n} \in \Gamma\big(D(f), \mathscr{O}_X(-nk)\big), \quad \frac{s}{f^n} \to s \otimes \frac{1}{f^n} \in \Gamma\big(D(f), \mathscr{F}\big) = \mathscr{F}\big(D(f)\big).$$

Das so definierte Element hängt nur von s/f^n ab. Man erhält einen $\mathscr{O}_X$-Homomorphismus.

LEMMA 1. *Die zusammengesetzten Homomorphismen* $\mathscr{A}(M) \xrightarrow{\mathscr{A}(\alpha)} \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{A}(M))\big) \xrightarrow{\beta} \mathscr{A}(M)$ *und* $\Gamma(\mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha} \Gamma\big(\mathscr{A}(\Gamma(\mathscr{F}))\big) \xrightarrow{\Gamma(\beta)} \Gamma(\mathscr{F})$ *sind jeweils die Identitäten.*

LEMMA 2. *Der Schnittflächenfunktor Γ von der Kategorie $\boldsymbol{K}$ der q.k. Garben auf X in die Kategorie der $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$-Moduln ist mit direkten Summen vertauschbar.*

BEWEIS. Es sei $\mathscr{F} = \bigoplus_k \mathscr{F}_k$, $\mathscr{F}_k \in \boldsymbol{K}$. Wir betrachten die durch $\mathscr{F}'(U) = \bigoplus_k \mathscr{F}_k(U)$ für offenes $U \subset X$ und die kanonischen Morphismen $r_V^U: \bigoplus_k \mathscr{F}_k(U) \xrightarrow{\bigoplus_k r_V^U} \bigoplus_k \mathscr{F}_k(V)$ für $U \supset V$ gegebene Prägarbe $\mathscr{F}'$ auf X. $\mathscr{F}'$ ist eine Garbe: (F 1) Ist $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ und $s = \sum_k s_k$, $s' = \sum_k s_k' \in \mathscr{F}'(U)$, so folgt aus $r_{U_\alpha}^U(s) = r_{U_\alpha}^U(s')$ $\sum_k r_{U_\alpha}^U(s_k) = \sum_k r_{U_\alpha}^U(s_k')$, also $r_{U_\alpha}^U(s_k) = r_{U_\alpha}^U(s_k')$ für alle α und k. Die $\mathscr{F}_k$ waren nun q.k. Garben. Also ist $s_k = s_k'$ für alle k und damit $s = s'$. (F 2) Ist $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ und $(s_\alpha) \in \prod_\alpha \mathscr{F}'(U_\alpha)$ mit $r_{U_{\alpha\beta}}^{U_\alpha}(s_\alpha) = r_{U_{\alpha\beta}}^{U_\beta}(s_\beta)$ für alle α, β, so ist mit $s_\alpha = \sum_k s_{\alpha,k}$ $r_{U_{\alpha\beta}}^{U_\alpha}(s_{\alpha,k}) = r_{U_{\alpha\beta}}^{U_\beta}(s_{\beta,k})$ für alle α, β und alle k. Also existieren für alle k $s_k \in \mathscr{F}_k(U)$ mit $r_{U_\alpha}^U(s_k) = s_{\alpha,k}$ für alle α. Da X ein Präschema im Sinne von 1.2.3. ist, können wir o.E.d.A. die Indexmenge der α als endlich annehmen. Dann sind aber nur endlich viele $s_k \neq 0$, und $s = \sum_k s_k \in \mathscr{F}'(U)$ hat die Eigenschaft

$r^U_{U_\alpha}(s) = s_\alpha$ für alle α. Nach 1.1.2. ist $\mathscr{F}'$ somit eine Garbe. Auf der Basis $\mathfrak{B}$ der offenen affinen Mengen von X stimmen aber $\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}'$ überein (vgl. 1.2.3. (A)), und beides sind Garben. Folglich ist $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$.

FOLGERUNG. *Auch die Funktoren φ_* und die abgeleiteten Funktoren $R^q\Gamma = H^q$ und $R^q\varphi_*$ sind mit direkten Summen in $\boldsymbol{K}$ vertauschbar.* (Letzteres ergibt sich aus der Tatsache, daß eine direkte Summe injektiver Objekte in $\boldsymbol{K}$ wieder injektiv ist ([6], 4.)).

LEMMA 3. *$\alpha: M \to \Gamma(\mathscr{A}(M))$ ist $\boldsymbol{C}'$-bijektiv, d.h. mit $0 \to K \to M \xrightarrow{\alpha} \Gamma(\mathscr{A}(M)) \to K' \to 0$ sind K, $K' \in \boldsymbol{C}'$: $\mathscr{A}(K) = \mathscr{A}(K') = 0$.*

BEWEIS. Nach Lemma 2 ist $\Gamma(\mathscr{A}(M)) = \bigoplus_n \Gamma(X, \mathscr{A}(M)(n)) \simeq \Gamma\left(X, \bigoplus_n \mathscr{A}(M)(n)\right) = \Gamma(X, \psi_*(\mathscr{B}(M))) \simeq \Gamma(T, \mathscr{B}(M))$ und $\alpha: M \to \Gamma(\mathscr{A}(M))$ ist die Restriktion $r^S_T: M = \Gamma(S, \tilde{M}) \to \Gamma(T, \tilde{M}) \simeq \Gamma(T, \tilde{M}|T) = \Gamma(T, \mathscr{B}(M))$. Daraus folgt aber sofort $\mathscr{B}(K) = 0$, also auch $\mathscr{A}(K) = 0$. Zum Beweis, daß auch $\mathscr{B}(K') = 0$ ist, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{d} & \prod_i M & \xrightarrow{s} & \prod_{i \neq j} M \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(T, \mathscr{B}(M)) & \xrightarrow{d'} & \prod_i M_{t_i} & \xrightarrow{s'} & \prod_{i \neq j} M_{t_i t_j} \end{array}$$

mit den Abbildungen $d': t \to \left(r^T_{T_i}(t)\right)$ und $s': (m_i) \to \left(\frac{m_i}{1} - \frac{m_j}{1}\right)$. Wegen $M_{t_i} = \Gamma(T_i, \mathscr{B}(M))$, $M_{t_i t_j} = \Gamma(T_i \cap T_j, \mathscr{B}(M))$ und der Garbeneigenschaft (F) von $\mathscr{B}(M)$ ist auch die untere Zeile exakt. Es genügt nun zu zeigen: Für alle $m \in K' = \Gamma(T, \mathscr{B}(M))/\alpha(M)$ gilt $\mathrm{Ann}(m) \supset (t_0, \ldots, t_r)^\sigma$, oder für alle $m \in \Gamma(T, \mathscr{B}(M))$ und jedes i_0 existiert ein δ_{i_0} mit $t^{\delta_{i_0}}_{i_0} m \in \alpha(M)$. Nach obigem Diagramm ist dies gleichbedeutend mit folgender Aussage: Zu $(m_i) \in \prod_i M_{t_i}$ mit $\left(\frac{m_i}{1} - \frac{m_j}{1}\right) = (0)$ in $\prod_{i \neq j} M_{t_i t_j}$ gibt es ein δ_{i_0}, so daß $t^{\delta_{i_0}}_{i_0}(m_i) = (t^{\delta_{i_0}}_{i_0} m_i) \in \alpha'(d(M))$. Mit $m_i = \frac{m'_i}{t_i^{\varepsilon_i}}$, $m'_i \in M$, gilt für $\sigma = \varepsilon_{i_0}$ $t^\sigma_{i_0} m_{i_0} = m'_{i_0} = m \in M$ in $M_{t_{i_0}}$. Nun ist $t^\sigma_{i_0}(m_i) = (t^\sigma_{i_0} m_i)$ und $\left(\frac{t^\sigma_{i_0} m_i}{1} - \frac{t^\sigma_{i_0} m_j}{1}\right) = (0)$ in $\prod_{i \neq j} M_{t_i t_j}$, insbesondere also $\frac{t^\sigma_{i_0} m_{i_0}}{1} - \frac{t^\sigma_{i_0} m_j}{1} = 0$ in $M_{t_{i_0} t_j}$, und $\frac{t^\sigma_{i_0} m_{i_0}}{1} - \frac{m}{1} = 0$ in $M_{t_{i_0} t_j}$, also $\frac{t^\sigma_{i_0} m_j}{1} - \frac{m}{1} = 0$ in $M_{t_{i_0} t_j}$. Dann existieren aber τ, π gemeinsam für alle j mit $t^\tau_{i_0} t^\pi_j (t^\sigma_{i_0} m'_j - m t^\pi_j) = 0$ in M, also $t^{\sigma+\tau}_{i_0} m_j - \frac{t^\tau_{i_0} m}{1} = 0$ in M_{t_j} für alle j, und $\left(\frac{t^\tau_{i_0} m}{1}\right) \in \alpha'(d(M))$. Mit $\delta_{i_0} = \sigma + \tau$ ist somit $t^{\delta_{i_0}}_{i_0}(m_j) \in \alpha'(d(M))$.

LEMMA 4. *Zu jedem $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}$ gibt es ein $M \in \boldsymbol{C}$ mit $\mathscr{A}(M) = \mathscr{F}$.*

BEWEIS. Nach Satz 1,2, Folgerungen in 1.3.1. existiert eine exakte Folge $\bigoplus_\mu \mathscr{O}_X(n_\mu) \xrightarrow{\gamma} \bigoplus_\nu \mathscr{O}_X(n_\nu) \to \mathscr{F} \to 0$. Anwendung des Funktors Γ auf den Morphismus γ liefert $\Gamma\left(\bigoplus_\mu \mathscr{O}_X(n_\mu)\right) \xrightarrow{\Gamma(\gamma)} \Gamma\left(\bigoplus_\nu \mathscr{O}_X(n_\nu)\right) \to M \to 0$ mit $M \in \boldsymbol{C}$ als Kokern.

Wendet man darauf den exakten Funktor $\mathscr{A}$ an und beachtet die Vertauschbarkeit mit direkten Summen, so erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{\mu} \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathcal{O}_X(n_\mu))\big) & \xrightarrow{\mathscr{A}\Gamma(\gamma)} & \bigoplus_{\nu} \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathcal{O}_X(n_\nu))\big) & \longrightarrow & \mathscr{A}(M) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow\beta & & \downarrow\beta & & \downarrow\beta' & & \\ \bigoplus_{\mu} \mathcal{O}_X(n_\mu) & \xrightarrow{\gamma} & \bigoplus_{\nu} \mathcal{O}_X(n_\nu) & \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die wie oben definierten Morphismen $\beta: \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathcal{O}_X(n)) \to \mathcal{O}_X(n)$ sind aber Isomorphismen: Es ist $\mathcal{O}_X(n) = \mathscr{A}\big(B(n)\big)$, und mit Lemma 3 ist $\alpha: B(n) \to \Gamma\big(\mathscr{A}(B(n))\big)$ $\boldsymbol{C}'$-bijektiv. Daraus folgt durch Anwendung des exakten Funktors $\mathscr{A}: \mathscr{A}\big(B(n)\big) \xrightarrow{\mathscr{A}(\alpha)} \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{A}(B(n)))\big)$ ist ein Isomorphismus. Nun ist nach Lemma 1 der zusammengesetzte Morphismus $\mathscr{A}\big(B(n)\big) \xrightarrow{\mathscr{A}(\alpha)} \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{A}(B(n)))\big) \xrightarrow{\beta} \mathscr{A}\big(B(n)\big)$ $\beta \circ \mathscr{A}(\alpha) = \mathrm{Id}$. Somit ist β ein Isomorphismus. — Dann ist aber auch der gestrichelte Morphismus β' ein Isomorphismus.

Lemma 5. *$\beta: \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{F})\big) \to \mathscr{F}$, $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}$, ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Zu $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}$ gibt es ein $M \in \boldsymbol{C}$ mit $\mathscr{A}(M) = \mathscr{F}$. Nach Lemma 3 ist $\alpha: M \to \Gamma\big(\mathscr{A}(M)\big)$ $\boldsymbol{C}'$-bijektiv, also $\mathscr{A}(\alpha): \mathscr{A}(M) \to \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{A}(M))\big)$ ein Isomorphismus. Wie eben bei Lemma 4 schließt man dann: $\beta: \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{A}(M))\big) \to \mathscr{A}(M)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis von Satz 3. Wir definieren zunächst mit Hilfe der Funktoren $\mathscr{A}: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{K}$ und $\Gamma: \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{C}$ gleichbezeichnete Funktoren $\mathscr{A}: \boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}' \to \boldsymbol{K}$ und $\Gamma: \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$. Nach Definition der Quotientenkategorie $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ ([9], chap. I, 1.11.) ist dazu nur noch für einen Morphismus $\varphi: M \to N$ in $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ $\mathscr{A}(\varphi)$ zu definieren. Nun wird nach Definition φ gegeben durch einen Morphismus φ' *in* $\boldsymbol{C}$ eines Unterobjektes M' von M in ein Quotientenobjekt N/N' von N, wo M/M' und $N' \in \boldsymbol{C}'$. Man hat also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \varphi: M & \longrightarrow & N \quad \text{in } \boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'. \\ \uparrow i & & \downarrow p \\ \varphi': M' & \longrightarrow & N/N' \text{ in } \boldsymbol{C} \end{array}$$

Anwendung von $\mathscr{A}$ liefert somit Isomorphismen $\mathscr{A}(M') \xrightarrow{\mathscr{A}(i)} \mathscr{A}(M)$, $\mathscr{A}(N) \xrightarrow{\mathscr{A}(p)}$ $\mathscr{A}(N/N')$. Der Morphismus $\mathscr{A}(\varphi): \mathscr{A}(M) \to \mathscr{A}(N)$ in $\boldsymbol{K}$ wird nun folgendermaßen definiert: $\mathscr{A}(\varphi) = \mathscr{A}(p)^{-1} \circ \mathscr{A}(\varphi') \circ \mathscr{A}(i)^{-1}$. So erhält man tatsächlich einen Funktor $\mathscr{A}: \boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}' \to \boldsymbol{K}$. Zum Nachweis der Äquivalenz von $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ und $\boldsymbol{K}$ genügt es nach [5], (1.23), (1.30), zu zeigen, daß die Funktoren $\Gamma \circ \mathscr{A}$ und $\mathrm{Id}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}')$ sowie $\mathscr{A} \circ \Gamma$ und $\mathrm{Id}(\boldsymbol{K})$ (Id bezeichnet jeweils den identischen Funktor) isomorph sind. Dazu haben wir Morphismen von Funktoren (1.1.1.) $\alpha: \mathrm{Id}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}') \to \Gamma \circ \mathscr{A}$ und $\beta: \mathscr{A} \circ \Gamma \to \mathrm{Id}(\boldsymbol{K})$ anzugeben, so daß (α) für alle $M \in \boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ $\alpha(M): M \to \Gamma\big(\mathscr{A}(M)\big)$ ein Isomorphismus in $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$, und ($\beta$) für alle $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}$ $\beta(\mathscr{F}): \mathscr{A}\big(\Gamma(\mathscr{F})\big) \to \mathscr{F}$ ein Isomorphismus in $\boldsymbol{K}$ ist. Wir nehmen dazu für α, β gerade die oben definierten α, β. So erhält man tatsächlich Morphismen

von Funktoren. (α) und (β) sind erfüllt: Nach Lemma 3 ist $\alpha: M \to \Gamma(\mathscr{A}(M))$ $\boldsymbol{C}'$-bijektiv. Man hat also das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K & \to & M & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(\mathscr{A}(M)) & \to & K' \to 0 \\ & & & & p\downarrow & & \uparrow i & & \\ & & & & M/K & \xleftarrow{\alpha^{-1}} & \alpha(M) & & \end{array}$$

$K, K' \in \boldsymbol{C}'$. Durch α^{-1} wird also ein Morphismus $\alpha': \Gamma(\mathscr{A}(M)) \to M$ in $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$ definiert, und es ist $\alpha' \circ \alpha = \mathrm{id}(M)$ und $\alpha \circ \alpha' = \mathrm{id}(\Gamma(\mathscr{A}(M)))$ in $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}'$. Somit gilt ($\alpha$). ($\beta$) ergibt sich aus Lemma 5.

1.3.3. *Berechnung der $H^q(X, \mathscr{F})$ für ein projektives Schema X* ([*18*], §3, [*11*]). Nach 1.2.5. kann man die $H^q(X, \mathscr{F})$ mittels des Čechschen Komplexes $\mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ zur Überdeckung $\mathfrak{U} = (X_i)_i$ von X durch die zu den t_i in $B = A[t_0, \ldots, t_r]$ gehörigen, wie in 1.3.1. erhaltenen, offenen affinen Mengen $X_i = D(t_i)$ berechnen. Folglich sind $H^q(X, \mathscr{F})$ und $R^q\varphi_*(\mathscr{F}) = 0$ für $q > r$.

Zu $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}$ gibt es nach 1.3.2. ein $M \in \boldsymbol{C}$ mit $\mathscr{A}(M) = \mathscr{F}$. Wörtlich wie in [*18*], 61. definiert man nun für den graduierten $B = A[t_0, \ldots, t_r]$-Modul M die Komplexe $C_k^*(M)$ und $C^*(M) = \varinjlim_{k \to \infty} C_k^*(M)$ von A-Moduln. C_k^* und C^* sind exakte Funktoren von der Kategorie der graduierten B-Moduln in die Kategorie der Komplexe von A-Moduln. Ebenso wie in [*18*], 64. definiert man Morphismen $i_k: C_k^*(M) \to \Gamma(X, \mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{A}(M)))$ und durch Übergang zum direkten Limes einen Morphismus $i: C^*(M) \to \Gamma(X, \mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{A}(M)))$.

SATZ 4. *$i: C^*(M) \to \Gamma(X, \mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{A}(M)))$, $M \in \boldsymbol{K}$, ist ein Isomorphismus der Komplexe von A-Moduln.*

BEWEIS. Man hat eine exakte Folge $\bigoplus_\mu B(n_\mu) \to \bigoplus_\nu B(n_\nu) \to M \to 0$. $M \Rightarrow \mathscr{A}(M)$ und $\mathscr{F} \Rightarrow \Gamma(X, \mathscr{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F}))$ sind exakte Funktoren (letzterer, da alle $X_i \in \mathfrak{U}$ und alle $X_{i_0 \ldots i_q} = X_{i_0} \cap \ldots \cap X_{i_q}$ offene affine Mengen auf X sind), die mit direkten Summen vertauschbar sind (Lemma 2, Folgerung). Nun kann man wie in [*18*], 64., prop. 4 weiterschließen.

FOLGERUNG. *$H^q(i): H^q(C^*(M)) \to H^q(X, \mathscr{A}(M)) = H^q(X, \mathscr{F})$ sind Isomorphismen der A-Moduln.*

Dem projektiven Morphismus $\varphi: X \to Y$ entspricht der Ringhomomorphismus $B = A[t_0, \ldots, t_r] \leftarrow A$. Nun hat man einen Epimorphismus $B_0 = A[T_0, \ldots, T_r] \to B = A[t_0, \ldots, t_r]$, $a \to a$, $T_i \to t_i$, B_0 *freier Polynomring über A*, und ein kommutatives Diagramm $\begin{array}{ccc} B_0 & \to & B \\ & \nwarrow\ \nearrow & \\ & A & \end{array}$. Bezeichnet man das zu B_0 gehörige projektive Schema mit X_0 und den zu $B_0 \leftarrow A$ gehörigen projektiven Morphismus mit $\varphi_0: X_0 \to Y$, so entspricht dem ein Diagramm $\begin{array}{ccc} X_0 & \xleftarrow{i} & X \\ & {\scriptstyle\varphi_0}\searrow\ \swarrow{\scriptstyle\varphi} & \\ & Y & \end{array}$, also eine Faktorisierung von φ in einen Morphismus i, einen Isomorphismus von X mit einem abgeschlossenen Unterschema $i(X) \subset X_0$, und in einen *freien*

projektiven Morphismus φ_0: $\varphi=\varphi_0\circ i$. Ist $\bigcup_i U_i=X_0$ eine Überdeckung von X_0 durch offene affine Mengen U_i, so ist $\bigcup_i i^{-1}(U_i)=X$ eine Überdeckung von X durch offene affine Mengen $i^{-1}(U_i)$. Der Morphismus i hat also die Eigenschaft *ii*) aus 1.2.4.: i_* ist ein exakter Funktor und für eine q.k. Garbe $\mathscr{F}$ auf X ist $H^q(X,\mathscr{F})\simeq H^q\big(X_0, i_*(\mathscr{F})\big)$ (1.2.5. Folgerungen). Zur Berechnung der $H^q(X,\mathscr{F})$ genügt es also, sich auf über A freie projektive Schemata X zu beschränken. — Mit $\mathscr{F}$ ist auch $i_*(\mathscr{F})$ kohärent: Es ist $\Gamma\big(U_i, i_*(\mathscr{F})\big)\simeq \Gamma\big(i^{-1}(U_i),\mathscr{F}\big)$. Der letztere Modul ist aber ein endlich erzeugter $\mathscr{O}_X\big(i^{-1}(U_i)\big)$-Modul, wenn $\mathscr{F}$ kohärent auf X ist. Zufolge des Epimorphismus $\mathscr{O}_{X_0}(U_i)\to \mathscr{O}_X\big(i^{-1}(U_i)\big)$ ist dann $\Gamma\big(U_i, i_*(\mathscr{F})\big)$ auch ein endlich erzeugter $\mathscr{O}_{X_0}(U_i)$-Modul.

Ist X *frei projektiv über* A, also $B=A[T_0,\ldots,T_r]$ freier Polynomring über A, so kann man wie in [18], 62. die $H^q\big(C^*(B(n))\big)$ und damit nach Satz 4, Folgerung die $H^q\big(X,\mathscr{O}_X(n)\big)$ ausrechnen und erhält

LEMMA 6. *$H^q\big(X,\mathscr{O}_X(n)\big)$ ist ein endlich erzeugter A-Modul und $=0$ für $n\geqq N$ und $q>0$.*

SATZ 5 ([12], [11]). *$\varphi: X\to Y$ sei ein projektiver Morphismus, Y affin, $\mathscr{F}$ kohärent auf X. Dann gilt*

(i) $R^q\varphi_*\big(\mathscr{F}(n)\big)=0$ für $n\geqq N$ und $q>0$.

(ii) $R^q\varphi_*(\mathscr{F})$ ist kohärent auf Y.

BEWEIS. Es genügt, die entsprechenden Behauptungen (*i*) $H^q\big(X,\mathscr{F}(n)\big)=0$ für $n\geqq N$ und $q>0$ und (*ii*) $H^q(X,\mathscr{F})$ ist ein endlich erzeugter A-Modul für ein über A *frei* projektives Schema X zu beweisen. Nun hat man nach 1.3.1. eine exakte Folge $0\to\mathscr{K}\to\mathscr{O}_X(m)^k\to\mathscr{F}\to 0$ mit kohärentem Kern $\mathscr{K}$ und somit exakte Folgen $0\to\mathscr{K}(n)\to\mathscr{O}_X(m+n)^k\to\mathscr{F}(n)\to 0$ für jedes n. Durch absteigende Induktion nach q ergeben sich dann die Behauptungen mittels der exakten Cohomologiefolgen $H^q\big(X,\mathscr{O}_X(m+n)^k\big)\to H^q\big(X,\mathscr{F}(n)\big)\to H^{q+1}\big(X,\mathscr{K}(n)\big)$ und $H^q\big(X,\mathscr{O}_X(m)\big)\to H^q(X,\mathscr{F})\to H^{q+1}(X,\mathscr{K})$ aus Lemma 6. Der Induktionsanfang ergibt sich aus dem Verschwinden der $H^q(X,\mathscr{G})$ für alle q.k. Garben $\mathscr{G}$ auf X, falls $q>r$ ist, $B=A[T_0,\ldots,T_r]$, $T_i\in B^1$.

Literatur

[1] AUSLANDER, M., and D. BUCHSBAUM: Unique factorization in regular local rings. Proc. Nat. Acad. of Sci. **45**, 733–734 (1959).

[2] BOREL, A., et J.-P. SERRE: Le théorème de Riemann-Roch. Bull. Soc. math. Fr. **86**, 97–136 (1958).

[3] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological algebra. Princeton Math. Series Nr. 19. Princeton 1959.

[4] CARTIER, P.: Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique. Bull. Soc. math. Fr. **86**, 177–251 (1958).

[5] DOLD, A.: Homology of symmetric products and other functors of complexes. Ann. of Math. **68**, 54–80 (1958).

[6] GABRIEL, P.: Objects injectifs dans les catégories abéliennes. Sem. Dubreil-Pisot: Algèbre et théorie des nombres, **12**, Nr. 17 (1958/59).

[7] — Faisceaux quasi-cohérents, le théorème de Serre, les foncteurs dérivés des foncteurs classiques. Sem. Chevalley **3**, Nr. 1–3 (1958/59).

[8] GODEMENT, R.: Théorie de faisceaux. Actual. Scient. et Jnd., Nr. 1252. Paris 1958.
[9] GROTHENDIECK, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math. J. **9**, 119–221 (1957).
[10] — Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébrique cohérents. Sem. Bourbaki, 2 éd., **9**, Nr. 149 (1956–57).
[11] — Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents. Sem. Cartan, Nr. 12 (1956/57).
[12] — Cohomology theory of abstract algebraic varieties. Proc. Intern. Congress of Math., 103–118. Edinburgh 1958.
[13] — Éléments de géométrie algébrique I. Publ. Math., Nr. 4 (1960).
[14] KUNZ, E.: Differentialformen inseparabler algebraischer Funktionenkörper. Math. Z. **75**, 55–74 (1961).
[15] LANG, S.: Introduction to algebraic geometry. New York 1958.
[16] NASTOLD, H.-J.: Zum Dualitätssatz in inseparablen Funktionenkörpern der Dimension 1. Math. Z. **75**, 75–84 (1961).
[17] SEIDENBERG, A.: The hyperplane sections of normal varieties. Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 357–386 (1950).
[18] SERRE, J.-P.: Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. **61**, 197–278 (1955).
[19] — Cohomologie et géométrie algébrique. Proc. Intern. Congress of Math. vol. **3**, 515–520. Amsterdam 1954.
[20] — Groupes algébriques et corps de classes. Actual. Scient. et Ind., Nr. 1264. Paris 1959.
[21] — Algébre locale, multiplicités. Cours professé au College de France 1957/58, rédigé par P. GABRIEL (vervielfältigt).
[22] ZARISKI, O.: Complete Linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi. Ann. of Math. **55**, 552–592 (1952).
[23] — Scientific report on the second summer institute. Part. III. Algebraic sheaf theory. Bull. Amer. Math. Soc. **62**, 117–141 (1956).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 22. April 1961)

LAMPRECHT, E.
Math. Zeitschr. 77, 391–413 (1961)

Zyklische Erweiterungen arithmetischer Funktionenkörper

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

ERICH LAMPRECHT

Einleitung

Die für endlich-algebraische Zahlkörper und für algebraische Funktionenkörper einer Veränderlichen über einem Galoisfeld seit längerer Zeit gelöste Grundaufgabe einer Klassenkörpertheorie, nämlich die Charakterisierung der abelschen Erweiterungen L in ihrer Gesamtheit durch arithmetische Gruppen des Grundkörpers K, wurde in den letzten Jahren durch die Untersuchungen von LANG ([5a], [5b]) und SERRE [10] auch auf Funktionenkörper in mehreren Veränderlichen über einem Galoisfeld (d.h. auf Körper höherer arithmetischer Stufe) verallgemeinert und es wurde dort die Lösung der Hauptfragen einer solchen Theorie angegeben. In dieser Arbeit soll ein kleiner Beitrag zu einer entsprechenden Fragestellung für *arithmetische Funktionenkörper*, d.h. für algebraische Funktionenkörper K in einer Veränderlichen über einem endlich-algebraischen Zahlkörper k, gegeben werden. Hierbei machen wir zur Vereinfachung der Darstellung an einigen Stellen die folgenden einschränkenden Voraussetzungen[1]): a) Der Grundkörper K sei ein rationaler Funktionenkörper über einem algebraischen oder dem rationalen Zahlkörper k. — b) Es werden nur zyklische Erweiterungen (insbesondere solche vom Primzahlgrad) betrachtet. — Speziell enthalten unsere Ergebnisse also einen Beitrag zur Charakterisierung der zyklischen Erweiterungen eines rationalen Funktionenkörpers über dem rationalen Zahlkörper[2]).

Da die alleinige Zugrundelegung der Divisoren von K über k gemäß der Theorie der algebraischen Funktionen oder gleichwertige algebraisch-geometrische Begriffsbildungen ohne zusätzliche Modifikationen zur vollständigen Charakterisierung aller abelschen Erweiterungen von K nicht ausreicht (man denke z.B. an die abelschen Konstantenerweiterungen), werden hier die folgenden Überlegungen und Hilfsmittel herangezogen: 1. Jeder abelschen Erweiterung L von K werden vermöge der Primideale (endlichen Primdivisoren) p von k *lokale* abelsche Erweiterungen $\overline{L}$ von Kongruenzfunktionenkörpern $\overline{K}$

[1]) Diese Vereinfachungen bezwecken insbesondere, daß wir an einigen Stellen die Komplikationen, die aus einer nichttrivialen Struktur der Divisorenklassengruppe von K über k bzw. aus der der Idealklassengruppe von k resultieren, vermeiden wollen. Soweit diese Voraussetzungen keine Vereinfachungen bringen, werden sie natürlich fortgelassen.

[2]) Dies verallgemeinert den Kroneckerschen Satz über die Charakterisierung der abelschen Erweiterungen des rationalen Zahlkörpers.

(von Primzahlcharakteristik) zugeordnet; dies entspricht etwa (aber nicht vollständig) dem Übergang zur Klassenkörpertheorie im Kleinen und gestattet es, Ergebnisse aus der algebraischen Zahlentheorie und aus der Klassenkörpertheorie der Kongruenzfunktionenkörper bei den Untersuchungen zu verwenden. 2. Als Erzeugende der arithmetischen Gruppen, mit denen die abelschen Erweiterungen charakterisiert werden, wählen wir ein geeignetes System von Primdivisoren zu diskreten Krullschen Bewertungen vom Rang 2; die Restklassenkörper dieser Primdivisoren sind endliche Körper, so daß also nach dem üblichen Formalismus die Frobenius-Automorphismen erklärt werden können. Diese Primdivisoren entsprechen den primen rationalen 0-Zyklen in den Untersuchungen von LANG und SERRE. 3. Unser Ansatz lehnt sich stark an den aus der klassischen Theorie bekannten Gedanken der Kongruenzklasseneinteilung nach einem „Führer", der aus den verzweigten Primdivisoren von K zusammengesetzt ist, an; demzufolge sind in unseren Ergebnissen Aussagen über Verzweigungen enthalten und bilden sogar einen wesentlichen Punkt der Überlegungen.

INHALT. §1 enthält die Herleitung der zugeordneten lokalen abelschen Erweiterungen und die Zusammenstellung ihrer Eigenschaften, insbesondere dann, wenn eine Regularitätsvoraussetzung erfüllt ist. Die formale Aufstellung einer Divisorengruppe und ihrer „Kongruenzeinteilungen", sowie die Zusammensetzung der lokalen Eigenschaften zu globalen bilden den Inhalt von §2. In §3 wird die Beziehung zwischen abelschen Erweiterungen und Kongruenzklasseneinteilungen am Spezialfall der zyklischen Erweiterungen vom Kummerschen Typus (wenn also die entsprechenden Einheitswurzeln im Grundkörper enthalten sind) diskutiert, in §4 wird gezeigt, wie sich abelsche Konstantenerweiterungen in dieses Schema einordnen. Mit Hilfe des Begriffs des Führernormalkörpers läßt sich in §5 zeigen, daß zyklische Erweiterungen, die nicht vom Kummerschen Typus sind, relativ selten sind; sie können nur dann auftreten, wenn die verzweigten Primdivisoren in gewisser Beziehung zum Grad der Erweiterung stehen[3]). In §6 schließlich wird die Existenz zyklischer Erweiterungen von vorgegebenem Grad über einem rationalen Funktionenkörper über dem rationalen Zahlkörper nachgewiesen; einige ergänzende Bemerkungen betreffen andere, insbesondere algebraisch-geometrische Ansätze zu diesen Fragestellungen.

BEZEICHNUNGEN. Unter einem Primdivisor von K (in Zeichen: $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, usw.) verstehen wir stets eine Klasse äquivalenter diskreter Bewertungen von K, die nicht notwendig vom Rang 1 sein müssen; die zugehörigen Bewertungen seien stets additiv geschrieben und wir denken uns unter den zum Primdivisor gehörigen Bewertungen eine als normiert ausgezeichnet; die Sprechweise „verschiedene Bewertungen" bedeute stets „inäquivalente normierte Bewertungen". Mit dem gleichen Symbol wie den Primdivisor bezeichnen wir auch das maximale Primideal des zugehörigen Bewertungsringes und den zugehörigen

[3]) Ein entsprechender Sachverhalt gilt auch bei Kongruenzfunktionenkörpern, doch ist er dort nicht so augenscheinlich, daß er hervorgehoben wird.

Resthomomorphismus (Stelle) von K; für die Resthomomorphismen verwenden wir dabei die Rechtsoperatorschreibweise, d.h. $\bar{x}=xp$ bedeute das Bild von $x\in K$ bei dem durch p gelieferten Resthomomorphismus, $\bar{K}=Kp$ sei der Restklassenkörper von K bei p (falls keine Verwechslungen möglich sind, kennzeichnen wir Bilder und Bildmengen auch kürzer durch Überstreichen). — Divisorengruppen werden wir in Anlehnung an die Schreibweise der algebraischen Geometrie stets mit additiver Verknüpfung schreiben; wir verwenden diese Schreibweise aus Gründen der Einheitlichkeit auch bei Zahlkörperdivisoren, obgleich sie in diesem Fall wenig gebräuchlich ist.

§ 1. Zugeordnete lokale abelsche Erweiterungen und ihre Eigenschaften

Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen, der den endlich-algebraischen Zahlkörper k zum genauen Konstantenkörper hat; $g=g(K/k)$ sei das Geschlecht von K. Mit $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \ldots$ bezeichnen wir Primdivisoren von K zu diskreten Bewertungen des Ranges 1, die k identisch bewerten; wir nennen sie die *geometrischen Primdivisoren* von K oder Primdivisoren von K über k; sie beschreiben die Struktur von K über k gemäß der Theorie der algebraischen Funktionen. Die freie abelsche Gruppe mit den Erzeugenden $\mathfrak{p}$, d.h. die Gesamtheit der Ausdrücke

$$\mathfrak{a}=\sum_{\mathfrak{p}} n_{\mathfrak{p}}\cdot\mathfrak{p} \quad (n_{\mathfrak{p}} \text{ ganzrational}, n_{\mathfrak{p}}=0 \text{ für fast alle } \mathfrak{p}), \tag{1.1}$$

nennen wir die *geometrische Divisorengruppe* $D(K)$ von K; $D(K)$ ist K über k invariant zugeordnet und ein Element $z\neq 0$, $z\in K$ ist durch seinen (nach dem üblichen Schema erklärten) Hauptdivisor eindeutig bis auf einen Faktor aus k festgelegt. Mit $d(\mathfrak{a})$ bezeichnen wir den Grad eines geometrischen Divisors.

Jede endlich-algebraische Erweiterung L von K läßt sich eindeutig in die folgenden beiden Schritte zerlegen (die Erweiterung ist separabel): 1. Eine *Konstantenerweiterung* $L_1=K\cdot k_1$, wobei k_1 der genaue Konstantenkörper von L ist; 2. eine *geometrische Erweiterung* L von L_1 mit dem gleichen Konstantenkörper k_1. Wir werden deshalb weitgehend diese beiden Fälle gesondert betrachten. — Bei einer endlich-algebraischen Erweiterung L von K besitzt ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ (formal analoge Regeln gelten auch für *alle* später vorkommenden Primdivisortypen; vgl. [*1*], [*13a, b*]) mindestens eine und höchstens endlich viele Fortsetzungen $\mathfrak{P}_\varrho$ ($\varrho=1,\ldots,r$) in L mit den Relativgraden $f_\varrho=f(\mathfrak{P}_\varrho/\mathfrak{p})$ und den Verzweigungsordnungen $e_\varrho=e(\mathfrak{P}_\varrho/\mathfrak{p})$ und es gilt

$$[L:K]=n=\sum_{\varrho=1}^{r} f_\varrho e_\varrho. \tag{1.2}$$

Ist speziell L über K galoissch mit der abelschen Galoisgruppe $\mathfrak{G}(L/K)$, so sind die f_ϱ bzw. die e_ϱ alle untereinander gleich und es gilt

$$[L:K]=n=r f_\varrho e_\varrho. \tag{1.2a}$$

Bei einem beliebigen Primdivisor kann man den Restklassenrelativgrad f_ϱ noch gemäß

$$f_\varrho = f_{\varrho,s} \cdot f_{\varrho,i} \tag{1.2b}$$

als Produkt der Grade $f_{\varrho,s}$ und $f_{\varrho,i}$ des separablen und inseparablen Anteils der Restklassenkörpererweiterung darstellen. Ist im Fall einer abelschen Erweiterung L über K ein Primdivisor *separabel-träge*, d.h. $r = e_\varrho = f_{\varrho,i} = 1$, $f_\varrho = f_{\varrho,s} = n$, so ist die Restklassenkörpererweiterung ebenfalls abelsch mit zu $\mathfrak{G}(L/K)$ isomorpher Galoisgruppe (die Automorphismen sind erklärt durch die Wirkung der ursprünglichen auf die Restklassen; vgl. z.B. [*13a*], S. 290ff.).

Wir nennen einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K einen *Funktionalprimdivisor* von K über k, wenn die zugehörige Bewertung diskret vom Rang 1 ist und im Teilkörper k einen nichttrivialen Primdivisor $\mathfrak{p}_0$ induziert, so daß der Restklassenkörper $\bar{K} = K\mathfrak{p}$ transzendente Erweiterung des endlichen Körpers $\bar{k} = k\mathfrak{p}_0$ ist (vgl. hierzu [*4c, d, h*]); $\bar{K}$ ist dann ein Kongruenzfunktionenkörper, d.h. ein Funktionenkörper einer Veränderlichen über einem Galoisfeld. Wir nennen $\mathfrak{p}$ *regulär*, wenn gleichzeitig $\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{p}_0$ unverzweigt ist, $\bar{k}$ in $\bar{K}$ relativ algebraisch abgeschlossen ist und $g(K/k) = g(\bar{K}/\bar{k})$ gilt. Ist nun L eine geometrische Erweiterung des Grades n von K, so heiße eine Fortsetzung $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ auf L *K-regulär*, wenn $\mathfrak{P}$ regulär in L und über K separabel-träge ist; in diesem Fall ist auch $\mathfrak{p}$ in K regulär[4]). Unter den genannten Voraussetzungen über $\mathfrak{P}$ gibt es, wie in [*4d, e, f*] gezeigt wurde, einen eindeutig und invariant durch $\mathfrak{P}$ gegebenen Gruppenhomomorphismus von $D(L)$ in $D(\bar{L}) = D(L\mathfrak{P})$, d.h. eine Vorschrift

$$\mathfrak{A} \xrightarrow{\mathfrak{P}} \bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}\mathfrak{P}, \tag{1.3}$$

die jedem geometrischen Divisor $\mathfrak{A}$ von L eindeutig einen Bilddivisor $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}\mathfrak{P}$ (gekennzeichnet durch Überstreichen) von $\bar{L}$ zuordnet; bei der Zuordnung (1.3) bleibt darüber hinaus der Grad eines Divisors erhalten und es werden Hauptdivisoren bzw. Differentialdivisoren von L in ebensolche von $\bar{L}$ abgebildet. Die in $D(L)$ vermöge der Conormoperation (vgl. [*2*]) kanonisch eingebettete geometrische Divisorengruppe $D(K)$ von K wird hierbei durch $\mathfrak{P}$ nach der gleichen Vorschrift abgebildet wie durch $\mathfrak{p}$; es gilt somit die formale Regel

$$\overline{\mathrm{Con}_{K|L}\,\mathfrak{a}} = \mathrm{Con}_{\bar{K}|\bar{L}}\,\bar{\mathfrak{a}}. \tag{1.3a}$$

Ist nun $\mathfrak{P}$ K-regulär in L und $\bar{x}$ eine separierende Variable für $\bar{K}$ über $\bar{k}$ und x ein Urbild von $\bar{x}$ in K, so haben $\bar{x}$ und x auch die gleichen Eigenschaften in $\bar{L}$ bzw. in L. Wir bilden nun die Differentiale $d\bar{x}$ und dx in $\bar{K}$, $\bar{L}$ bzw. K, L; für ihre Divisoren gilt

$$(dx)_L = \mathrm{Con}_{K|L}(dx)_K + \mathfrak{D}(L/K), \qquad (d\bar{x})_{\bar{L}} = \mathrm{Con}_{\bar{K}|\bar{L}}(d\bar{x})_{\bar{K}} + \bar{\mathfrak{D}}(\bar{L}/\bar{K}), \tag{1.4}$$

[4]) Vgl. hierzu [*4d*], Abschnitt 5; wenn L über K galoissch ist und $g(L/k) \geqq 2$ ist, so folgt schon aus der Regularität von $\mathfrak{P}$ die von $\mathfrak{p}$ und die separable Trägheit.

wobei $\mathfrak{D}(L/K)$ bzw. $\overline{\mathfrak{D}}(\overline{L}/\overline{K})$ die zugehörigen Relativdifferenten sind. Da ferner

$$\overline{(dx)_L} = (d\bar{x})_{\overline{L}}, \qquad \overline{(dx)_K} = (d\bar{x})_{\overline{K}} \tag{1.4a}$$

ist, folgt wegen (1.3a) das

LEMMA 1. *Ist P K-regulär, so geht durch P-Restabbildung die Relativdifferente von L über K über in die von $\overline{L}$ über $\overline{K}$, d.h. es gilt*

$$\overline{\mathfrak{D}(L/K)} = \overline{\mathfrak{D}}(\overline{L}/\overline{K}). \tag{1.5}$$

Ist speziell L über K abelsch vom Grade n und ist n prim zur Charakteristik p von $\bar{k} = k\mathfrak{p}_0$, so gehen die geometrischen Primdivisoren $\mathfrak{P}$ von L, die die Relativdifferente $\mathfrak{D}(L/K)$ teilen, in diese mit dem genauen Exponenten $e-1$ ein, wobei e die relative Verzweigungsordnung ist; bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{Q}}$ geometrische Primdivisoren von $\overline{L}$[5]), so gehen die Differentenprimteiler wieder mit dem genauen Exponenten $\bar{e}-1$ ($\bar{e}$ = relative Verzweigungsordnung) in $\overline{\mathfrak{D}}(\overline{L}/\overline{K})$ auf. Hieraus folgt nach einfacher Rechnung, daß für zwei verschiedene Primteiler $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ von $\mathfrak{D}(L/K)$ die zugehörigen P-Bilder $\overline{\mathfrak{P}}_1$, $\overline{\mathfrak{P}}_2$ in $\overline{L}$ zueinander prime Divisoren sind.

Nennen wir den geometrischen Divisor

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(L/K) = \sum_{\mathfrak{p} \text{ von } K} \mathfrak{p} \qquad (\mathfrak{p} \text{ verzweigt in } L) \tag{1.6}$$

von K den *geometrischen Führer* von L über K, so folgt aus dem soeben festgestellten Sachverhalt, daß sein p-Bild

$$\overline{\mathfrak{f}} = \overline{\mathfrak{f}(L/K)} = \overline{\mathfrak{f}}(\overline{L}/\overline{K}) = \sum_{\bar{\mathfrak{q}} \text{ von } \overline{K}} \bar{\mathfrak{q}} \qquad (\bar{\mathfrak{q}} \text{ verzweigt in } \overline{L}) \tag{1.6a}$$

der entsprechend definierte geometrische Führer von $\overline{L}$ über $\overline{K}$ ist. Da $(n, p) = 1$ vorausgesetzt war, stimmt $\overline{\mathfrak{f}}(\overline{L}/\overline{K})$ sogar mit dem klassenkörpertheoretischen Kongruenzgruppenführer der Erweiterung $\overline{L}$ über $\overline{K}$ überein und wir erhalten

SATZ 1. *Ist L über K abelsch und geometrisch vom Grade n, P ein K-regulärer Funktionalprimdivisor von L und n prim zur Charakteristik von $k\mathfrak{p}_0$, so geht der geometrische Führer $\mathfrak{f}(L/K)$ von L über K durch p-Restabbildung gemäß* (1.6a) *über in den geometrischen Führer $\overline{\mathfrak{f}}(\overline{L}/\overline{K})$ von $\overline{L}$ über $\overline{K}$ und letzterer stimmt mit dem Kongruenzgruppenführer von $\overline{L}$ über $\overline{K}$ überein.*

Der hier erwähnte Begriff der Kongruenzgruppe ist dabei bekanntlich folgendermaßen erklärt: Ist $D(\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})$ die Gruppe der zu $\overline{\mathfrak{f}}$ primen geometrischen Divisoren von $\overline{K}$ und $S(\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})$ der Strahl modulo $\overline{\mathfrak{f}}$ von $\overline{K}$, d.h. die Gruppe der zu $\overline{\mathfrak{f}}$ primen Hauptdivisoren $(\bar{z})$ mit $\bar{z} \equiv 1 \bmod \overline{\mathfrak{f}}$, so entspricht der abelschen Erweiterung $\overline{L}$ von $\overline{K}$ eine Kongruenzgruppe $H(\overline{L}/\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})$, d.h. eine Untergruppe von $D(\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})$, die $S(\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})$ enthält, mit der Eigenschaft

$$D(\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}})/H(\overline{L}/\overline{K}; \overline{\mathfrak{f}}) \cong \mathfrak{G}(\overline{L}/\overline{K}); \tag{1.7}$$

[5]) Das P-Bild $\overline{\mathfrak{P}}$ eines Primdivisors $\mathfrak{P}$ von L braucht kein Primdivisor von $\overline{L}$ zu sein (vgl. [4d, e]); deshalb bezeichnen wir Primdivisoren von L mit dem Buchstaben $\overline{\mathfrak{Q}}$ und entsprechend Primdivisoren von K mit $\bar{\mathfrak{q}}$.

$H(\overline{L}/\overline{K};\overline{\mathfrak{f}})$ ist hierbei nicht schon nach einem echten Teiler von $\overline{\mathfrak{f}}$ erklärbar. Der Isomorphismus (1.7) wird dabei folgendermaßen geliefert: Jedem Primdivisor $\overline{\mathfrak{q}}$ von $\overline{K}$, der prim zu $\overline{\mathfrak{f}}$ ist, wird nach bekanntem Schema (vgl. z.B. [5a, b], [10]) der Frobenius-Automorphismus $(\overline{\mathfrak{q}}, \overline{L}/\overline{K})$ zugeordnet (beachte, daß der Restklassenkörper von $\overline{\mathfrak{q}}$ endlich ist)

$$\overline{\mathfrak{q}} \to (\overline{\mathfrak{q}}, \overline{L}/\overline{K}) = \sigma \in \mathfrak{G}(\overline{L}/\overline{K}) \tag{1.7a}$$

und durch Produkt- bzw. Summenbildung entspricht somit jedem Divisor aus $D(\overline{K};\overline{\mathfrak{f}})$ ein eindeutig bestimmter Automorphismus aus $\mathfrak{G}(\overline{L}/\overline{K})$; hierbei werden alle n Automorphismen geliefert und diese bestimmen die Klassen aus (1.7); die Ordnung von $(\overline{\mathfrak{q}}, \overline{L}/\overline{K})$ stimmt hierbei jeweils mit dem Relativgrad der Primteiler $\overline{\mathfrak{Q}}$ von $\overline{\mathfrak{q}}$ in $\overline{L}$ überein.

Betrachtet man nun die durch (1.7a) gelieferte Zuordnung von Automorphismen nur für die Gruppe $D^0(\overline{K};\overline{\mathfrak{f}})$ der zu $\overline{\mathfrak{f}}$ primen Hauptdivisoren, so ist $D^0(\overline{K};\overline{\mathfrak{f}})$ eindeutig eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}(\overline{L}/\overline{K})$ zugeordnet, nämlich die Gruppe derjenigen Automorphismen, die den Divisoren aus $D^0(\overline{K},\overline{\mathfrak{f}})$ entsprechen. Bezeichnet $R(\overline{\mathfrak{f}})^\times$ die Multiplikativgruppe des Restklassenringes modulo $\overline{\mathfrak{f}}$, so entspricht $\mathfrak{U}$ eine Klasseneinteilung in $R(\overline{\mathfrak{f}})^\times/\overline{k}^\times$ ($\overline{k}^\times$ = Multiplikativgruppe von $\overline{k}$; beachte die Definition von $S(\overline{K};\overline{\mathfrak{f}})$), d.h. es gibt eine zu $\mathfrak{U}$ isomorphe Faktorgruppe von $R(\overline{\mathfrak{f}})^\times/\overline{k}^\times$.

Ist speziell $\overline{K}=k(\overline{x})$ rational und $\mathfrak{U}$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{G}(\overline{L}/\overline{K})$, so entspricht dem Invariantenkörper von $\mathfrak{U}$ eine Kongruenzklasseneinteilung von $\overline{K}$, bei der (wegen der trivialen Struktur der Divisorenklassengruppe 0-ten Grades von $\overline{K}$) der einem Divisor zugeordnete Automorphismus nur von dessen Grad abhängt[6]); infolgedessen ist der Invariantenkörper von $\mathfrak{U}$ eine Konstantenerweiterung von $\overline{K}$; falls $\overline{L}$ über $\overline{K}$ geometrisch ist, ist dies unmöglich und wir erhalten

KOROLLAR 1. *Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 1 $K=k(x)$ ein rationaler Funktionenkörper, so gibt es vermöge der Kongruenzklasseneinteilung eine zu $\mathfrak{G}(\overline{L}/\overline{K})$ isomorphe Faktorgruppe von $R(\overline{\mathfrak{f}})^\times/\overline{k}^\times$, wobei $R(\overline{\mathfrak{f}})^\times$ die Multiplikativgruppe des Restklassenringes modulo $\overline{\mathfrak{f}}$ bedeutet.*

BEMERKUNG. Die obigen Ergebnisse (außer Korollar 1) gelten natürlich auch für unverzweigte geometrische Erweiterungen; dann ist der geometrische Führer formal gleich dem Einheitsdivisor zu setzen; allerdings darf dann K nicht rational sein.

Ist $\mathfrak{p}$ irgendein Funktionalprimdivisor eines arithmetischen Funktionenkörpers K und $\overline{\mathfrak{q}}$ ein Primdivisor seines Restklassenkörpers $\overline{K}=K\mathfrak{p}$, so entspricht dem geordneten Paar $(\mathfrak{p},\overline{\mathfrak{q}})$ durch Komposition (vgl. [1], [13b]) ein Primdivisor $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ zu einer diskreten Bewertung des Ranges 2 von K. Die Werte der zugehörigen Bewertung sind geordnete Paare ganzrationaler Zahlen, deren erste Komponente mit dem Wert der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Bewertung übereinstimmt (Faktorgruppenbildung in der Wertgruppe; vgl. [4b], Abschnitt 3 und [4h], §1); wir sagen $\mathfrak{p}$ sei die erste Stufe des Primdivisors $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$. Es gilt

[6]) Diese Schlußweise versagt, wenn $\overline{K}$ eine nichttriviale Divisorenklassengruppe 0-ten Grades besitzt.

nun eine eineindeutige Zuordnung

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \leftrightarrow (\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{q}}) \tag{1.8}$$

zwischen den Primdivisoren $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ mit fester erster Stufe $\mathfrak{p}$ und den Paaren $(\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{q}})$ mit Primdivisoren $\bar{\mathfrak{q}}$ von $K\mathfrak{p}$; hierbei sind die zugehörigen Restklassenkörper kanonisch isomorph. Beim Übergang zu einer endlich-algebraischen Erweiterung L von K (insbesondere im abelschen Fall) gelten für $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ Zerlegungsgesetze vom in (1.2), (1.2a) geschilderten Typus. Bei abelschen Erweiterungen L, lassen sich, falls keine Verzweigung vorliegt, ebenfalls die Frobenius-Automorphismen $(\mathfrak{q}(\mathfrak{p}), L/K)$ nach geläufigem Schema (vgl. oben) erklären, da die Restklassenkörper der $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ endlich sind.

Aus der früheren Identifikation von $\mathfrak{G}(L/K)$ und $\mathfrak{G}(\overline{L}/\overline{K})$ bei separabelträgem $\mathfrak{P}$ folgt sofort

KOROLLAR 2. *Besitzt der Funktionalprimdivisor $\mathfrak{p}$ von K in der abelschen Erweiterung L von K eine K-reguläre oder allgemeiner eine separabel-träge Fortsetzung $\mathfrak{P}$, so stimmt das Zerlegungsgesetz eines $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ in L mit dem des ihm gemäß (1.8) entsprechenden $\bar{\mathfrak{q}}$ von $K\mathfrak{p}$ in $L\mathfrak{P}$ überein, und bei kanonischer Identifikation der Galoisgruppen $\mathfrak{G}(L/K)$ und $\mathfrak{G}(L\mathfrak{P}/K\mathfrak{p})$ gilt für die Frobenius-Automorphismen*

$$(\bar{\mathfrak{q}}, L\mathfrak{P}/K\mathfrak{p}) = (\mathfrak{q}(\mathfrak{p}), L/K). \tag{1.9}$$

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir noch einige Bemerkungen zu dem Fall machen, in dem $\mathfrak{p}$ keine K-reguläre Fortsetzung in L besitzt (dies ist ein, wie wir später sehen werden, sehr selten vorkommender Ausnahmefall); der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf zyklische Erweiterungen vom Primzahlgrad q (setzen aber nicht die Regularität von $\mathfrak{p}$ voraus) und unterscheiden die folgenden Fälle:

1. *$\mathfrak{p}$ reinverzweigt in L, d.h.* $r = f_{\mathfrak{Q}} = 1$, $e_{\mathfrak{Q}} = q$. Dann stimmt $K\mathfrak{p}$ mit $L\mathfrak{P}$ überein und die $\bar{\mathfrak{q}}$ ändern sich nicht beim Übergang zu $L\mathfrak{P}$. Dagegen sind alle $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ in L *reinverzweigt* von der Ordnung q.

2. *$\mathfrak{p}$ inseparabel-träge in L, d.h.* $r = e_{\mathfrak{Q}} = 1$, $f_{\mathfrak{Q}} = f_{\mathfrak{Q},i} = q$. Da $L\mathfrak{P}$ rein inseparabel vom Grade q über $K\mathfrak{p}$ ist und da der Konstantenkörper von $K\mathfrak{p}$ vollkommen ist, sind alle $\bar{\mathfrak{q}}$ von $K\mathfrak{p}$ in $L\mathfrak{P}$ reinverzweigt; somit sind alle $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ von K in L *reinverzweigt* von der Ordnung q.

3. *$\mathfrak{p}$ vollzerlegt in L, d.h.* $r = q$, $e_{\mathfrak{Q}} = f_{\mathfrak{Q}} = 1$. An die Stelle von $L\mathfrak{P}$ treten hier q zu $K\mathfrak{p}$ isomorphe Körper und somit sind alle $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ von K in L *vollzerlegt*, d.h. zerfallen in q Fortsetzungen; jedem $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ ist als Frobenius-Automorphismus der identische Automorphismus von $\mathfrak{G}(L/K)$ zugeordnet.

Auf die verbleibenden separabel-trägen aber nicht K-regulären Fälle, hier sind Konstantenerweiterungen und separabel-träge geometrische Erweiterungen mit Geschlechtsabnahme zu unterscheiden, kommen wir an späterer Stelle zurück, da sie sehr selten sind; die Frobenius-Automorphismen der $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ können hier wie üblich erklärt werden. Der Fall einer separablen zyklischen Erweiterung des Grades q von $\overline{K}$, wo q die Charakteristik von $\overline{K}$ ist, wird bei uns i.a. nicht auftreten (vgl. Fußnote 11).

§ 2. Arithmetische Divisorgruppen und zugeordnete globale Kongruenzeinteilungen

Wir wollen nun einem arithmetischen Funktionenkörper K, der den endlich-algebraischen Zahlkörper k zum genauen Konstantenkörper hat, neben der geometrischen Divisorengruppe $D(K)$ noch weitere Divisorengruppen zuordnen. Dazu geben wir zunächst Vorschriften an, wie der Gesamtheit $\{\mathfrak{p}_0\}$ der endlichen Primdivisoren (Primideale) $\mathfrak{p}_0$ des Zahlkörpers k ein zugehöriges globales System $F=\{\mathfrak{p}\}$ von Funktionalprimdivisoren zugeordnet werden kann. Diese Vorschriften lauten:

Ein *globales System von Funktionalprimdivisoren* $F=\{\mathfrak{p}\}$ *von* K erfülle die folgenden Bedingungen:

(F_1) Zu jedem $\mathfrak{p}_0$ von k seien mindestens eine und höchstens endlich viele Funktionalfortsetzungen $\mathfrak{p}$ ausgewählt.

(F_2) Falls zu $\mathfrak{p}_0$ eine reguläre Funktionalfortsetzung $\mathfrak{p}$ in K existiert, so sei zu $\mathfrak{p}_0$ genau eine Funktionalfortsetzung $\mathfrak{p}$ auf K ausgewählt und diese soll regulär sein[7]).

F ist durch diese Vorschrift natürlich nicht eindeutig festgelegt, jedoch gibt es stets zu fast allen $\mathfrak{p}_0$ ein reguläres $\mathfrak{p}$ in K und für $g(K/k)\geqq 1$ ist dieses sogar eindeutig bestimmt. Falls $K=k(x)$ ein rationaler Funktionenkörper ist, so gibt es zu jedem $\mathfrak{p}_0$ ein reguläres $\mathfrak{p}$, nämlich die Funktionalfortsetzung bezüglich der Transzendenten x, und wir treffen die Festsetzung:

(F_x) Falls $K=k(x)$ ist, so bestehe $F=F_x$ aus der Gesamtheit der Funktionalfortsetzungen $\mathfrak{p}$ der $\mathfrak{p}_0$ bezüglich x.

Das System F_x besteht in diesem Fall nur aus regulären $\mathfrak{p}$ und erfüllt die Bedingungen ($F_{1,2}$); allerdings hängt es von x, d.h. von der Auszeichnung der Transzendenten, ab.

Ist nun zum Körper K ein globales Funktionalprimdivisorsystem F gegeben, so bezeichnen wir für jedes $\mathfrak{p}\in F$ mit $Q(\mathfrak{p})$ die Gesamtheit der zugehörigen $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$; mit $Q=Q(F)$ bezeichnen wir die Gesamtheit der $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ mit $\mathfrak{p}\in F$, $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})\in Q(\mathfrak{p})$ und nennen $Q(F)$ *das durch* F *gegebene System von arithmetischen Primdivisoren* $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ *von* K. Die mit den $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})\in Q(F)$ als Erzeugenden gebildete freie abelsche Gruppe, d.h. die Gesamtheit der Ausdrücke

$$(2.1)\qquad \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{a}_a=\mathfrak{a}_a(F)=\sum\limits_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})\in Q} n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}\cdot\mathfrak{q}(\mathfrak{p})=\sum\limits_{\mathfrak{p}\in F}\sum\limits_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})\in Q(\mathfrak{p})} n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}\cdot\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \\ (n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}\ \text{ganzrational, fast alle}\ n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}=0) \end{array} \right\}$$

mit komponentenweiser Erklärung der Addition, nennen wir die *erste arithmetische Divisorengruppe* $D_a^1(K;Q)=D_a^1(K;F)=D_a^1(K)$ *von* K *bezüglich* F und ihre Elemente die *arithmetischen Divisoren* 1. *Art von* K *bezüglich* F.

BEMERKUNG. Ist $K=k(x)$ und ist $\mathfrak{o}$ der Ring der ganzalgebraischen Zahlen von k, bildet man zu den beiden affinen arithmetischen Ringen $\mathfrak{o}[x]$, $\mathfrak{o}[x^{-1}]$

[7]) Man könnte die Bedingung (F_2) noch abschwächen zu einer Bedingung (F_2'), indem man die Gültigkeit der Regel nur für fast alle $\mathfrak{p}_0$ fordert; dies ist eventuell im Hinblick auf Schachtelungssätze zweckmäßig.

die zugehörige arithmetische abstrakte Mannigfaltigkeit V (vgl. etwa [8a, b, c]), so entsprechen die maximaldimensionalen arithmetischen Lokalitäten eineindeutig den $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(F)$. Diese Lokalitäten repräsentieren aber die Erzeugenden der (arithmetischen) rationalen 0-Zyklengruppe, womit der Zusammenhang zu den Ansätzen von LANG aufgezeigt ist.

Ist $D_a^1(K) = D_a^1(K; F)$ wie eben zu K definiert und L eine beliebige abelsche Erweiterung von K mit der Galoisgruppe $\mathfrak{G}(L/K)$, so gilt für die Primdivisoren $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(F)$ ein Zerlegungsgesetz von dem in §1 geschilderten Typus. Wir nennen die Menge $M = M(L/K; F)$ der $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(F)$, die beim Übergang zu L verzweigt sind, den *Träger des exakten arithmetischen Führers von L über K*; $M(L/K; F)$ ist im allgemeinen eine unendliche Menge von Primdivisoren, auf deren Struktur wir anschließend eingehen. Jedem $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(F) - M(L/K; F)$ kann gemäß §1 eindeutig ein Frobenius-Automorphismus $(\mathfrak{q}(\mathfrak{p}), L/K) \in \mathfrak{G}(L/K)$ zugeordnet werden und entsprechend zu §1 ist jedem Divisor $\mathfrak{a}_a$ aus der Untergruppe $D_a^1(K; Q - M)$ der zu $M(L/K; F)$ fremden Divisoren aus $D_a^1(K)$ eindeutig ein Automorphismus aus $\mathfrak{G}(L/K)$ zugeordnet. Diese Automorphismen liefern in $D_a^1(K; Q - M)$ eine endliche Klasseneinteilung; die Einsklasse $H_a^1(L/K; Q - M)$ (ihren Divisoren ist der identische Automorphismus zugeordnet) ist eine Untergruppe und heiße die L über K zugeordnete *Kongruenzgruppe* in $D_a^1(K; F)$. Die Struktur der zugehörigen Klasseneinteilung wollen wir untersuchen.

Wir verwenden zunächst das aus [4c, d, e] folgende

LEMMA 2. *Ist L eine geometrische Erweiterung von K, so folgt für die $\mathfrak{p} \in F$: Höchstens endlich viele $\mathfrak{p}$ sind verzweigt oder haben eine inseparable Restklassenkörpererweiterung; fast alle Fortsetzungen $\mathfrak{P}$ der $\mathfrak{p} \in F$ auf L sind überdies K-regulär.*

Somit bilden die Fortsetzungen $\mathfrak{P}$ der $\mathfrak{p} \in F$ ein System F^* von Funktionalprimdivisoren von L, das die Bedingungen (F_1), (F_2') erfüllt und wir können somit entsprechend die Gruppe $D_a^1(L; F^*)$ bilden. Die $\mathfrak{p} \in F$ lassen sich also bezüglich der Erweiterung L über K in folgende 3 Klassen einteilen:

(I) $\mathfrak{p}$ mit K-regulärer Fortsetzung in L und Charakteristik $k\mathfrak{p}$ teilt nicht $[L:K]$ (unendlich viele, fast alle),

(II) verzweigte oder inseparable $\mathfrak{p}$ (endlich viele),

(III) die restlichen $\mathfrak{p}$ (endlich viele).

Ist ferner $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(L/K)$ der geometrische Führer von L über K, so nennen wir die Gesamtheit derjenigen $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(F)$, für die $\mathfrak{p}$ entweder aus (II) oder (III) ist oder für die, falls $\mathfrak{p}$ aus (I) ist, das zu $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ gehörige $\bar{\mathfrak{q}}$ von $K\mathfrak{p}$ ein Teiler von $\bar{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f}\mathfrak{p}$ ist, den *Träger des regulären Führers von L über K* und bezeichnen sie mit $M_r(L/K; F)$. Für Funktionalprimdivisoren $\mathfrak{p}$ aus (I) oder (II) stimmen die zugehörigen $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ in $M(L/K; F)$ und $M_r(L/K; F)$ überein; lediglich für $\mathfrak{p}$ aus (III) können wir in $M_r(L/K; F)$ zusätzliche (d.h. zu viele) $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ erfaßt haben. Wir können nun analog zu oben die Divisorengruppe $D_a^1(K; Q - M_r)$ bilden.

Ist $\mathfrak{p}$ aus (I), so stimmt die durch $\mathfrak{G}(L/K)$ gelieferte Klasseneinteilung der arithmetischen Divisoren aus $D_a^1(K; (Q-M_r)\cap Q(\mathfrak{p}))$, die also nur für $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(\mathfrak{p})$ von 0 verschiedene Koeffizienten haben können, bei kanonischer Identifikation überein mit der durch $L\mathfrak{P}$ über $K\mathfrak{p}$ gelieferten Kongruenzklasseneinteilung in $D(K\mathfrak{p}, \mathfrak{f}\mathfrak{p})$; insbesondere sind also alle Automorphismen von $\mathfrak{G}(L/K)$ vertreten, d.h. wir erhalten $n=[L:K]$ verschiedene Klassen.

SATZ 2. *Jeder abelschen Erweiterung L von K entspricht vermöge der Frobenius-Automorphismen $(\mathfrak{q}(\mathfrak{p}), L/K)$ eine Klasseneinteilung*

$$D_a^1(K; Q-M)/H_a^1(L/K; Q-M) \tag{2.2}$$

der arithmetischen Divisorengruppe 1. Art. Ist speziell L über K geometrisch mit dem geometrischen Führer $\mathfrak{f}=\mathfrak{f}(L/K)$, so ist bei obiger Bedeutung von $M_r=M_r(L/K; F)$

$$D_a^1(K; Q-M_r)/H_a^1(L/K; Q-M_r) \cong \mathfrak{G}(L/K); \tag{2.3}$$

für alle $\mathfrak{p}\in F$, zu denen ein K-reguläres $\mathfrak{P}$ in L existiert, stimmt die Klasseneinteilung in $D_a^1(K; (Q-M_r)\cap Q(\mathfrak{p}))$ bei kanonischer Identifizierung mit der durch $L\mathfrak{P}$ über $K\mathfrak{p}$ in $D(K\mathfrak{p}; \mathfrak{f}\mathfrak{p})$ gelieferten überein.

Wir wollen zunächst noch einige Bemerkungen zu den verschiedenen hier eingeführten bzw. angedeuteten „Führer"-Begriffen machen. Dazu verwenden wir das

LEMMA 3. *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei verschiedene ganze geometrische Divisoren von K, so gibt es unendlich viele $\mathfrak{p}\in F$, die in L K-reguläre Fortsetzungen besitzen, so daß die $\mathfrak{p}$-Bilder $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{p}$ verschieden sind*[8]).

Wenden wir dieses auf abelsche geometrische Erweiterungen mit verschiedenen geometrischen Führern an, dann sind für unendlich viele $\mathfrak{p}$ die lokal reduzierten Führer verschieden, so folgt das

KOROLLAR 1. *Geometrische abelsche Erweiterungen von K mit verschiedenen geometrischen Führern liefern verschiedene Kongruenzeinteilungen in $D_a^1(K; F)$.*

Zur Formulierung eines Eindeutigkeitssatzes verbleibt die Frage, ob verschiedene geometrische abelsche Erweiterungen mit dem gleichen geometrischen Führer (es gibt im allgemeinen jeweils unendlich viele verschiedene Erweiterungen mit gleichem geometrischen Führer) die gleiche Kongruenzeinteilung liefern können; hierauf kommen wir in den nächsten Paragraphen zurück.

Um die Gesamtheit der bei L über K verzweigten $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})\in Q(F)$ genauer charakterisieren zu können, führen wir nun noch eine weitere Divisorengruppe zu K und F ein. Ein Ausdruck der Form

$$\left\{\begin{array}{c} \mathfrak{a}_a^* = \mathfrak{a}_a^*(F) = \sum\limits_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})\in Q} (n_{\mathfrak{p}}^1, n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}^2)\cdot \mathfrak{q}(\mathfrak{p}) = \sum\limits_{\mathfrak{p}\in F} \sum\limits_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})\in Q(\mathfrak{p})} (n_{\mathfrak{p}}^1, n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}^2)\cdot \mathfrak{q}(\mathfrak{p}), \\ (n_{\mathfrak{p}}^1, n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}^2) \text{ geordnete Paare ganzrationaler Zahlen,} \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

[8]) Für Divisoren verschiedenen Grades ist dies klar; den verbleibenden Fall führt man auf einen rationalen Teilkörper von K zurück und kann die Behauptung durch Rechnen mit Polynomen unmittelbar bestätigen.

heißt ein *arithmetischer Divisor* 2. *Art von K bezüglich F*, wenn folgende Nebenbedingungen für die geordneten Koeffizientenpaare erfüllt sind:

(H) Für alle $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(\mathfrak{p})$ hat $n^1_{\mathfrak{p}}$ den gleichen Wert;

(E_1) Für fast alle $\mathfrak{p} \in F$ ist $n^1_{\mathfrak{p}} = 0$;

(E_2) Für jedes $\mathfrak{p} \in F$ gibt es nur endlich viele $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(\mathfrak{p})$ mit $n^2_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})} \neq 0$;

(R) Es gibt einen geometrischen Divisor $\mathfrak{a}$ von K, so daß für fast alle regulären $\mathfrak{p} \in F$ der Divisor $\sum_{\bar{\mathfrak{q}}} n^2_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})} \bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\mathfrak{p}$ ist bei der Zuordnung von $\bar{\mathfrak{q}}$ von $K\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$[9]).

Erklären wir die Addition der Ausdrücke (2.4) komponentenweise, wobei in den geordneten Koeffizientenpaaren ebenfalls komponentenweise addiert wird, so entsteht eine abelsche Gruppe, die *zweite arithmetische Divisorengruppe* $D^2_a(K; F)$ *von K bezüglich F*. Man kann zeigen (vgl. [4*b*]), daß man vermöge der Darstellung der Werte der zu den $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ gehörigen Bewertungen von K als geordnete Paare ganzrationaler Zahlen jedem Element $x \neq 0$, $x \in K$ einen Hauptdivisor zuordnen kann, der gerade ein arithmetischer Divisor 2. Art ist. Ferner läßt sich $D^1_a(K; F)$ kanonisch isomorph in $D^2_a(K; F)$ einbetten vermöge der Zuordnung

$$\mathfrak{a}_a = \sum_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q} n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})} \cdot \mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \to \mathfrak{a}^*_a = \sum_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q} (0, n_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}) \cdot \mathfrak{q}(\mathfrak{p}). \tag{2.5}$$

Ist nun L über K eine geometrische abelsche Erweiterung, $\mathfrak{f}(L/K)$ ihr geometrischer Führer, so können wir ihr einen arithmetischen Divisor $\mathfrak{f}^*_a(L/K)$ 2. Art als regulären arithmetischen Führer zuordnen durch folgende Vorschrift für die geordneten Koeffizientenpaare $(n^1_{\mathfrak{p}}, n^2_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})})$:

$$(n^1_{\mathfrak{p}}, n^2_{\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}) = \begin{cases} (1, 0), & \text{falls } \mathfrak{p} \text{ aus (II) oder (III) für } L \text{ über } K, \\ (0, n_{\bar{\mathfrak{q}}}), & \text{falls } \mathfrak{p} \text{ aus (I) und } n_{\bar{\mathfrak{q}}} \text{ Koeffizient von } \bar{\mathfrak{q}} \text{ im} \\ & \text{lokal reduzierten Führer } \bar{\mathfrak{f}}(L\mathfrak{P}/K\mathfrak{p}) = \bar{\mathfrak{f}}\mathfrak{p}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Dann läßt sich die Kongruenzklasseneinteilung des Satzes 2 modulo $\mathfrak{f}^*_a(L/K)$ für die $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ aus $Q - M_r$ erklären; wie dies im einzelnen aussieht, zeigen die Spezialfälle im nächsten Paragraphen.

§ 3. Zyklische Erweiterungen vom Kummerschen Typus

Es sei k ein endlich-algebraischer Zahlkörper, der die n-ten Einheitswurzeln enthält, $\mathfrak{o}$ der Ring der ganzalgebraischen Zahlen von k und $K = k(x)$ ein rationaler Funktionenkörper über k: Ist L eine zyklische geometrische Erweiterung n-ten Grades von K, so ist sie gemäß [3*a*] vom *Kummerschen Typus*, d.h. von der Form

$$\begin{cases} L = K(y) \quad \text{mit} \quad y^n = B \in K, \\ \text{wobei} \quad B \neq b \cdot B_0^d \quad \text{mit} \quad b \in k, \; B_0 \in K \quad \text{und} \quad d \mid n, \; d > 1; \end{cases} \tag{3.1}$$

[9]) Vgl. [4*b*], Abschnitt 4; dort wurde bei einer entsprechenden Fragestellung die Bedingung (R) nicht mitgefordert; der hier verschärfte Divisorbegriff ist aber allgemein genug.

hierbei werden die Automorphismen aus $\mathfrak{G}(L/K)$ geliefert durch die Substitutionen

(3.1a) $\quad y \to y \cdot \varepsilon^{\nu} \qquad (\nu \bmod n,\ \varepsilon$ primitive n-te Einheitswurzel).

Das Element y in (3.1) ist natürlich nicht eindeutig bestimmt; vielmehr geht die Gesamtheit der Erzeugungen von L der Form (3.1) aus einer festen vermöge der Substitutionen

(3.2) $\quad y \to z = y^{\varkappa} \cdot B_0,\ B \to B' = B^{\varkappa} \cdot B_0^{n}$ mit $(\varkappa, n) = 1$ und $B_0 \neq 0$ aus K

hervor. Ist $\mathfrak{p}_\infty$ der geometrische Nennerprimdivisor von x in K, so läßt sich die Erzeugung durch Substitutionen (3.2) auf die *reduzierte Form*

(3.3) $\quad B = \lambda_1 \mathfrak{p}_1 + \cdots + \lambda_r \mathfrak{p}_r - l\,\mathfrak{p}_\infty$ mit $0 < \lambda_\varrho < n, \quad l = \sum_{\varrho=1}^{r} \lambda_\varrho\, d(\mathfrak{p}_\varrho)$

bringen; dabei kann zusätzlich angenommen werden, daß $B = B(x)$ ein Polynom aus $\mathfrak{o}[x]$ ist, das gemäß

(3.3a) $\qquad B(x) = f_1(x)^{\lambda_1} \cdot \cdots \cdot f_r(x)^{\lambda_r}$

in irreduzible Faktoren $f_\varrho(x) \in \mathfrak{o}[x]$, die den $\mathfrak{p}_\varrho$ entsprechen, zerlegt sei. Diese Darstellung (3.3) bzw. (3.3a) ist zwar für $n \neq 2$ nicht eindeutig, doch sind dann zumindest die $f_\varrho(x)$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

In L sind genau die in (3.3) auftretenden $\mathfrak{p}_\varrho$ *verzweigt*, und zwar von der Ordnung

(3.4) $\qquad e_\varrho = \dfrac{n}{d_\varrho}$ mit $d_\varrho = (\lambda_\varrho, n)$,

ferner für $l \not\equiv 0 \bmod n$ auch noch $\mathfrak{p}_\infty$, und zwar von der Ordnung

(3.4a) $\qquad e_\infty = \dfrac{n}{d_\infty}$ mit $d_\infty = (l, n)$;

somit ist das folgende Polynom $f(x) \in \mathfrak{o}[x]$

(3.5) $\quad f(x) = f_1(x) \cdots f_r(x) \cong \mathfrak{f}(L/K) - (l + \nu)\,\mathfrak{p}_\infty, \qquad \nu = \begin{cases} 1 & \text{für } l \not\equiv 0 \bmod n, \\ 0 & \text{für } l \equiv 0 \bmod n \end{cases}$

in der angegebenen Weise divisoräquivalent zum geometrischen Führer $\mathfrak{f}(L/K)$.

BEMERKUNG. Ganz entsprechende formale Regeln und eine gleiche Theorie gelten auch, wenn k ein Galoisfeld ist, das die n-ten Einheitswurzeln enthält, und n prim zur Charakteristik von k ist. Ist im obigen Fall $\mathfrak{p}$ ein Funktionalprimdivisor von K, der in L eine reguläre Fortsetzung besitzt, so erhält man die Erzeugung von $L\mathfrak{P}$ über $K\mathfrak{p}$ in reduzierter Form, indem man die Größe $B(x)$ aus (3.3a) modulo $\mathfrak{p}$ reduziert, d.h. die Restklassen modulo $\mathfrak{p}_0$ der Koeffizienten von $B(x)$ bildet (beachte, daß mit K auch $K\mathfrak{p}$ die n-ten Einheitswurzeln enthält).

Es sei nun speziell k der *rationale Zahlkörper* und $n = 2$ (Kummersche Erweiterungen anderer Grade gibt es dann nicht); die $\mathfrak{p}_0$ von k entsprechen dann eineindeutig den rationalen Primzahlen p. Ordnen wir jedem geometrischen

Primdivisor $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_\infty$ von $K = k(x)$ das zugehörige irreduzible Polynom $f_\mathfrak{p}(x) \in \mathfrak{o}[x]$ vom Inhalt 1 zu, dessen höchster Koeffizient positiv ist, so ist die Zuordnung

$$\mathfrak{p} \leftrightarrow f_\mathfrak{p}(x) \tag{3.6}$$

eineindeutig. Vermöge der Primzahlen p und der irreduziblen Polynome $f_\mathfrak{p}(x)$ läßt sich dann $B(x)$ aus (3.3) auf folgende durch L eindeutig bestimmte reduzierte Form bringen

$$B(x) = a \cdot f(x) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} a = (-1)^\nu \cdot \prod\limits_{\mathfrak{p}|a} \mathfrak{p}, & a \text{ ganzrational}, \quad \nu = 0, 1; \\ f(x) = \prod\limits_{f_\mathfrak{p}|f} f_\mathfrak{p}(x) \in \mathfrak{o}[x] \text{ und vom Inhalt 1.} \end{cases} \tag{3.6a}$$

Wegen (3.5) ist somit der geometrische Führer $\mathfrak{f}(L/K)$ in unserem Fall stets ein geometrischer Divisor von geradem Grade. Hieraus folgt:

LEMMA 4. *Die Gesamtheit der Ausdrücke* (3.6a) *entspricht eineindeutig der Gesamtheit der verschiedenen geometrischen Kummerschen Erweiterungen 2-ten Grades von* $K = k(x)$, *wenn* k *der rationale Zahlkörper ist. Der Erweiterung mit der Größe* $B(x)$ *aus* (3.6a) *ist gemäß* (3.5) *der geometrische Führer* $\mathfrak{f}(L/K)$ *zugeordnet und Erweiterungen mit dem gleichen geometrischen Führer unterscheiden sich nur in der Zahl* a *aus* (3.6a); *umgekehrt entspricht jeder solchen quadratfreien ganzrationalen Zahl* a *genau eine Kummersche Erweiterung mit vorgegebenem* $\mathfrak{f}(L/K)$.

Da es unendlich viele verschiedene quadratfreie ganzrationale Zahlen a der in (3.6a) geschilderten Form gibt, gibt es somit zu vorgegebenem zulässigen geometrischen Führer $\mathfrak{f}(L/K)$ unendlich viele verschiedene geometrische Erweiterungen 2-ten Grades. — Ist dagegen $\bar{k}$ ein Galoisfeld der Charakteristik $\neq 2$, so bedeutet in der (3.6a) entsprechenden Formel (dabei sind die Analoga der $f_\mathfrak{p}(x)$ auf den höchsten Koeffizienten 1 zu normieren) a ein Element aus $\bar{k}$; hier kommt es nur darauf an, ob a ein Quadrat ist oder nicht, und somit gibt es genau 2 Möglichkeiten einer Erweiterung 2-ten Grades. Wir erhalten also

LEMMA 4a. *Ist* $\bar{k}$ *ein Galoisfeld der Charakteristik* $\neq 2$ *und* $\bar{K}$ *ein rationaler Funktionenkörper über* $\bar{k}$, *so gibt es zu jedem zulässigen geometrischen Führer (quadratfreier ganzer Divisor geraden Grades) genau 2 verschiedene Erweiterungen 2-ten Grades* [10]).

Bezeichnen wir nun für ein $\mathfrak{p} \in F_x$ mit $\overline{B(x)}$ die Restklasse von $B(x)$ modulo $\mathfrak{p}$, d.h. das durch Reduktion der Koeffizienten modulo der zugehörigen Primzahl aus (3.6a) entstehende Polynom aus $k\mathfrak{p}[\bar{x}]$, so gilt für das Zerlegungsverhalten der $\mathfrak{p}$ in L das folgende Kriterium:

LEMMA 5. $\mathfrak{p}$ *ist in* L *verzweigt, wenn die zugehörige Primzahl* $\mathfrak{p}$ *ein Teiler von* a *aus* (3.6a) *ist;* $\mathfrak{p}$ *ist in* L *zerlegt, wenn* $\overline{B(x)}$ *ein Quadrat in* $k\mathfrak{p}[\bar{x}]$ *ist;*

[10]) Dies läßt sich auch aus der Klassenkörpertheorie der Kongruenzfunktionenkörper folgern. Denn zu jedem zulässigen Führer $\bar{\mathfrak{f}}$ gibt es in $R(\bar{\mathfrak{f}})^\times/\bar{k}^\times$ genau eine Klasseneinteilung der Ordnung 2 mit dem genauen Führer $\bar{\mathfrak{f}}$; man hat dann noch die Freiheit für einen Primdivisor ungeraden Grades den Frobenius-Automorphismus willkürlich festzusetzen.

alle anderen $\mathfrak{p}$ sind separabel-träge (bis auf eventuell $p=2$) in L, wobei ein K-reguläres $\mathfrak{P}$ dann und nur dann existiert, wenn $\overline{f(x)}$ ein quadratfreies Polynom gleichen Grades ist; ist dies nicht der Fall, so liefert das Produkt der in ungerader Potenz in $\overline{f(x)}$ aufgehenden Primfaktoren entsprechend (3.5) *den lokalen geometrischen Führer in $K\mathfrak{p}$; der zur Primzahl 2 gehörende Primdivisor $\mathfrak{p}$ ist im allgemeinen inseparabel-träge, doch kann in Abweichung von der durch $\overline{B(x)}$ gegebenen Regel auch separable Trägheit vorliegen*[11]).

Daß Erweiterungen mit verschiedenem geometrischem Führer verschiedene Kongruenzeinteilungen in $D_a^1(K)$ liefern, wurde bereits früher gezeigt und läßt sich auch erneut aus den obigen Kriterien ablesen. Erweiterungen mit dem gleichen geometrischen Führer, bei denen sich aber in (3.6a) die Ausdrücke $\prod_{\mathfrak{p}|a} \mathfrak{p}$ unterscheiden, liefern ebenfalls verschiedene Kongruenzeinteilungen, da die Menge der verzweigten $\mathfrak{p}$ verschieden ist. Es verbleibt nun noch die Aufgabe, den Einfluß des Faktors ± 1 in (3.6a) auf die Kongruenzeinteilung zu untersuchen. Wir wollen hierzu schärfer folgendes zeigen: Bei verschiedenem a in (3.6a) unterscheiden sich die zugehörigen Kongruenzeinteilungen stets bei unendlich vielen $\mathfrak{p}$; man braucht also nicht die verzweigten Primdivisoren, d.h. den arithmetischen Führer, genau zu kennen, um die Kongruenzeinteilung zu charakterisieren, sondern es genügt die Kenntnis eines Erklärungsmoduls $\mathfrak{m}_a$, der den Führer umfaßt.

Es seien also zwei verschiedene geometrische Erweiterungen 2-ten Grades L_1 und L_2 mit dem gleichen geometrischen Führer $\mathfrak{f}$, d.h. gleichem normiertem Polynom $f(x)$ in (3.6a), gegeben; dagegen seien in (3.6a) die zugehörigen Zahlen a bei beiden Erweiterungen verschieden; sie seien mit a_1 und a_2 bezeichnet. Mit F_0 bezeichnen wir die Gesamtheit derjenigen $\mathfrak{p}$, die für beide Erweiterungen regulär sind, also insbesondere die Teiler von a_1 und a_2 nicht enthalten. Für $\mathfrak{p} \in F_0$ ist also die zugehörige lokale Erweiterung durch $\overline{f(x)}$ und die konstanten Faktoren $\overline{a_1} = a_1 \mathfrak{p}$ bzw. $\overline{a_2} = a_2 \mathfrak{p}$ bestimmt. Die zugehörigen lokalen Erweiterungen für $\mathfrak{p}$ sind gleich, wenn $\overline{a_1}$ und $\overline{a_2}$ gleichzeitig Quadrate bzw. Nichtquadrate in $\bar{k} = k\mathfrak{p}_0$ sind, sonst sind sie verschieden; sie stimmen also überein, wenn das Produkt $a_1 a_2$ quadratischer Rest modulo $\mathfrak{p}$ (zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primzahl) ist, und sind verschieden, wenn $a_1 a_2$ quadratischer Nichtrest modulo $\mathfrak{p}$ ist. Nun gibt es aber (vgl. z.B. [3*b*, *c*]) bei festem $a_1 a_2$, das kein Quadrat ist, unendlich viele Primzahlen von jeder der beiden Sorten und somit auch unendlich viele $\mathfrak{p}$, für die die lokalen Kongruenzeinteilungen verschieden sind.

SATZ 3. *Ist k der rationale Zahlkörper und $K = k(x)$, so entsprechen zwei verschiedenen geometrischen zyklischen Erweiterungen L_1 und L_2 2-ten Grades von K verschiedene Kongruenzeinteilungen in $D_a^1(K; F_x)$. Sind speziell die zugehörigen geometrischen Führer gleich und ist F_0 die Gesamtheit der $\mathfrak{p}$, die in L_1 und in L_2 eine K-reguläre Fortsetzung haben, so gibt es unendlich viele $\mathfrak{p} \in F_0$,*

[11]) Zum Beispiel wird aus der globalen Gleichung $y^2 = 4x + 1$ durch Reduktion modulo 2 $\bar{y}^2 = 1$, was auf inseparable Trägheit hindeutet; vermöge der Substitution $y = 2z - 1$ erhalten wir die globale Gleichung $z^2 - z = x$, also ist 2 separabel-träge.

für die die zugehörigen lokalen Kongruenzeinteilungen modulo $\bar{\mathfrak{f}}$ *in* $K\mathfrak{p}$ *gleich sind, und unendlich viele, für die sie verschieden sind, und zwar je nachdem, ob die Zahl* $a_1 a_2$ *aus* (3.6a) *quadratischer Rest modulo* $\mathfrak{p}$ *(zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primzahl) ist oder nicht.*

Wir können diese *Eindeutigkeitsaussage* durch eine *Existenzaussage* ergänzen, indem wir den Begriff einer zulässigen Kongruenzaussage der Ordnung 2 präzisieren. Dazu einige Bezeichnungen.

Ist $\mathfrak{f}$ ein zulässiger geometrischer Führer von K (für die Ordnung 2), d.h. ein quadratfreier ganzer geometrischer Divisor geraden Grades, und $f(x)$ das ihm gemäß (3.5), (3.6), (3.6a) zugeordnete normierte Polynom vom Inhalt 1, so bezeichnen wir mit $F(\mathfrak{f})$ die Gesamtheit der endlich vielen $\mathfrak{p}$, für die $\overline{f(x)}$ nicht regulär (d.h. quadratfrei und vom gleichen Grad wie $f(x)$) ist oder die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primzahl $p \leqq$ Grad von $\mathfrak{f}$ ist. Ist a eine quadratfreie ganzrationale Zahl, so sei $F(a)$ die Menge der $\mathfrak{p} \in F_x$, für deren zugehörige Primzahl gilt $p \mid a$. Eine Klasseneinteilung der Ordnung 2 denken wir uns stets durch die beiden Zahlen $+1$, falls der Divisor in der Einsklasse ist, und -1, falls der Divisor in der Nebenklasse ist, entsprechend dem nichttrivialen Charakter der Galoisgruppe charakterisiert.

Definition. Eine Kongruenzklasseneinteilung der Ordnung 2 in $D_{\mathfrak{a}}^1(K)$, d.h. in der Untergruppe der zu einem arithmetischen Divisor 2. Art fremden $\mathfrak{a}_a$, heiße *zulässig*, wenn eine endliche Menge F' von Funktionalprimdivisoren $\mathfrak{p}$ und ein zulässiger geometrischer Führer $\mathfrak{f}$ mit $F(\mathfrak{f}) \subseteqq F'$ existiert, so daß gilt:

(K_1) Für alle $\mathfrak{p} \in F - F'$ stimmt die zugehörige lokale Kongruenzklasseneinteilung in $K\mathfrak{p}$ vermöge (1.8), (1.9) mit einer solchen zum genauen Führer $\bar{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f}\mathfrak{p}$ überein.

(K_2) Ist für ein festes $\mathfrak{p}_1 \in F - F'$ die lokale Kongruenzeinteilung in $K\mathfrak{p}_1$ bekannt und ist $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$ ein fester geometrischer Primdivisor vom Grade 1 [12]) von K mit $\mathfrak{p}\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in F - F'$, so gibt es ein ganzrationales b mit $F(b) \subseteqq F'$, so daß die Klassen der $\mathfrak{p}\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in F - F'$ sich jeweils nur um den Wert $(b/\mathfrak{p})\,(b/\mathfrak{p}_1)^{-1}$ (Legendre-Symbol für die zugehörigen Primzahlen) unterscheiden.

Zwei Kongruenzklasseneinteilungen in $D_{\mathfrak{a}}^1(K)$ heißen *gleich*, wenn die zugehörigen lokalen Einteilungen für fast alle $\mathfrak{p}$ übereinstimmen.

Nach den obigen Überlegungen ist jede Klasseneinteilung zu einer geometrischen Erweiterung 2. Grades von dieser zulässigen Form. Ist umgekehrt eine zulässige Kongruenzklasseneinteilung der Ordnung 2 gegeben und sind die Größen $b, \mathfrak{f}, f(x)$ wie oben bestimmt, ist ferner c' der Wert von $f(x)$ bei $\mathfrak{p}$, so können wir durch Multiplikation von b mit dem Quadrat einer ganzrationalen Zahl (dadurch ändern sich die Werte der Legendre-Symbole nicht) ein b' der Form $b' = a' \cdot c'$ erhalten; betrachten wir nun $B'(x) = a' \cdot f(x)$ und bringen dies auf die reduzierte Form (3.6a), so hat die zugehörige Kummersche Erweiterung gerade die vorgegebene Kongruenzklasseneinteilung.

[12]) Die Existenz eines solchen $\mathfrak{p}$ ist wegen der zweiten Bedingung in der Definition von $F(\mathfrak{f})$ trivialerweise gesichert.

KOROLLAR 1. *Die geometrischen zyklischen Erweiterungen 2. Grades von K entsprechen umkehrbar eindeutig den verschiedenen zulässigen Kongruenzklasseneinteilungen 2. Ordnung in $D_a^1(K)$.*

An der obigen Definition, die in diesem Spezialfall zugleich einen leichten Zugang zu einem Existenzsatz liefert, sind zwei Dinge hervorzuheben: Einerseits ist es nicht notwendig, von vornherein den genauen arithmetischen Führer zu kennen, sondern es genügt die Kenntnis eines eventuell zu großen Erklärungsmoduls, und andererseits wird hier eine erste Auskunft gegeben, welcher Art die Bindung zwischen den induzierten lokalen Kongruenzeinteilungen in den $K\mathfrak{p}$ modulo der $\mathfrak{f}\,\mathfrak{p}$ ist (es gibt jeweils 2 Möglichkeiten); sie wird hier durch eine zahlentheoretische Funktion des Konstantenkörpers, nämlich durch das Legendre-Symbol, beschrieben.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Struktur der zu einer Erweiterung gehörigen Klasseneinteilung natürlich von der Auswahl des Systems F_x abhängt, d.h. daß bei Auswahl eines anderen Systems (also einer anderen Transzendenten) die zur gleichen Erweiterung gehörige Klasseneinteilung anders aussehen kann; allerdings reicht ein festes System vollständig aus, um alle Erweiterungen zu charakterisieren. — Für konstruktive Zwecke nennen wir noch die folgende etwas schwächere Form des obigen Ergebnisses:

KOROLLAR 2. *Ist ein zulässiger geometrischer Führer $\mathfrak{f}$ und eine endliche Menge F'' von Primdivisoren $\mathfrak{p}$ mit $F'' \cap F(\mathfrak{f}) = \varnothing$ vorgegeben und wird für jedes $\mathfrak{p} \in F''$ eine feste Kongruenzeinteilung 2. Ordnung mit dem Führer $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ in $K\mathfrak{p}$ ausgezeichnet, so gibt es eine geometrische Erweiterung 2. Grades von K vom geometrischen Führer $\mathfrak{f}$, die in den $K\mathfrak{p}$ die vorgegebenen lokalen Kongruenzeinteilungen induziert.*

Der Beweis ist eine einfache Anwendung des Satzes über simultane Kongruenzen im rationalen Zahlkörper (Konstruktion von a). Natürlich ist diese Erweiterung nicht eindeutig bestimmt, denn man kann bei einem weiteren $\mathfrak{p}$ auf 2 verschiedene Weisen eine Kongruenzeinteilung vorschreiben.

Die hier geschilderten Ergebnisse lassen sich weitgehend (zumindest die Eindeutigkeitsaussage) auch auf Kummersche Erweiterungen n-ten Grades über einem Körper, der die n-ten Einheitswurzeln enthält, übertragen. Allerdings sind dabei die Überlegungen etwas komplizierter, da im Gegensatz zu (3.6a) die reduzierten Darstellungen (3.3), (3.3a) nicht mehr eineindeutig den verschiedenen Erweiterungen entsprechen (bei der gleichen Erweiterung sind verschiedene Exponentensysteme λ_ϱ möglich) und auch die Normierung der zu den ψ_ϱ gehörigen Polynome nicht mehr in so einfacher Weise möglich ist; dies wirkt sich insbesondere auf die Herleitung eines Existenzsatzes aus. Hierauf soll an anderer Stelle zurückgekommen werden.

§ 4. Abelsche Konstantenerweiterungen

Es sei hier $K = k(x)$ ein rationaler Funktionenkörper über einem beliebigen endlich-algebraischen Zahlkörper k; k_1 sei eine abelsche Erweiterung n-ten Grades von k und $K_1 = k_1(x)$. Dann ist auch K_1 über K abelsch vom Grade n

und bei üblicher Identifizierung der Automorphismen (Wirkung auf die Koeffizienten der rationalen Funktionen) gilt

$$\mathfrak{G}(K_1/K) \cong \mathfrak{G}(k_1/k). \tag{4.1}$$

Ist $\mathfrak{p}_0$ ein endlicher Primdivisor von k, $\mathfrak{p}$ seine Funktionalfortsetzung bezüglich x auf K, so entsprechen sich beim Übergang zu k_1 bzw. zu K_1 die Zerlegungsgesetze dieser Divisoren eineindeutig, d.h. es gilt

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{p}_0 \cong e\,\mathfrak{P}_{01} + \cdots + e\,\mathfrak{P}_{0r} \leftrightarrow \mathfrak{p} \cong e\,\mathfrak{P}_1 + \cdots + e\,\mathfrak{P}_r \\ (e = \text{Verzweigungsordnungen},\ f = \text{Relativgrade},\ n = efr) \end{array}\right\}, \tag{4.2}$$

wobei die $\mathfrak{P}_\varrho$ die Funktionalfortsetzungen der $\mathfrak{P}_{0\varrho}$ bezüglich x auf K_1 sind; den Restklassenkörpererweiterungen $k_1\mathfrak{P}_{0\varrho}$ über $k\mathfrak{p}_0$ entsprechen gemäß

$$K_1\mathfrak{P}_\varrho \cong K\mathfrak{p} \cdot k_1\mathfrak{P}_{0\varrho} \tag{4.2a}$$

die Konstantenerweiterungen der $K\mathfrak{p}$ mit den $k_1\mathfrak{P}_{0\varrho}$ über $k\mathfrak{p}_0$. Insbesondere sind genau diejenigen $\mathfrak{p}$ in K_1 verzweigt, deren zugehöriges $\mathfrak{p}_0$ in k_1 verzweigt ist. Infolgedessen ist ein $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q$ genau dann verzweigt, wenn das zugehörige $\mathfrak{p}$ verzweigt ist.

Ist dagegen $\mathfrak{p}$ in K_1 unverzweigt, so ist dem zugehörigen $\mathfrak{p}_0$ von k eindeutig ein Frobenius-Automorphismus $(\mathfrak{p}_0, k_1/k)$ zugeordnet und wegen (4.1) erhalten wir

$$\mathfrak{p} \quad \mathfrak{p}_0 \to \sigma_0 = (\mathfrak{p}_0, k_1/k) \leftrightarrow \sigma \in \mathfrak{G}(K_1/K). \tag{4.3}$$

Dieses σ ist zugleich erzeugender Automorphismus der zu $\mathfrak{p}$ gehörenden Zerlegungsgruppe und wegen (4.3) und der Struktur der Konstantenerweiterungen von Kongruenzfunktionenkörpern ergibt sich nach einfacher Rechnung

LEMMA 6. *Ist $\mathfrak{p}$ in K_1 unverzweigt, σ der gemäß (4.3) $\mathfrak{p}$ zugeordnete Automorphismus aus $\mathfrak{G}(K_1/K)$, entspricht $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \in Q(\mathfrak{p})$ bei kanonischer Identifizierung der Primdivisor $\bar{\mathfrak{q}}$ von $K\mathfrak{p}$ vom Grade $d = d(\bar{\mathfrak{q}})$, so gilt für den Frobenius-Automorphismus von $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$*

$$(\mathfrak{q}(\mathfrak{p}), K_1/K) = \sigma^d. \tag{4.4}$$

Hieraus und aus der Klassenkörpertheorie der Zahlkörper folgt nun sofort

SATZ 4. *Ist $K = k(x)$ und $K_1 = k_1(x)$ eine abelsche Konstantenerweiterung von K mit der Galoisgruppe $\mathfrak{G}(K_1/K)$, so hat die zugehörige Kongruenzklasseneinteilung in $D_a^1(K; F_x)$ die folgende Struktur: Abgesehen von den endlich vielen in K_1 verzweigten $\mathfrak{p}$ ist in jedem $K\mathfrak{p}$ die Kongruenzklasseneinteilung des Grades f (= Relativgrad von $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{p}$) zum Führer 1 vorgegeben, die nur vom Grad des Divisors $\bar{\mathfrak{a}}$ abhängt; ist hierbei $\mathfrak{p}$ irgendein fester geometrischer Primdivisor ersten Grades von K, so wird die globale Vorschrift dadurch festgelegt, daß $\mathfrak{p}\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}$ der Automorphismus σ, der gemäß (4.3) dem zu $\mathfrak{p}$ gehörigen $(\mathfrak{p}_0, k_1/k)$ zugeordnet ist, als Frobenius-Automorphismus zugeordnet wird. Die Klassengruppe ist isomorph zu $\mathfrak{G}(K_1/K)$.*

Diese Formulierung zeigt die Analogie zu §3, insbesondere zur Definition der zulässigen Kongruenzklasseneinteilung. Auf weitergehende Fragen (z.B.

genaue Bestimmung des Führers) gehen wir hier nicht ein, da hierbei auch die unendlichen Primstellen von k zu berücksichtigen wären. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß ähnliche Ergebnisse (zumindest für fast alle $\mathfrak{p}$) auch gelten, wenn K kein rationaler Funktionenkörper ist.

§ 5. Der Führernormalkörper

Es sei jetzt wieder k der rationale Zahlkörper und $K=k(x)$ der rationale Funktionenkörper über k; mit $\mathfrak{p}_\infty$ bezeichnen wir den geometrischen Nennerprimdivisor von x. Ist dann ein möglicher geometrischer Führer (nicht notwendig von geradem Grade) in der Form

$$\mathfrak{f}=\mathfrak{f}(\ldots/K)=\nu\,\mathfrak{p}_\infty+\mathfrak{p}_1+\cdots+\mathfrak{p}_r \qquad (\nu=0 \text{ oder } 1) \tag{5.1}$$

vorgegeben und jedem $\mathfrak{p}_\varrho$ entsprechend zu (3.6) ein normiertes irreduzibles Polynom $f_\varrho(x)\in\mathfrak{o}[x]$ vom Inhalt 1 zugeordnet, so nennen wir das Polynom

$$\mathfrak{f}\to f(x)=f_1(x)\ldots f_r(x)\in\mathfrak{o}[x] \quad \text{und vom Inhalt 1,} \tag{5.1a}$$

das $\mathfrak{f}$ zugeordnete Führerpolynom $f(x)$; durch $f(x)$ ist $\mathfrak{f}$ bis auf seinen eventuellen $\mathfrak{p}_\infty$-Anteil eindeutig bestimmt.

DEFINITION. Ist $f(x)$ gemäß (5.1a) dem möglichen Führer $\mathfrak{f}$ aus (5.1) zugeordnet, so heiße der Zerfällungskörper $N=N(\mathfrak{f})$ von $f(x)$ über k der *Führernormalkörper* zu $\mathfrak{f}$.

Wir wollen nun zeigen, daß dieser durch $\mathfrak{f}$ eindeutig bestimmte Körper $N(\mathfrak{f})$ Auskunft darüber gibt, welche zyklischen (und damit auch abelschen) Erweiterungen von K mit dem vorgegebenen Führer überhaupt möglich sind.

Ist $n>1$ eine beliebige natürliche Zahl, E_n der Körper der n-ten Einheitswurzeln, d.h. der Zerfällungskörper des n-ten Kreisteilungspolynoms $\Phi_n(x)$, und $N_n(\mathfrak{f})$ der Zerfällungskörper von $\Phi_n(x)\cdot f(x)$, d.h. das Kompositum von E_n und $N(\mathfrak{f})$, so sind die drei Körper E_n, $N(\mathfrak{f})$, $N_n(\mathfrak{f})$ als Zerfällungskörper von Polynomen jeweils galoissch über dem rationalen Zahlkörper k.

Nun gilt, wie aus der Theorie der Dedekindschen Zetafunktionen algebraischer Zahlkörper (vgl. z.B. [3d]) folgt, folgende bekannte Regel: Ist Ω ein über k galoisscher Zahlkörper mit $n=[\Omega:k]$, so hat die Menge $\mathfrak{M}_\Omega$ der Primzahlen p, die in Ω voll zerfallen, die Dirichlet-Dichte

$$\delta(\mathfrak{M}_\Omega)=\frac{1}{n}. \tag{5.2}$$

Auf unsere obige Situation angewendet ergibt dies: Falls $E_n\not\subseteq N(\mathfrak{f})$, d.h. falls $[N(\mathfrak{f}):k]<[N_n(\mathfrak{f}):k]$, so ist

$$\delta(\mathfrak{M}_{N(\mathfrak{f})})>\delta(\mathfrak{M}_{N_n(\mathfrak{f})}). \tag{5.2a}$$

Hieraus folgt: *Falls $E_n\not\subseteq N(\mathfrak{f})$, so gibt es unendlich viele Primzahlen p mit $p\in\mathfrak{M}_{N(\mathfrak{f})}$, $p\notin\mathfrak{M}_{N_n(\mathfrak{f})}$, die also in $N(\mathfrak{f})$ aber nicht in $N_n(\mathfrak{f})$ voll zerfallen.*

Andererseits weiß man (vgl. [6], S. 145), daß für fast alle $p\in\mathfrak{M}_{N(\mathfrak{f})}$ $f(x)$ bei Reduktion modulo p vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{M}_{N_n(\mathfrak{f})}$ und $f(x)\cdot\Phi_n(x)$. Somit folgt wegen (5.2a), daß es für $E_n\not\subseteq N(\mathfrak{f})$

unendlich viele solcher Primzahlen p gibt, daß bei Reduktion modulo p zwar $f(x)$ aber nicht $\Phi_n(x)$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Falls aber $\Phi_n(x)$ modulo p nicht vollständig zerfällt, d.h. falls p in E_n nicht voll zerfällt, so muß nach der Theorie der Kreisteilungskörper $p \not\equiv 1 \bmod n$ sein, und wir erhalten das

LEMMA 7. *Falls $E_n \not\subseteq N(\mathfrak{f})$, so gibt es unendlich viele Primzahlen $p \not\equiv 1 \bmod n$, so daß gleichzeitig $f(x)$ modulo p vollständig in verschiedene Linearfaktoren zerfällt.*

Wenn nun $f(x)$ modulo p vollständig in Linearfaktoren zerfällt und sich sein Grad dabei nicht erniedrigt (dies kann nur für endlich viele p eintreten), so ist der Restklassenring R modulo $\mathfrak{f}$ die direkte Summe von endlich vielen Galoisfeldern von p Elementen, d.h. seine Multiplikativgruppe $R^\times$ ist abelsch vom Typus $(p-1, p-1, \ldots, p-1)$. Wenn zusätzlich $p \not\equiv 1 \bmod n$ ist, d.h. $n \nmid p-1$, so gibt es keine zyklische Faktorgruppe von $R^\times$ der Ordnung n.

Zusammen mit Korollar 1 zu Satz 1 (§1) folgt somit

LEMMA 8. *Falls $E_n \not\subseteq N(\mathfrak{f})$, so gibt es unendlich viele verschiedene $\mathfrak{p}$, für die in $K\mathfrak{p}$ keine zyklische geometrische Kongruenzklasseneinteilung der Ordnung n modulo $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ erklärbar ist.*

Gäbe es eine zyklische Erweiterung n-ten Grades von K mit dem geometrischen Führer $\mathfrak{f}$, so wegen Satz 2 auch für fast alle $\mathfrak{p}$ eine modulo $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ erklärbare Klasseneinteilung, und aus Lemma 8 folgt somit der nachstehende „Nichtexistenzsatz".

SATZ 5. *Ist k der rationale Zahlkörper, $K = k(x)$ ein rationaler Funktionenkörper über k, $\mathfrak{f}$ gemäß (5.1) ein möglicher geometrischer Führer und enthält der zugehörige Führernormalkörper $N(\mathfrak{f})$ nicht die n-ten Einheitswurzeln, so gibt es keine geometrische zyklische Erweiterung n-ten Grades und damit auch keine abelsche Erweiterung vom Exponenten n, die $\mathfrak{f}$ als geometrischen Führer hat.*

Hieraus folgt, daß geometrische zyklische Erweiterungen n-ten Grades höchstens zu solchen geometrischen Führern möglich sind, deren Führernormalkörper $N(\mathfrak{f})$ die n-ten Einheitswurzeln enthält; speziell für $n > 2$ sind solche Erweiterungen also relativ selten, d.h. nur zu speziellen Führern möglich. Eine analoge Aussage gilt übrigens auch für Kongruenzfunktionenkörper. Das Ergebnis zeigt ferner, daß zyklische Erweiterungen, die nicht vom Kummerschen Typus sind, in sehr enger Beziehung zu Einheitswurzeln stehen (vgl. auch den Kroneckerschen Satz über die absolut-abelschen Erweiterungen des rationalen Zahlkörpers).

Da bei dem obigen Beweis an einigen Stellen recht grobe Abschätzungen verwendet wurden, ist es nicht verwunderlich, daß im Falle $E_n \subseteq N(\mathfrak{f})$ (wie einfache Beispiele zeigen) nicht bezüglich aller $\mathfrak{p}$ eine zyklische Kongruenzklasseneinteilung n-ter Ordnung modulo $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ in $K\mathfrak{p}$ möglich sein muß. Dies liegt daran, daß $f(x)$ in irreduzible Faktoren zerlegt sein kann, von denen kein einzelner E_n oder einen Erweiterungskörper von E_n zum Zerfällungskörper hat; für $n = q =$ Primzahl müßten ja in mindestens einem Galoisfeld,

das als Komponente des Restklassenringes modulo $\mathfrak{f}$ $\mathfrak{p}$ auftritt, die q-ten Einheitswurzeln enthalten sein. Falls dagegen ein Faktor $f_\varrho(x)$ von $f(x)$ das n-te Kreisteilungspolynom ist, so ist bei fast allen $\mathfrak{p}$ eine lokale zyklische Kongruenzeinteilung der Ordnung n möglich; dies ist natürlich weniger als die Existenz einer globalen geometrischen zyklischen Erweiterung n-ten Grades zum Führer $\mathfrak{f}$ (vgl. die diesbezüglichen Bemerkungen im nächsten Paragraphen).

§ 6. Existenz zyklischer Erweiterungen von vorgegebenem Primzahlgrad, ergänzende Bemerkungen

Es sei wieder k der rationale Zahlkörper, $K=k(x)$, $q>2$ eine Primzahl und $f(x)=\Phi_q(x)$ das q-te Kreisteilungspolynom; $f(x)$ ist dann irreduzibel vom Grade $q-1$ und es gilt die geometrische Divisoräquivalenz

$$f(x)=\Phi_q(x)\cong \mathfrak{p}-(q-1)\,\mathfrak{p}_\infty, \tag{6.1}$$

wobei $\mathfrak{p}$ ein geometrischer Primdivisor des Grades $q-1$ ist. Wir setzen nun $\mathfrak{f}=\mathfrak{p}$ und wollen die Existenz einer zyklischen geometrischen Erweiterung q-ten Grades von K mit dem genauen geometrischen Führer $\mathfrak{f}$ nachweisen.

Unsere Methode ist dabei analog zum Wittschen Beweisgedanken für den Existenzsatz der Klassenkörpertheorie bei Kongruenzfunktionenkörpern [*11*]: Wir adjungieren zunächst zu K die q-ten Einheitswurzeln und erhalten $K_q=E_q(x)$; K_q ist über K zyklisch vom Grade $q-1$; dabei zerfällt $\mathfrak{p}$ in K_q in Primdivisoren ersten Grades

$$\mathfrak{p}\cong \mathfrak{p}_1+\cdots+\mathfrak{p}_{q-1}. \tag{6.2}$$

Sodann bilden wir eine solche zyklische geometrische Kummersche Erweiterung L_q vom q-ten Grade über K_q, daß sogar L_q noch abelsch über K ist und den genauen Führer $\mathfrak{f}$ (über K_q) hat. Dann existiert eine zyklische geometrische Erweiterung q-ten Grades L von K mit dem vorgegebenen geometrischen Führer $\mathfrak{f}=\mathfrak{p}$.

Es sei ε eine feste primitive q-te Einheitswurzel und m eine feste Primitivwurzel modulo q; wir setzen ferner $s=\frac{q-1}{2}$. Dann erhält man alle primitiven q-ten Einheitswurzeln in der Form

$$\varepsilon,\ \varepsilon^m,\ \varepsilon^{m^2},\ \ldots,\ \varepsilon^{m^{q-2}} \qquad (\varepsilon^{m^{q-1}}=\varepsilon); \tag{6.3}$$

ein erzeugender Automorphismus τ und die Galoisgruppe von E_q über k bzw. von $E_q(x)$ über $k(x)$ wird vollständig beschrieben durch die Festsetzungen

$$\tau(\varepsilon)=\varepsilon^m, \qquad \tau^2,\ \ldots,\ \tau^{q-1}=1. \tag{6.3a}$$

Das Kreisteilungspolynom zerfällt in der Form

$$\Phi_q(x)=\prod_{\nu=0}^{q-2}(x-\varepsilon^{m^\nu}) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p}_\nu \leftrightarrow (x-\varepsilon^{m^{\nu+1}}). \tag{6.3b}$$

Wir definieren nun eine spezielle Kummersche Erweiterung L_q q-ten Grades von K_q durch die Gleichung

$$y^q = G_0(x) = \prod_{\nu=0}^{s-1}\left(\frac{x-\varepsilon^{m^\nu}}{x-\varepsilon^{m^{s+\nu}}}\right)^{m^{s-\nu-1}} \tag{6.4}$$

Diese Gleichung ist zwar nicht von reduzierter Form, aber alle Linearfaktoren kommen mit einem zu q primen Exponenten vor. Infolgedessen ist L_q über K_q zyklisch vom Grade q mit dem genauen geometrischen Führer $\mathfrak{p}_1+\cdots+\mathfrak{p}_{q-1}$. Ist y_1 eine feste Wurzel von (6.4), so sind die anderen Wurzeln von der Form $\varepsilon^\lambda y_1$ $(\lambda=0, 1, \ldots, q-1)$, und wir erhalten die Automorphismen von L_q über K_q durch die Festsetzungen

$$\sigma(y_1) = \varepsilon\, y_1, \qquad \sigma(\varepsilon) = \varepsilon, \qquad \sigma^2, \ldots, \sigma^q = 1. \tag{6.4a}$$

Wir betrachten nun neben $G_0(x)$ noch die Ausdrücke

$$G_\nu(x) = \tau^\nu\big(G_0(x)\big) = \tau\big(G_{\nu-1}(x)\big) \qquad (\nu = 1, \ldots, q-2). \tag{6.5}$$

Für diese gelten die Beziehungen

$$G_\nu(x) = G_{\nu-1}(x)^m \cdot \left(\frac{x-\varepsilon^{m^{\nu-1}}}{x-\varepsilon^{m^{s+\nu-1}}}\right)^{-(1+m^s)} = G_{\nu-1}(x)^m \cdot \left(\frac{x-\varepsilon^{m^{\nu-1}}}{x-\varepsilon^{m^{s+\nu-1}}}\right)^{tq} \tag{6.5a}$$

für $\nu=1, \ldots, q-2$, da $-(1+m^s)=tq$ wegen $m^s \equiv -1 \bmod q$. Infolgedessen sind die Lösungen der Gleichungen

$$y^q = G_\nu(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, q-2), \tag{6.6}$$

wie aus sukzessiver Rechnung folgt, ebenfalls alles Elemente aus dem oben konstruierten Körper L_q; sie lassen sich in einfacher Weise durch y_1 ausdrücken. Bilden wir nun das Polynom

$$\prod_{\nu=0}^{q-2}\big(y^q - G_\nu(x)\big) = \prod_{\nu=0}^{q-2}\big(y^q - \tau^\nu(G_0(x))\big), \tag{6.7}$$

so liegen seine sämtlichen Wurzeln in L_q und seine Koeffizienten sind Elemente aus K; folglich ist L_q galoissche Erweiterung von K vom Grade $q(q-1)$. Wir kennen bereits die Automorphismen σ von L_q aus (6.4a). Wir betrachten den weiteren Automorphismus

$$\tau(y_1) = y_1^m \cdot \left(\frac{x-\varepsilon}{x-\varepsilon^{-1}}\right)^t, \qquad \tau(\varepsilon) = \varepsilon^m, \tag{6.8}$$

der also in K_q schon den bekannten Automorphismus aus (6.3a) induziert. Dann liefern die Produkte $\tau^\nu\sigma^\lambda$ $(\nu=1, \ldots, q-1;\ \lambda=1, \ldots, q)$ alle Automorphismen von L_q über K. Ferner gilt

$$\sigma\tau(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon^m) = \varepsilon^m, \qquad \tau\sigma(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) = \varepsilon^m,$$

$$\sigma\tau(y_1) = \sigma\left(y_1^m\left(\frac{x-\varepsilon}{x-\varepsilon^{-1}}\right)^t\right) = \varepsilon^m\, y_1^m\left(\frac{x-\varepsilon}{x-\varepsilon^{-1}}\right)^t = \tau(\varepsilon)\,\tau(y_1) = \tau(\varepsilon\, y_1) = \tau\sigma(y_1)$$

und somit erhalten wir

$$\sigma\tau = \tau\sigma, \tag{6.9}$$

d.h. die Galoisgruppe $\mathfrak{G}(L_q/K)$ ist abelsch und somit ist die Erweiterung sogar zyklisch vom Grade $q(q-1)$. Der Invariantenkörper der Untergruppe der Ordnung $q-1$ von $\mathfrak{G}(L_q/K)$ sei mit L bezeichnet; L ist dann zyklisch und geometrisch vom Grade q über K und sein geometrischer Führer ist $\mathfrak{f}=\mathfrak{p}$.

SATZ 6. *Ist k der rationale Zahlkörper, $K=k(x)$, $q>2$ eine Primzahl und $\mathfrak{f}$ der geometrische Zählerdivisor des q-ten Kreisteilungspolynoms in K, so gibt es stets geometrische zyklische Erweiterungen q-ten Grades von K, die $\mathfrak{f}$ als genauen geometrischen Führer haben.*

BEMERKUNGEN. 1. Die obigen Überlegungen sind auch mit geringen Modifikationen für einen Primzahlpotenzgrad q^n $(q>2)$ durchführbar. — 2. Man kann unendlich viele verschiedene Erweiterungen des gleichen Typus vom Grad q erhalten, indem man z.B. den Ausdruck $G_0(x)$ in (6.4) mit einem geeigneten Zahlfaktor multipliziert; außerdem gibt es natürlich noch zyklische Erweiterungen q-ten Grades von K zu anderen Führern. — 3. Unser recht speziell aussehender Ansatz (6.4) war wirklich nötig, da längst nicht jeder rationale Ausdruck aus den Linearfaktoren von $\Phi_q(x)$ in (6.4) als rechte Seite geeignet wäre; im allgemeinen ist dann die zugehörige zyklische Erweiterung von K_q entweder nicht mehr galoissch über K oder aber galoissch mit nichtabelscher Galoisgruppe.

Zum Abschluß nun noch einige allgemeine Bemerkungen zu diesen Untersuchungen. Es dürfte von Interesse sein, die Ansätze dieser Arbeit mit der von MORIKAWA in [7] gegebenen Charakterisierung der geometrischen abelschen Erweiterungen eines arithmetischen Funktionenkörpers durch zugehörige verallgemeinerte Jacobische Mannigfaltigkeiten zu vergleichen; insbesondere wäre dabei zu klären, wie sich die einschränkenden Bedingungen aus §5 in der Struktur der verallgemeinerten Jacobischen Mannigfaltigkeiten ausdrücken. — Die direkte Übertragung der Methoden von LANG und SERRE, nämlich die Verwendung algebraischer Gruppen, auf den hier vorliegenden Fall führt zu Schwierigkeiten, da in der Theorie arithmetischer Mannigfaltigkeiten zwar der Begriff der Lokalität (vgl. [8a, b, c]) nicht aber der des Punktes (die ja die Gruppenelemente liefern sollen) zur Verfügung steht; hier könnten Ansätze von YAMAZAKI [12], der algebraische Zahlkörper als algebraische „Mannigfaltigkeiten" mit einem Punktbegriff darstellte, eventuell weiterführen.

Schließlich sei noch erwähnt, daß die prinzipiellen Ansätze dieser Untersuchungen auch durchführbar bleiben, wenn man den Konstantenkörper k von K selbst als Kongruenzfunktionenkörper voraussetzt.

Literatur

[1] ABHYANKAR, S.: Ramification Theoretic Methods in Algebraic Geometry. Ann. of Math. Studies **43** (1959).

[2] CHEVALLEY, C.: Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable. Math. Suryeys **6** (1951).

[3a] HASSE, H.: Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper. J. reine angew. Math. **172**, 37—54 (1934).

[3b] HASSE, H.: Zahlentheorie. Berlin 1951.
[3c] — Vorlesungen über Zahlentheorie. Berlin 1950.
[3d] — Klassenkörpertheorie. Marburg 1933.
[4a] LAMPRECHT, E.: Allgemeine Theorie der Gaußschen Summen in endlichen kommutativen Ringen. Math. Nachr. **9**, 149–196 (1953).
[4b] — Bewertungssysteme und Zetafunktionen algebraischer Funktionenkörper III. Math. Ann. **132**, 373–403 (1957).
[4c] — Zur Eindeutigkeit von Funktionalprimdivisoren. Arch. Math. **8**, 30–38 (1957).
[4d, e, f] — Restabbildungen von Divisoren. I, II, III. Arch. Math. **8**, 255–264 (1957); Arch. Math. **10**, 428–437 (1959); Arch. Math. **11**, 407–418 (1960).
[4g] — Durch Produktdarstellungen erklärte Zetafunktionen. Euler-Gedenkband 246–255 (1959).
[4h] — Invariante Zetafunktionen arithmetischer Funktionenkörper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **22**, 71–83 (1958).
[5a] LANG, S.: Unramified Class Field Theory over Function Fields in Several Variables. Ann. of Math. **64**, 285–325 (1956).
[5b] — Sur les séries L d'une variété algébrique. Bull. Soc. Math. de France **84**, 385–407 (1956).
[6] MANN, H.: Introduction to Algebraic Number Theory. Ohio State Univ. Press 1955.
[7] MORIKAWA, H.: Generalized Jacobian Varieties and Separable Abelian Extensions of Function Fields. Nagoya Math. J. **12**, 231–254 (1957).
[8a, b, c] NAGATA, M.: A General Theory of Algebraic Geometry over Dedekind Domains I, II, III. Amer. J. Math. **78**, 78–116 (1956); Amer. J. Math. **80**, 382–420 (1958); Amer. J. Math. **81**, 401–435 (1959).
[9] SCHMIDT, F. K.: Die Theorie der Klassenkörper über einem Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten und mit endlichem Koeffizientenbereich. S.Ber. Erlangen **62**, 267–284 (1930).
[10] SERRE, J. P.: Groupes algébriques et corps de classes. Paris 1959.
[11] WITT, E.: Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper. J. reine angew. Math. **173**, 43–51 (1935).
[12] YAMAZAKI, K.: On Fibre Spaces in the Algebraic Number Theory. J. Math. Soc. Japan **7**, 182–201 (1955).
[13a, b] ZARISKI, O., and P. SAMUEL: Commutative Algebra I, II. 1958, 1960.

Würzburg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 26. April 1961)

MÜLLER, G. H.
Math. Zeitschr. 77, 414—438 (1961)

Nicht-Standardmodelle der Zahlentheorie

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

GERT H. MÜLLER

§ 1. Was man unter einem Nicht-Standardmodell einer mathematischen Theorie zu verstehen hat, ist nicht streng festgelegt worden, und jeder Versuch, das zu tun, stößt naturgemäß auf sehr verschiedenartige Schwierigkeiten. Dieser kann man Herr werden, wenn man eine Theorie der Modelle von Theorien T, etwa innerhalb einer bestimmten Mengenlehre entwickelt, doch benötigen wir eine solche Präzisierung für das Folgende nicht; im allgemeinen lassen sich Untersuchungen über Nicht-Standardmodelle post festum in einen umfassenden mengentheoretischen Rahmen einordnen. In Anwendung auf die Zahlentheorie, insoweit diese begrifflich und hinsichtlich der Beweismittel präzisiert ist, wird man unter Nicht-Standardmodellen natürlicherweise solche verstehen, die nicht isomorph zu der inhaltlich intendierten Struktur der Zahlenreihe sind.

Zu solchen Modellen der Zahlentheorie gelangt man auf mancherlei Weise, z.B. durch das von SKOLEM [*14*, *15*, *17*, *18*] entdeckte Verfahren, oder unter Anwendung des Gödelschen Vollständigkeitssatzes [*1*] durch ein Verfahren von HENKIN [*4*], oder auch als Folge des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes [*2*] durch die (widerspruchsfreie) Hinzunahme nicht intendierter Aussagen über die Zahlen als zusätzliche Axiome. Wie man aus der Art dieser Verfahren ersehen kann, ist es nicht möglich das Auftreten von Nicht-Standardmodellen der Zahlentheorie zu vermeiden, vorausgesetzt, daß man den Rahmen der Zahlentheorie, soweit man ihn auch fassen mag, hinsichtlich der Ausdrucks- und Beweismittel in einer intersubjektiv prüfbaren Weise festlegt. (Darunter fallen also alle axiomatischen Mengenlehren, wie auch eine präzisierte Typentheorie, soweit diese widerspruchsfrei sind, unbeschadet der Tatsache, daß innerhalb einer solchen (z.B.) Mengenlehre für einen darin abgegrenzten Begriff der Zahlenlehre ein Kategorizitätsbeweis geführt werden kann.) Der intendierte Inhalt des Zahlbegriffes ist intersubjektiv unausschöpfbar; das besagt jedoch nicht, daß er nicht stets umfassenderer Teilpräzisierungen fähig ist — im Gegenteil jede Feststellung des Nichtzureichens einer solchen Präzisierung erfolgt unter Benutzung schärferer Eigenschaften der Zahlen, die dann auch Anlaß zu einer weiterreichenden Präzisierung geben.

Wie immer, wenn es für eine Theorie verschiedene Modelle gibt, so liegt es auch im Falle der Zahlentheorie nahe, daraus Unabhängigkeits- bzw. wenigstens Unentscheidbarkeitssätze zu gewinnen; vgl. G. KREISEL [*7*], G. KEMENY [*6*]. Zweitens wird man auf diese Modelle die allgemeinen modell-

theoretischen Methoden und Begriffe anwenden, um gewisse Strukturaussagen zu erhalten. In dieser Richtung sind neuerdings eine Reihe von Arbeiten in „Infinitistic Methods" Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw 1959, erschienen, von L. RIEGER, D. SCOTT, R. MACDOWELL und E. SPECKER, A. ROBINSON, und R. L. VAUGHT; dort findet man auch weitere Literaturhinweise, vgl. dazu auch den Bericht von A. MOSTOWSKI [*10*]; auf die darin behandelten gruppentheoretischen Betrachtungen soll hier nicht eingegangen werden.

Für die Untersuchungen über Nicht-Standardmodelle erscheint eine detaillierte Darstellung der Skolemschen Konstruktion wünschenswert, zumal eine solche nicht vorliegt, und bei ihr die Benutzung des allgemeinen Vollständigkeitssatzes von GÖDEL vermieden werden kann. Nach Einführung einiger Begriffe und der Präzisierung der Systeme, auf die das Verfahren von SKOLEM angewandt werden soll (§2, §3) wird in §4 und §5 ein Skolem-Modell für das System Z_μ der Zahlentheorie (vgl. HILBERT-BERNAYS [*5*], II, p. 289ff.) aufgestellt, wobei als Gegenstandsbereich die Zahlen selbst figurieren. Mit Hilfe einer teilweisen Arithmetisierung der Beweisschritte ergeben sich zwanglos Verallgemeinerungen der Konstruktion auf umfassendere zahlentheoretische Systeme (§4, §6), und außerdem eine Präzisierung der Mittel, vermöge welcher die Konstruktion durchgeführt wird. Man gelangt damit zu einer das System Z_μ überschreitenden Abgrenzung des Zahlbegriffs, der also hier dazu dient, den durch das System Z_μ bestimmten als unzureichend zu erweisen. Auch das Henkinsche Verfahren zur Bildung von Nicht-Standardmodellen, das in §7 näher untersucht wird, erfordert eine solche Überschreitung des Systems, auf das es Anwendung findet.

Nennen wir den Bereich der konstanten Terme einer (widerspruchsfreien) vollständigen Erweiterung $\bar{Z}_\mu$ von Z_μ kurz ein Termmodell $M_{\bar{Z}_\mu}$. A. ROBINSON [*13*] hat auf modelltheoretischem Wege gezeigt, daß (kurz gesagt) die Skolem- und die Henkin-Modelle über $M_{\bar{Z}_\mu}$ im wesentlichen identisch sind. Dieser Tatbestand ergibt sich hier (§7) durch Betrachtung der formalen Systeme ebenfalls, und in etwas verschärfter Form. Die Skolem- und Henkin-Modelle über $M_{\bar{Z}_\mu}$ sind arithmetische Erweiterungen (vgl. A. TARSKI und R. L. VAUGHT [*21*]) von $M_{\bar{Z}_\mu}$; unter den $\bar{Z}_\mu$ kommt natürlich auch die ω-vollständige Erweiterung (in den gleichen nichtlogischen Konstanten) von Z_μ, sie heiße $\tilde{Z}_\mu$, vor. Alle von $\tilde{Z}_\mu$ verschiedenen Systeme $\bar{Z}_\mu$ geben ebenfalls Anlaß zu Nicht-Standardmodellen, die dann natürlich keine arithmetischen Erweiterungen von $M_{\tilde{Z}_\mu}$ sind; ferner ist jedes Henkin-Modell über einem $M_{\bar{Z}_\mu}$ ($\bar{Z}_\mu$ verschieden von $\tilde{Z}_\mu$) von allen Henkin-Modellen über $M_{\tilde{Z}_\mu}$ verschieden, vgl. 7.12. — Abschließend wird eine Frage von G. KEMENY [*6*], p. 164, betreffend den Unterschied zwischen den nach HENKIN und den unter Benutzung des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes erzeugten Nicht-Standardmodellen beantwortet [1]).

[1]) Herrn G. HASENJAEGER, der die Arbeit im Manuskript las, danke ich herzlich für wertvolle Ratschläge, vgl. insbesondere 3.7.

§ 2. Das Skolemsche Verfahren zur Gewinnung von Nicht-Standardmodellen der Zahlentheorie erfordert die formale Festlegung der Axiomensysteme, auf die es Anwendung finden soll. Als logischer Rahmen dient (hier) der Prädikatenkalkül der ersten Stufe in einer der üblichen Formen, vgl. z.B. HILBERT-BERNAYS [5], II, Suppl. I oder A. TARSKI [20]. Als nichtlogische Konstanten (primitive oder Grund-begriffe) werden im folgenden auftreten: 1) das Individuensymbol 0 (Null), 2) das einstellige Funktionssymbol S (Nachfolger), 3) die beiden zweistelligen Funktionssymbole $+$, $\times$ (Addition, Multiplikation), 4) die beiden zweistelligen Prädikatensymbole $=$, $\leqq$ (Gleichheit, Kleiner-Gleich-Beziehung), 5) der Operator $\mu_x A(c_1, \ldots, c_n, x)$ (Minimumoperator). Für freie Variable verwenden wir die Buchstaben $a, b, c, c_0, c_1, \ldots$, für gebundene Variable (wie solche bereits im Minimumoperator vorkommen) $x, y, z, x_0, x_1, \ldots$; Formeln und Terme sind in der üblichen Weise aufgebaut mittels der Grundbegriffe, der logischen Zeichen $\neg$ (nicht), $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\rightarrow$ (wenn ... so), $\leftrightarrow$ (genau dann, wenn), $\bigvee x$ (es gibt ein x ...), $\bigwedge x$ (für alle x, ...). Die (rekursive) Definition des Formel- und des Termbegriffs hat gemeinsam zu erfolgen wegen des Auftretens von μ-Termen. Als Mitteilungszeichen für zusammengesetzte Formeln (Terme) verwenden wir die Buchstaben $X, Y, Z, A(a, c_1), B(c_0), \ldots$ und ähnliche Angaben, bzw. $T, T(a,b,c_3), \ldots$ und ähnliche Angaben, eventuell mit Indizes.

Wir geben nun vier Axiomensysteme an, auf die sich hauptsächlich die folgenden Betrachtungen beziehen werden. (Auf Fragen der Entbehrlichkeit von Axiomen oder Grundbegriffen kommt es uns in allem Folgenden nicht an.)

System I:
2.1 $c = c$
2.2 $c_1 = c_2 \cdot \rightarrow \cdot A(c_1) \rightarrow A(c_2)$
2.3 $Sc \neq 0$ ($a \neq b$ soll $\neg\, a = b$ bedeuten)
2.4 $Sc_1 = Sc_2 \rightarrow c_1 = c_2$
2.5 $c \neq 0 \rightarrow \bigvee x\,(Sx = c)$ (Existenz des Vorgängers)
2.6 $A(c) \rightarrow A\big(\mu_x A(x)\big)$
2.7 $A(c) \rightarrow \mu_x A(x) \neq Sc$
2.8 $\neg\, A\big(\mu_x A(x)\big) \rightarrow \mu_x A(x) = 0$.

System II: 2.1–2.8 und 2.9
$$\begin{cases} c \leqq 0 \leftrightarrow c = 0 \\ c_1 \leqq Sc_2 \leftrightarrow c_1 \leqq c_2 \vee c_1 = Sc_2. \end{cases}$$

System III: 2.1–2.8 und 2.10
$$\begin{cases} c + 0 = c \\ c_1 + Sc_2 = S(c_1 + c_2). \end{cases}$$

System IV: 2.1–2.8, 2.10 und 2.11
$$\begin{cases} c \times 0 = 0 \\ c_1 \times Sc_2 = (c_1 \times c_2) + c_1. \end{cases}$$

Die Axiome 2.2, 2.6, 2.7, 2.8 sind genauer als Axiomenschemata aufzufassen; sie dienen als Mitteilung für die Gesamtheit der Formeln, die durch Ersetzung von $A(c)$ durch alle formal bildbaren Formeln mit einer freien Variablen (in dem jeweils betrachteten System) entstehen. Anstelle des

Axiomenschemas 2.2 kann man mit endlich vielen eigentlichen Axiomen auskommen, die inhaltlich bezüglich der Grundbegriffe die Substitutivitätseigenschaft der Gleichheit ausdrücken, z.B. $c_1 = c_2 \to Sc_1 = Sc_2$; vgl. HILBERT-BERNAYS [5], I, p. 373 und 431.

In dem System I kann (vgl. HILBERT-BERNAYS [5], II, pp. 86–87) das Schema der vollständigen Induktion

2.12 $$A(0) \wedge \wedge x\big(A(x) \to A(Sx)\big) \cdot \to \cdot \wedge x\, A(x)$$

hergeleitet werden, und in II erhält man mit Hilfe von 2.12 nach einigen Vorbereitungen alle bekannten Gesetze für die Relation $\leqq$ im Zusammenhang mit der Operation S. Definiert man $c_1 < c_2 \leftrightarrow c_1 \leqq c_2 \wedge c_1 \neq c_2$, dann ergibt sich insbesondere

2.13 $$c_1 < c_2 \leftrightarrow Sc_1 = c_2 \vee Sc_1 < c_2.$$

Anstelle von 2.7 hat man die gewohnte Form des Minimumschemas

2.14 $$A(c) \to \mu_x A(x) \leqq c,$$

die man auch in III und IV beibehalten kann, da ja die Relation $\leqq$ schon in III explizit definierbar wird, als Axiomenschema zu nehmen.

Wie bekannt, vgl. SKOLEM [16], kann man im System IV Prädikate und Funktionen, die durch sogar recht weitläufige Rekursionen eingeführt werden, explizit definieren. Das System IV würde daher nicht wesentlich verstärkt werden, wenn wir zur Einführung von Prädikaten und Funktionen gewisse Rekursionsschemata zuließen; man hätte aber eine merkliche Komplikation der Begriffe „Formel" und „Term" in Kauf zu nehmen, die hier besser vermieden wird. Wenn wir trotzdem im folgenden einige bestimmte Prädikate und Funktionen (mit eigens dafür benutzten Zeichen) als durch Rekursionen definiert annehmen oder durch explizite Angabe von Rekursionen einführen, dann soll stillschweigend vorausgesetzt werden, daß eigentlich anstelle eines solchen Prädikates (Funktion) die (der) durch die festgewählte explizite Definition bestimmte Formel (Term) gemeint ist, soweit diese Rekursionen das System IV nicht überschreiten, worauf aber jeweils hingewiesen werden soll.

Mit Hilfe des Minimumoperators ist es möglich durch den Prozeß der „symbolischen Auflösung", vgl. HILBERT-BERNAYS [5], II, p. 6ff., von Aussagen (d.h. Formeln ohne freie Variable) und von Formeln zu solchen Formeln überzugehen, die abgesehen von Minimumtermen nur freie Variable enthalten. Zur Durchführung dieses Prozesses wird zunächst eine gegebene Formel (auf eine im Prädikatenkalkul erlaubte Weise) in eine pränexe Formel, d.h. eine solche in der alle Quantoren ($\vee x$, $\wedge x$) am Anfang stehen, umgeformt. Sei beispielsweise diese (pränexe) Formel

(a) $$\wedge x_1 \vee x_2 \vee x_3 \wedge x_4 \vee x_5\, A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b),$$

worin außer den angegebenen Variablen keine weiteren vorkommen mögen. Führt man jeweils anstelle des äußeren Allquantors eine freie Variable ein

und ferner die Minimumterme:

$$\mu_{x_3} \vee x_3 \wedge x_4 \vee x_5 A(c_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b), \quad \text{abgekürzt } f(c_1, a, b),$$
$$\mu_{x_4} \wedge x_4 \vee x_5 A\big(c_1, f(c_1, a, b), x_3, x_4, x_5, a, b\big), \quad \text{abgekürzt } g(c_1, a, b),$$
$$\mu_{x_5} A\big(c_1, f(c_1, a, b), g(c_1, a, b), c_2, x_5, a, b\big), \quad \text{abgekürzt } h(c_1, c_2, a, b),$$

dann gelangt man von (a) mittels 2.6 zur Formel

(b) $$A\big(c_1, f(c_1, a, b), g(c_1, a, b), c_2, h(c_1, c_2, a, b), a, b\big),$$

und von (b) kann man natürlich mit Hilfe des Prädikatenkalküls wieder zu (a) gelangen.

Im weiteren brauchen wir noch einige Hilfsfunktionen:

Wir betrachten eine Abzählung der Zahlenpaare $\langle i, j\rangle$, $i = 0, 1, 2, \ldots, i < j$, derart, daß $\langle i, j\rangle$ vor $\langle k, l\rangle$ kommt, genau dann, wenn $j < l$ ist, oder $j = l$ und $i < k$ ist. Die Zählung der Paare möge mit 0 beginnen. In Abhängigkeit von i und j ist dann die Nummer des Paares $\langle i, j\rangle$ gegeben durch

2.15 $$s(i, j) = \frac{(j-1) \times j}{2} + i$$

und die zugehörigen Umkehrfunktionen sind

2.16 $$\begin{cases} s_1(n) = n - \dfrac{(s_2(n) - 1) \times s_2(n)}{2} \\ s_2(n) = \left\lfloor \dfrac{[\,]\sqrt{8n+1}] + 1}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

Ferner sei noch (mit $\overline{sg}(0) = 1$, $\overline{sg}(Sn) = 0$)

2.17 $$q(a, b) =_{df} \overline{sg}\big(|a - b|\big);$$

offenbar gilt

2.18 $$q(a, b) = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \text{ genau dann, wenn } \begin{matrix} a \neq b \\ a = b \end{matrix}.$$

Für unsere Systeme nehmen wir Gödel-Numerierungen als gegeben an; solche können in mannigfacher Form eingeführt werden. Für uns kommt es hier nur darauf an, daß vermöge solcher Numerierungen in bekannter Weise syntaktische Eigenschaften der Systeme, auf die die Numerierung bezogen ist, durch rekursive Prädikate und Funktionen ausdrückbar werden. Soweit wir solche brauchen, werden wir sie nur inhaltlich, ihrer Bedeutung nach, definieren; das genauere, technisch aber nicht prinzipiell komplizierte Verfahren ist z. B. in HILBERT-BERNAYS [5], II ausgeführt.

Auf unsere Systeme werden wir im folgenden in zweierlei Hinsicht Bezug nehmen, einmal insofern durch sie ein gewisser Ausdrucksbereich — eine „Sprache" — festgelegt ist, zum andern insofern durch die Axiome auch ein Bereich von beweisbaren Sätzen abgegrenzt wird. Dementsprechend soll von den *Sprachen* I, II, III, IV, und von den *Systemen* I, II, III, IV, die Rede sein.

§ 3. Wir betrachten nun Gesamtheiten von einstelligen Funktionstermen $\mathfrak{f}_{\mathrm{I}}, \mathfrak{f}_{\mathrm{II}}, \mathfrak{f}_{\mathrm{III}}, \mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$ — im weiteren, wenn es auf die Unterscheidung nicht ankommt oder diese aus dem Zusammenhang ersichtlich ist kurz mit $\mathfrak{f}$ bezeichnet —, die in den entsprechenden Sprachen I, II, III, IV mit Hilfe des Minimumoperators formal gebildet werden können. (Im Hinblick auf die später gebrauchte Gödel-Numerierung dieser Terme kann man etwa festsetzen, daß die einzige freie Variable in den Elementen von $\mathfrak{f}$ c_0 sei, und die durch μ gebundenen Variablen von außen nach innen Indizes haben, die eine gewisse Teilmenge der natürlichen Zahlen durchlaufen; wir werden hier im Text von diesen Festsetzungen nicht Gebrauch machen, aber annehmen, daß hier und in allen folgenden Fällen derartige Festlegungen, auch hinsichtlich von Kollisionen gebundener Variablen erfolgt sind.) Zu $\mathfrak{f}$ gehören die „konstanten Funktionen" etwa $\mu_x(c=c \wedge x=0^{\mathfrak{k}})$, worin $0^{\mathfrak{k}}$ der Ausdruck ist, der aus 0 durch $\mathfrak{k}$-maliges Vorsetzen von S entsteht, und auch $\mu_x\big(c=c \wedge x=\mu_y A(y)\big)$, worin $\mu_y A(y)$ ein konstanter Minimumterm ist. Sind $\mu_x A(c, x)$, $\mu_y B(c, y)$ Elemente von $\mathfrak{f}$, dann sind auch $S\mu_x A(c, x)$, $\mu_x A(c, x)+\mu_y B(c, y)$, $\mu_x A(c, x) \times \mu_y B(c, y)$, und $\mu_x A\big(\mu_y B(c, y), x\big)$ Elemente von $\mathfrak{f}$; $\mathfrak{f}$ ist also gegenüber Einsetzungen von Elementen aus $\mathfrak{f}$ für die freie Variable c_0 abgeschlossen.

Die Gesamtheiten $\mathfrak{f}$ sind offenbar abzählbar. Insbesondere können wir, da die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{f}$ eine entscheidbare Eigenschaft ist, mit Hilfe unserer Gödel-Numerierungen rekursive Funktionen $\nu_{\mathrm{I}}(a)$, $\nu_{\mathrm{II}}(a)$, $\nu_{\mathrm{III}}(a)$, $\nu_{\mathrm{IV}}(a)$, — im weiteren kurz $\nu(a)$, — die die Gödel-Nummern der Elemente von $\mathfrak{f}$ aufzählen erhalten. Wir wollen von den Werten von $\nu(a)$ als den Gödel-Nummern und von den Argumenten a als den Indizes der Elemente von $\mathfrak{f}$ sprechen.

3.1 Seien a, b, Indizes von Elementen von $\mathfrak{f}$, dann gibt es, wie man aus den Regeln für den syntaktisch korrekten Aufbau zusammengesetzter Funktionsausdrücke sieht, rekursive Funktionen $\varrho(a)$, $\sigma(a, b)$, $\tau(a, b)$, die den Index des Elementes aus $\mathfrak{f}$ bestimmen, das 1) aus dem Element mit Index a durch Vorsetzen von S, und 2) aus Elementen mit Index a und b durch Dazwischensetzen der Zeichen $+$ bzw. $\times$ entsteht.

3.2 Der Index der Funktion $\mu_x(c=c \wedge x=0)$ sei $\mathfrak{n}$.

3.3 Sei $A(a)$ ein Ausdruck mit der einzigen freien Variablen a, und sei $\mathfrak{a}$ seine Gödel-Nummer; es gibt dann eine rekursive Funktion $\chi(a)$, derart, daß $\chi(\mathfrak{a})$ der Index von $\mu_x\big(c=c \wedge x=\mu_y A(y)\big)$ ist.

3.4 Sei schließlich $B(a, c_1, \ldots, c_n)$ ein Ausdruck mit genau den angegebenen freien Variablen, $n \geqq 1$, und es sei $\mathfrak{b}$ seine Gödel-Nummer, dann gibt es eine rekursive Funktion $\psi(\mathfrak{b}, c_1, \ldots, c_n)$ derart, daß $\psi(\mathfrak{b}, c_1, \ldots, c_n)$ den Index des Elementes aus $\mathfrak{f}$ bestimmt, das aus $\mu_x B(x, c_1, \ldots, c_n)$ durch Einsetzung der Elemente von $\mathfrak{f}$ mit Indizes $c_1, \ldots, c_n$ anstelle der freien Variablen $c_1, \ldots c_n$ entsteht. (In $A(a)$ und $B(a, c_1, \ldots, c_n)$ können die Variablen a bzw. $c_1, \ldots, c_n$, natürlich an verschiedenen Stellen, z.B. auch innerhalb von μ-Termen vorkommen. Für die Einführung dieser Funktionen sind wiederum eine Reihe von Normierungen der betrachteten Ausdrücke erforderlich, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, da diese Details unerheblich sind.)

Wie bekannt sind die Systeme I, II, III vollständig, d.h. jede formal bildbare Aussage ist entweder herleitbar oder ihre Negation ist herleitbar, und da diese Systeme axiomatisierbar sind, sind sie auch entscheidbar, vgl. HILBERT-BERNAYS [5], I. Daher sind auch die Elemente von $\mathfrak{f}_{\mathrm{I}}, \mathfrak{f}_{\mathrm{II}}, \mathfrak{f}_{\mathrm{III}}$ als Funktionen für alle Argumente bestimmt. Diese Vollständigkeit besitzt das System IV nicht und diese kann auch durch Hinzunahme von endlich vielen oder rekursiv-aufzählbar vielen Axiomen (sofern dadurch kein Widerspruch entsteht) nicht erreicht werden; dies ist eine Konsequenz des Gödelschen Unableitbarkeitssatzes [2]. Für $\mathfrak{f}$ bedeutet dies, daß darin Funktionsterme $\mu_x B(c, x)$ auftreten werden, derart, daß die Aussage $\wedge y \vee x B(y, x)$ formal unentscheidbar ist. Ein solcher Term ist dann im System IV nicht für alle Argumente als Funktion bestimmt. Um dies für alle Elemente von $\mathfrak{f}$ zu erreichen, müssen wir das System IV vervollständigen. Dies geschieht mit Hilfe des Lindenbaumschen [19] Verfahrens:

Es sei $\mathfrak{A}$ die Gesamtheit der formal bildbaren Aussagen der Sprache IV und $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit der beweisbaren Aussagen des Systems IV. Beiden Gesamtheiten entsprechen Mengen von Gödel-Nummern $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$; es möge $r(a)$ die Menge $\mathfrak{A}'$ aufzählen, die Elemente X von $\mathfrak{A}$ erhalten dadurch Indizes a. Wir bilden nun auf induktivem Wege eine Folge von Aussagenmengen $\mathfrak{B}_n$, derart, daß 1) $\mathfrak{B}_\omega = \Sigma \mathfrak{B}_n$ die Menge $\mathfrak{B}$ umfaßt, 2) $\mathfrak{B}_\omega$ widerspruchsfrei ist und 3) für jedes $X_a \in \mathfrak{A}$ entweder X_a oder $\neg X_a$ Element von $\mathfrak{B}_\omega$ ist, kurz $\mathfrak{B}_\omega$ vollständig ist:

3.5
$$\begin{cases} \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B} \\ \mathfrak{B}_{n+1} = \begin{cases} \mathfrak{B}_n, & \text{wenn nach Hinzunahme von } X_n \text{ zu } \mathfrak{B}_n \\ & \text{die Aussage } 0 = S0 \text{ ableitbar ist,} \\ \mathfrak{B}_n \cup X_n & \text{sonst,} \end{cases} \\ \mathfrak{B}_\omega = \Sigma \mathfrak{B}_n. \end{cases}$$

Es ist dann $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_\omega$; wäre $\mathfrak{B}_\omega$ widerspruchsvoll, dann müßte sich der Widerspruch schon aus endlich vielen Aussagen, etwa $X_{i_1}, \ldots, X_{i_r}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ herleiten lassen, und da $\mathfrak{B}$ als widerspruchsfrei vorausgesetzt ist, dürfen wir annehmen, daß vor der Entscheidung (gemäß 3.5) über die Hinzunahme von X_{i_r} noch kein Widerspruch ableitbar war. Dann aber könnte X_{i_r} laut 3.5 gar nicht in $\mathfrak{B}_\omega$ aufgenommen werden. Für jedes n ist also höchstens eine der Aussagen X_n oder $\neg X_n = X_m$ in $\mathfrak{B}_\omega$. Laut Konstruktion muß aber offensichtlich eine dieser Aussagen aufgenommen worden sein.

Der vorstehende Beweis der Existenz einer widerspruchsfreien vollständigen Erweiterung — sie heiße IV_ω — von IV, d.h. des Lindenbaumschen Satzes (in Anwendung auf IV) kann arithmetisiert werden, wobei man von einem Beweisprädikat für das System IV ausgeht. Sei etwa

3.6 $B(a, b)$: a ist Nummer eines Beweises in IV der Aussage mit der Nummer b.

Wie bekannt ist $B(a, b)$ ein rekursives, also gemäß unserer Vorbemerkung in §2 ein in IV explizit definierbares Prädikat, und es gilt:

3.7 $$b \in \mathfrak{B}' \leftrightarrow \bigvee x\, B(x, b).$$

Hinsichtlich eines Beweisprädikates $B_\omega(a, b)$ für IV_ω hat G. HASENJAEGER[2]) gezeigt, daß sich in einfacher Weise, unter Benutzung von $B(a, b)$, zwei Prädikate $A_1(a, c_1, c_2)$, $A_2(a, c_1, c_2)$ definieren lassen, derart, daß

3.8 $$b \in \mathfrak{B}'_\omega \leftrightarrow \bigvee x\, B_\omega(x, b) \leftrightarrow \bigvee y \bigwedge z\, A_1(b, y, z) \leftrightarrow \bigwedge y \bigvee z\, A_2(b, y, z)$$

gilt, wobei die beiden Prädikate A_1, A_2 genau dann rekursiv sind, wenn $r(a)$ rekursiv ist. Diese Funktion kann (aber muß nicht) rekursiv gewählt werden, da die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{A}$ ja eine entscheidbare Eigenschaft ist. Alle widerspruchsfreien vollständigen Erweiterungen von IV (scil. in der Sprache von IV) können durch das Lindenbaumsche Verfahren erzeugt werden, je nach der Wahl von $r(a)$, und auf Grund der Existenz unentscheidbarer Aussagen gibt es auch verschiedene vollständige Obersysteme von IV. Von diesen Obersystemen von IV wollen wir kurz als von den System IV_ω sprechen, und für das weitere ein beliebig gewähltes dieser Systeme betrachten, das dann auch kurz mit IV_ω bezeichnet werde. Unter den Systemen IV_ω kommt genau *ein* [*11*] System $\widetilde{\mathrm{IV}}_\omega$ vor, das ω-vollständig ist, d.h. daß für jede Formel $A(c)$, derart, daß $A(0), A(S0), A(SS0), \ldots$ in $\widetilde{\mathrm{IV}}_\omega$ beweisbar sind, die Aussage $\bigwedge x A(x)$ beweisbar ist; $\widetilde{\mathrm{IV}}_\omega$ heiße das Standardsystem in der Sprache IV; es ist dasselbe, das in der Einleitung $\widetilde{Z}_\mu$ genannt wurde.

In einem System IV_ω sind alle Elemente von $\mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$ in ihrem Wertverlauf festgelegt. Für je zwei Elemente, etwa $f(c)$ und $g(c)$ aus $\mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$ lassen sich (natürlich ganz elementar) die folgenden Alternativen beweisen

3.9 $$\bigwedge x \bigvee y \big(x < y \wedge f(x) = g(x)\big) \vee \bigwedge x \bigvee y \big(x < y \wedge f(x) \neq g(x)\big)$$

3.10 $$\bigwedge x \bigvee y \big(x < y \wedge f(x) < g(x)\big) \vee \bigwedge x \bigvee y \big(x < y \wedge f(x) = g(x)\big) \wedge \bigwedge x \bigvee y \big(x < y \wedge f(x) > g(x)\big),$$

d.h. daß mindestens eine der Beziehungen $=, \neq$ bzw. $<, =, >$ unendlich oft zwischen den Werten von f und g statthat. Für eine Formel der Gestalt $\bigwedge x \bigvee y \big(x < y \wedge A(y)\big)$ schreiben wir zur Abkürzung $U y A(y)$, zu lesen: „für unendlich viele y, ...“.

Für unsere Systeme I, II, III, IV_ω führen wir nun Funktionen $v_{\mathrm{I}}(a, b)$, $v_{\mathrm{II}}(a, b)$, $v_{\mathrm{III}}(a, b)$, $v_{\mathrm{IV}_\omega}(a, b)$ — kurz $v(a, b)$ — inhaltlich durch folgende *Definition* ein: *$v(a, b)$ ist diejenige Funktion, die für das Argument b den Wert der Funktion mit Index a an der Stelle b annimmt*; kurz $v(a, b)$ ist nichts anderes als $f_a(b)$, wobei $f_a(b)$ ein Element der zu $v(a, b)$ gehörenden Gesamtheit $\mathfrak{f}$ ist. Die Funktion $v(a, b)$ kann dem System, auf das sie bezogen ist, nicht angehören;

[2]) Vgl. HASENJAEGER, G.: Eine Bemerkung zu Henkins Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe. J. Symb. Log. **18**, 41—48 (1953).

andernfalls wäre $Sv(a, a) \in \mathfrak{f}$, hätte also einen Index, etwa i, und es wäre nach Definition von $v(a, b)$: $v(i, a) = Sv(a, a)$, also nach Einsetzung von i für a $v(i, i) = Sv(i, i)$. Zu einer formalen arithmetisierten Definition von $v(a, b)$ gelangt man mit Hilfe der Erfüllbarkeitsbeziehung (vgl. A. MOSTOWSKI [9], p. 57ff.), die ihrerseits nach dem Verfahren von HILBERT-BERNAYS [5], II, pp. 330ff. arithmetisiert werden kann, wobei, (abgesehen von der Berücksichtigung der Funktion $r(a)$,' durch die IV_ω bestimmt ist), das System IV überschritten wird. (Durch die Gödel-Numerierung werden die Mengen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{f}'$ der Gödel-Nummern von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{f}$ gemeinsam festgelegt. Die voneinander unabhängigen Reihenfolgen, in denen $r(a)$ $\mathfrak{A}'$ und $v(a)$ $\mathfrak{f}'$ aufzählen, können, aber müssen nicht rekursiv gewählt werden.)

§ 4. Der wesentliche Schritt der Skolemschen Modellkonstruktion besteht in der Einführung der Grundbeziehungen unserer Systeme, also von $=$ bzw. $\leqq$ in die Gesamtheiten $\mathfrak{f}$. Diese Beziehungen werden nach dem Verhalten der Elemente von $\mathfrak{f}$, d.h. also der einstelligen Funktionen im Unendlichen bestimmt. Wir führen hier die Gleichheitsbeziehung in $\mathfrak{f}$ ein; das Verfahren ist demjenigen von SKOLEM, der eine totale Ordnung in $\mathfrak{f}$ einführt, ganz analog.

Skolemsches Lemma. *Sei* $f_0(c), f_1(c), \ldots$ *eine nicht leere höchstens abzählbare Folge von einstelligen zahlentheoretischen Funktionen, dann gibt es eine streng monoton wachsende Funktion* $d(c)$ *derart, daß für alle Paare* $\langle s_1(n), s_2(n)\rangle$ *die folgende (vollständige und strenge) Dichotomie gilt:*

$$\wedge x\left(x \geqq n \cdot \rightarrow \cdot f_{s_1(n)}(d(x)) = f_{s_2(n)}(d(x))\right) \vee \wedge x\left(x \geqq n \rightarrow f_{s_1(n)}(d(x)) \neq f_{s_2(n)}(d(x))\right).$$

Inhaltlich gesprochen beruht der Beweis dieses Lemmas auf einem schrittweisen Vergleichen zweier Funktionen (in der Reihenfolge unserer Paarabzählung, der die Aufzählung von $\mathfrak{f}'$ durch $v(a)$ zugrunde liegt), wobei der n-te Vergleich (der Funktionen $f_{s_1(n)}, f_{s_2(n)}$) auf einer unendlichen Teilmenge N_n der Menge der natürlichen Zahlen N erfolgt, auf der die vorangegangenen Funktionspaare schon in einer festen Beziehung, der Gleichheit oder der Ungleichheit stehen. Die hierfür erforderliche Bestimmung von immer neuen Teilmengen $N_i \subseteqq N$ erfolgt durch die Wertbereiche von Funktionen $g(a, b)$, $g^+(a, b)$, $-g^+$ spielt nur eine Hilfsrolle — die unter Verwendung des Minimumoperators durch Rekursion eingeführt werden. Dabei ist die Festlegung der Werte der Funktion $g(a, 0)$ so eingerichtet, daß gleichzeitig eine Wahl getroffen wird, welche der Beziehungen $=$ oder $\neq$ zwischen den Funktionen, die gerade verglichen werden sollen, bevorzugt wird, falls beide Fälle für unendlich viele Argumente eintreten. Die charakteristische Funktion der Gleichheit $q(a, b)$ dient technisch dazu, die einmal gewählte Beziehung festzuhalten. (Für das inhaltliche Verständnis der folgenden Rekursionen und Beweise ist es bequem, statt der Ausdrücke $v(s_1(n), x)$, $v(s_2(n), x)$ die Schreibweise $f_{s_1(n)}(x)$, $f_{s_2(n)}(x)$ zu benutzen; die nachher eingeführte Funktion $g^+(m, n)$ entspricht inhaltlich der Funktion $g(0, g(1, \ldots, g(m, n), \ldots))$. Daß wir den Beweis formal genauer durchführen, hat seinen Grund darin, daß hier eine Überschreitung der Mittel des Systems, für das das Skolemsche Modell aufgestellt werden soll, erfolgt.)

Kürzen wir den Ausdruck $q\big(v(s_1(a), b), v(s_2(a), b)\big)$ durch $q'(a, b)$ ab, und definieren wir:

4.1 $$g(0, 0) = \mu_x \big(q'(0, x) = 0 \wedge U y\,(q'(0, y) = 0) \cdot \vee \cdot \cdot \vee \cdot q'(0, x) = 1 \wedge U y\,(q'(0, y) = 1)\big),$$

$$g(0, Sn) = \mu_x \big(g(0, n) < x \wedge q'(0, x) = q'(0, g(0, 0))\big),$$

4.2 $$g^+(0, a) = g(0, a),$$

$$g^+(Sm, a) = g^+\big(m, g(Sm, a)\big),$$

4.3 $$g(Sm, 0) = \mu_x \big(q'(Sm, g^+(m, x)) = 0 \wedge U y\,(q'(Sm, g^+(m, y)) = 0) \cdot \vee \cdot \cdot \vee \cdot q'(Sm, g^+(m, x)) = 1 \wedge U y\,(q'(Sm, g^+(m, y)) = 1)\big),$$

$$g(Sm, Sn) = \mu_x \big(g(Sm, n) < x \wedge q'(Sm, g^+(m, x)) = q'(Sm, g(Sm, 0))\big).$$

Zunächst bemerkt man leicht, daß trotz der Bezugnahme auf die Funktion $g(a, b)$ in 4.2 doch eine korrekte Rekursion in 4.2 und 4.3 zusammen vorliegt, da in 4.3 die Funktion g^+ an der ersten Stelle nur für m, also gemäß 4.2 die Funktion g an der ersten Stelle nur für m benutzt wird. Wir setzen noch

4.4 $$d(c) = g^+(c, c), \quad (d\,h. = g(0, g(1, \ldots, g(c, c) \ldots)).$$

Nun folgen einige Feststellungen:

4.5 $g(m, a)$ wächst streng monoton in a, d.h. $g(m, Sa) > g(m, a)$; dies folgt aus 4.1 bis 4.3 unter Benutzung von 3.9 und den Eigenschaften des Minimumoperators.

4.6 $\wedge x\big(q'(m, g^+(m, x)) = q'(m, g^+(m, 0))\big)$; folgt unmittelbar aus 4.1 bis 4.3.

4.7 $g^+(a, b)$ wächst streng monoton in b, d.h. $g^+(a, Sb) > g^+(a, b)$.

Beweis mit Induktion nach a: $g^+(0, Sb) > g^+(0, b)$ folgt aus 4.2 zusammen mit 4.5; $g^+(Sk, Sb) = g^+\big(k, g(Sk, Sb)\big) > g^+\big(k, g(Sk, b)\big) = g^+(Sk, b)$, wobei die Ungleichung mit Induktion, zusammen mit Hilfe von 4.5 erhalten wird.

4.8 $d(c)$ wächst streng monoton, d.h. $d(Sc) > d(c)$.

Beweis mit Hilfe von 4.7 und 4.5 und $g(Sc, c) \geqq c$.

4.9 $$c \geqq n \to q'\big(n, d(c)\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big).$$

4.8 und 4.9 zusammen ergeben dann den Beweis Lemmas, da ja, inhaltlich gesprochen, zwischen

$$f_{s_1(n)}\big(g(0, g(1, \ldots, g(n, 0) \ldots))\big) \quad \text{und} \quad f_{s_2(n)}\big(g(0, g(1, \ldots, g(n, 0) \ldots))\big)$$

genau eine der Beziehungen $=$ oder $\neq$ statt haben muß, und aus 4.9 nach Auflösung der Abkürzung q' folgt, daß diese Beziehung dann für alle $c \geqq n$ auf den Werten von d erhalten bleibt.

Beweis von 4.9. Nach 4.6 haben wir

(a) $$q'\big(n, g^+(n+0, c)\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big),$$

also nach Einsetzung von n anstelle von c

$$q'\big(n, g^+(n, n)\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big), \text{ also gemäß 4.4.}$$

(b) $$q'\big(n, d(n)\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big).$$

Induktionsannahme:

(c) $$q'\big(n, g^+(n+k, c)\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big);$$

setzen wir in dieser Formel $g(n+Sk, c)$ anstelle von c ein, dann hat man

$$q'\big(n, g^+(n+k, g(n+Sk, c))\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big),$$

also nach 4.2

$$q'\big(n, g^+(n+Sk, c)\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big),$$

und nach Einsetzung von $n+Sk$ anstelle von c und Benutzung von 4.4

(d) $$q'\big(n, d(n+Sk)\big) = q'\big(n, g^+(n, 0)\big),$$

also mit Induktion aus (b) und (d) die Behauptung 4.9, womit das Skolemsche Lemma bewiesen ist.

Aus 4.9 zusammen mit (b) erhalten wir nach Auflösung der Abkürzung q' unter Benutzung der Bedeutung der Funktionen $s(a, b)$, $s_1(n)$, $s_2(n)$:

4.10 $$c \geqq s(i, j) \to q\big(v(i, d(c)), v(j, d(c))\big) = q\big(v(i, d(s(i, j))), v(j, d(s(i, j)))\big).$$

Aus dem vorstehenden Beweis ersieht man, daß er formal für die Gesamtheiten $\mathfrak{f}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{f}_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{f}_{\mathrm{III}}$, $\mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$ genau gleich verläuft, je nach der Wahl der Funktionen $v_{\mathrm{I}}(a, b)$, $v_{\mathrm{II}}(a, b)$, $v_{\mathrm{III}}(a, b)$, $v_{\mathrm{VI}_\omega}(a, b)$, die anstelle von $v(a, b)$ verwendet werden; natürlich ist dementsprechend auch die Funktion $d(c)$ für die verschiedenen Fälle zu unterscheiden.

Eine Erweiterung der von uns betrachteten Systeme durch Hinzunahme neuer Funktionen (mit entsprechenden, etwa Rekursionsaxiomen) berührt den Beweis des Skolemschen Lemmas nur insofern, als andere Funktionen $v(a, b)$ auftreten. Einer Erweiterung durch neue Prädikate kann man wie folgt Rechnung tragen: seien etwa $B(a)$ und $C(a, b, c)$ solche Prädikate, für die ja wieder je eine zu 3.9 analoge Alternative zur Verfügung steht. Nach Einführung (1) der neuen Funktion $v(a, b)$, (2) einer passenden Abzählung der Tripel $\langle i, j, k\rangle$ und (3) etwa der charakteristischen Funktionen für $B(a)$ und $C(a, b, c)$, führt man das neue $g(0, 0)$ etwa wie folgt ein:

$$g(0,0) = \mu_x\big(\text{„Alternative wie in 4.1“} : \wedge : B(f_0(x)) \wedge U\,y\,B(f_0(x)) \,.\vee.\, \neg B(f_0(x)) \wedge U\,y \neg B(f_0(x)) : \wedge : \text{„eine entsprechende Alternative für das Prädikat}$$

$$C(f_0(x), f_1(x), f_2(x))\text{“}\big);$$

die weiteren Rekursionsgleichungen ergeben sich in Analogie zu 4.1 bis 4.3 ohne Schwierigkeit. Als Ergebnis erhält man eine zu 4.9 analoge Formel, in der auch die neuen Beziehungen auftreten. Will man insbesondere, wie

SKOLEM es tat, eine totale Ordnung für die Elemente von $\mathfrak{f}$ einführen, so hat man die Rekursion mit einer dreigliedrigen Alternative unter Benutzung von 3.10 aufzustellen.

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Rekursionsgleichungen für die Funktion $g(a, b)$, in denen $\nu(a, b)$ vorkommt, als Funktion von a unter Benutzung von gebundenen Variablen an der zweiten Stelle von $g(a, b)$ formuliert sind, wobei durch den Minimumoperator mindestens zwei alternierende Quantoren auftreten.

§ 5. Für die Aufstellung eines Modells eines Systems müssen wir einen Dingbereich angeben, die Grundbegriffe des Systems in diesem erklären, und zeigen, daß die in dem System beweisbaren Sätze in dem Modell gelten.

Die folgende Konstruktion eines Skolemschen Modells für eins der Systeme IV_ω erfolgt unter Benutzung von 4.10 mit Hilfe der beiden Funktionen $\nu(a, b)$ und $d(c)$, — genauer $\nu_{\mathrm{IV}_\omega}(a, b)$ und $d_{\mathrm{IV}_\omega}(c)$, doch wollen wir auch im weiteren den Index unterdrücken. Man ersieht aus der Konstruktion sofort, daß sie für die Systeme I und III ebenso angewandt werden kann. Hinsichtlich des Systems II stehen uns zwei Wege offen: wir können in III die $\leqq$-Beziehung explizit definieren; die Axiome 2.9 werden dann in III, also auch für das Modell von III beweisbar, d.h., das Modell von III ist auch ein Modell von II. Oder wir benutzen 4.10 in der Form, wie es sich nach Einführung einer totalen Ordnung ergibt, vgl. Ende von §4, erklären dann die Kleiner- und die Gleichheitsbeziehung analog, wie dies im folgenden für die Gleichheitsbeziehung allein geschieht, und erhalten so ein Modell für II, das sich natürlich unter entsprechender Änderung der Funktionen $\nu(a, b)$ und $d(c)$ zu einem Modell von III, bzw. IV_ω erweitern läßt.

Die Bezeichnung „Skolemsches Modell" für unsere Modelle ist nicht ganz wörtlich zu verstehen. SKOLEM verwendet [*14, 15*] als Dingbereich die Elemente von $\mathfrak{f}$, während in [*18*] eine Reduktion bezüglich der Modellgleichheit vorgenommen wird, da diese im allgemeinen nicht mit der Identität zusammenfällt. Unser Dingbereich sind die Zahlen 0, 1, 2, ... selbst; auf die Bildung von Äquivalenzklassen kommen wir in §6 noch zurück. Inhaltlich gesprochen beruht die Wahl der Zahlen als Dingbereich auf der durch $\nu(a)$ gegebenen Abzählung der Elemente von $\mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$, also auf der Benutzung der Indizes zusammen mit den Funktionen $\nu(a, b)$ und $d(c)$.

Wir greifen nun auf die in 3.1 bis 3.4 eingeführten Funktionen zurück. Auf Grund der Definition von $\nu(a, b)$ (vgl. 3.11) und der Bedeutung von $\varrho(a), \sigma(a, b), \tau(a, b), \chi(a), \psi(b, c_1, \ldots, c_n)$ ergeben sich unmittelbar die folgenden Transformationsgleichungen:

5.1
$$\left\{\begin{aligned}
\nu(\mathfrak{n}, c) &= 0\\
\nu\big(\varrho(a), c\big) &= S\,\nu(a, c)\\
\nu\big(\sigma(a, b), c\big) &= \nu(a, c) + \nu(b, c)\\
\nu\big(\tau(a, b), c\big) &= \nu(a, c) \times \nu(b, c)\\
\nu\big(\chi(\mathfrak{a}), c\big) &= \mu_x A(x)\\
\nu\big(\psi(b, c_1, \ldots, c_n), c\big) &= \mu_x B\big(x, \nu(c_1, c), \ldots, \nu(c_n, c)\big),
\end{aligned}\right.$$

worin in den letzten beiden Gleichungen $\mathfrak{a}$ die Gödel-Nummer von $A(a)$ bzw. $\mathfrak{b}$ die Gödel-Nummer von $B(a, c_1, \ldots, c_n)$ ist, und diese Gleichungen genauer als ein Schema für die Gesamtheit aller Gleichungen auszufassen sind, die entstehen, indem man $A(a)$ und $B(a, c_1, \ldots, c_n)$ alle syntaktisch korrekten Formeln dieser Gestalt, $n = 1, 2, \ldots$ aus der Sprache IV durchlaufen läßt. $\mathfrak{n}$ und die Werte von $\varrho(a)$, $\sigma(a, b)$, $\tau(a, b)$, $\chi(a)$, $\psi(b, c_1, \ldots, c_n)$ — wir nennen diese Funktionen im weiteren kurz die „Indexfunktionen" — sind Indizes von Elementen aus $\mathfrak{f}_{IV}$; in den letzten beiden Fällen müssen allerdings a bzw. b Gödel-Nummern geeigneter Ausdrücke sein, was man übrigens auch durch einige Hilfsfunktionen von vornherein erzwingen hätte können.

Nun schreiten wir zur Erklärung eines Modells, — es möge S_{IV_ω} heißen — für ein System IV_ω.

5.2 Dingbereich N; als freie (gebundene) Variable verwenden wir dieselben Buchstaben wie sie für IV gebraucht werden. Mitteilungszeichen für Formeln und Terme sind $\bar{A}(a, c) \ldots$ bzw. $\bar{T}(c_1, \ldots) \ldots$ ganz analog wie in §2, nur überstrichen.

5.3 Definition der Grundbegriffe. Für die Angabe dieser Definitionen verwenden wir hier als Äquivalenzzeichen $\Leftrightarrow$ und als Gleichheitszeichen $\doteqdot$. Es handelt sich bei diesen Angaben formal um explizite Definitionen in einem erweiterten zahlentheoretischen System, vgl. §6, so daß wir de jure die alten Zeichen verwenden dürften; die Änderung ist eine Konzession an die leichtere Lesbarkeit.

1) $a \sim b \Leftrightarrow \forall x \wedge y \left(y \geqq x \to \nu(a, d(y)) = \nu(b, d(y))\right)$,

2) $\bar{0} \doteqdot \mathfrak{n}$,

3) $\bar{S}\, a \doteqdot \varrho(a)$,

4) $a \mathbin{\bar{+}} b \doteqdot \sigma(a, b)$,

5) $a \mathbin{\bar{\times}} b \doteqdot \tau(a, b)$,

sei $A(a)$ eine Formel, die keine andere freie Variable außer a enthält, mit der Gödel-Nummer $\mathfrak{a}$:

6) $\bar{\mu}_x \bar{A}(x) \doteqdot \chi(\mathfrak{a})$,

sei $B(a, c_1, \ldots, c_n)$, $n \geqq 1$ eine Formel mit genau den angegebenen Variablen; mit der Gödel-Nummer $\mathfrak{b}$:

7) $\bar{\mu}_x \bar{B}(x, c_1, \ldots, c_n) \doteqdot \psi(\mathfrak{b}, c_1, \ldots, c_n)$.

In 5.3, 6), 7) gehen $\bar{A}(c)$ bzw. $\bar{B}(a, c_1, \ldots, c_n)$ aus $A(a)$ bzw. $B(a, c_1, \ldots, c_n)$ dadurch hervor, daß in formaler Weise alle Grundbegriffe von IV durch die entsprechenden neuen Begriffe nach 5.3 ersetzt werden. Wir wollen in so einem Fall kurz sagen, daß etwa $\bar{A}(a)$ aus $A(a)$ „durch Überstreichung" hervorgeht; vgl. dazu noch 5.6. Die beiden letzten Definitionen 6), 7) sind genauer Definitionsschemata, analog, wie die beiden letzten Transformationsgleichungen 5.1

Aus 5.3; 1) — 7), zusammen mit den Erklärungen der Indexfunktionen 3.1 bis 3.4 erkennt man, daß für jeden Term $\bar{T}$ bzw. $\bar{T}(c_1, \ldots, c_n)$ ein Ausdruck t,

bzw. $t(c_1, \ldots, c_n)$, aufgebaut mittels der Indexfunktionen und eventuell bestimmter Gödel-Nummern, gefunden werden kann, der im Sinne der Definitionen 5.3 den Termen T bzw. $\overline{T}(c_1, \ldots, c_n)$ entspricht; wir wollen t bzw. $t(c_1, \ldots, c_n)$ die den Termen $\overline{T}$ bzw. $\overline{T}(c_1, \ldots, c_n)$ „entsprechenden" Terme nennen. Zum Beispiel entspricht dem Term $a \overline{\times} \overline{S}(\bar{\mu}_x(\overline{B}(x, b))$, falls $\mathfrak{b}$ die Gödel-Nummer von $B(a, c)$ ist, $\tau(a, \varrho(\psi(\mathfrak{b}, b)))$, und dem Term $\bar{\mu}_x \overline{A}(x, \bar{\mu}_y \overline{B}(x, y))$, falls $\mathfrak{a}^*$ die Gödel-Nummer von $A^*(a) \leftrightarrow_{Df} A(a, \mu_y B(a, y))$ ist, $\chi(\mathfrak{a}^*)$.

Hinsichtlich der Einsetzungen für die freien Variablen in den Definitionen 5.3 ist zu beachten: 1) Es werden auf beiden Seiten der Definitionen 5.3 für eine Variable Ausdrücke aus IV eingesetzt; $S(17)$ z.B. ist dann der Index des Funktionsterms aus $\mathfrak{f}$, der durch Vorsetzen von S vor den Funktionsterm mit dem Index 17 entsteht. 2) Es werden auf den linken Seiten der Definitionen 5.3 „überstrichene Ausdrücke", d.h. in unserem Modell erklärte Terme eingesetzt; auf der rechten Seite hat man dann (an den in Betracht kommenden Stellen) die „entsprechenden" Ausdrücke einzusetzen. Zum Beispiel ist $\overline{S}(a \mp b) \doteq \varrho(\sigma(a, b))$.

5.4 Nachweis der Gleichheitseigenschaften:

$a \sim a$, $a \sim b \to b \sim a$ folgen sofort aus 5.3 unter Benutzung der entsprechenden Sätze für die Gleichheit in IV_ω.

$$a \sim b \wedge b \sim c \to a \sim c.$$

Beweis. Nach Voraussetzung und 5.3 haben wir ein n und ein m, so daß $\wedge y(y \geqq n \to \nu(a, d(y)) = \nu(b, d(y)))$ und analog für m, mit b und c anstelle von a und b; also folgt

$$\wedge y(y \geqq \max(n, m) \to \nu(a, d(y)) = \nu(c, d(y))), \quad \text{d.h.} \quad a \sim c.$$

Wenn bei dem Aufbau unserer Systeme das Gleichheitsschema 2.2 zugunsten von endlich vielen Substitutionsaxiomen vermieden wurde, dann lassen sich diese Axiome in ganz elementarer Weise übertragen; auf den Beweis des Gleichheitsschemas kommen wir noch zurück.

5.5 Um im folgenden das Auftreten von negierten Ausdrücken zu berücksichtigen, führen wir in Ergänzung zu 5.3 noch folgende Definition ein:

$$a \nsim b \Leftrightarrow \vee x \wedge y(y \geqq x \to \nu(a, d(y)) \neq \nu(b, d(y))).$$

Wir haben dann zu zeigen:

5.6 $$\neg a \sim b \leftrightarrow a \nsim b.$$

Beweis. Sei $a \nsim b$, d.h. wir haben ein n, so daß $\wedge y(y \geqq n \to \nu(a, d(y)) \neq \nu(b, d(y)))$. Sei nun $l < n$, dann gibt es ein x, nämlich n, so daß $\nu(a, d(n)) \neq \nu(b, d(n))$; ist $l \geqq n$, dann gilt nach Voraussetzung $\nu(a, d(l)) \neq \nu(b, d(l))$, d.h.

(a) $$\wedge x \vee y(y \geqq x \wedge \nu(a, d(y)) \neq \nu(b, d(y))), \quad \text{d.h.} \quad \neg a \sim b.$$

Sei umgekehrt $\neg\, a \sim b$ und sei $e \geqq s(a, b)$ ein solches gemäß (a) existierendes y, daß $\nu(a, d(c)) \neq \nu(b, d(c))$ ist, dann folgt aus 4.10 $\wedge y\big(y \geqq e \to \nu(a, d(y)) \neq \nu(b, d(y))\big)$, d.h. nach 5.5 $a \nsim b$.

In den nach 5.3 genannten Prozeß der „Überstreichung" beziehen wir auch die Verwendung der Definition 5.5 ein, was natürlich keine wesentliche Änderung dieses Prozesses bedeutet.

5.7 Nachweis der Gültigkeit der Axiome 2.3, 2.4, 2.10, 2.11 für unser Modell: unter Benutzung der entsprechenden Axiome aus IV_ω — angewandt auf Ausdrücke die mittels $\nu(a, b)$ und $d(c)$ aufgebaut sind — der Transformationsgleichungen 5.1 und der Definitionen 5.3 und 5.5 ergeben sich die gewünschten Beweise ganz direkt, z.B.

$$a \mp \bar{S} b \sim \bar{S}(a \mp b).$$

Beweis.

$a + Sb = S(a + b)$, also $\nu\big(a, d(c)\big) + S\nu\big(b, d(c)\big) = S\big(\nu(a, d(c)) + \nu(b, d(c))\big)$,

also mit 5.1

$$\nu\big(\sigma(a, \varrho(b)), d(c)\big) = \nu\big(\varrho(\sigma(a, b)), d(c)\big),$$

also

$$\vee x \wedge y\big(y \geqq x \to \nu(\sigma(a, \varrho(b)), d(y)) = \nu\big(\varrho(\sigma(a, b)), d(c)\big)\big),$$

also mit 5.3 $\sigma\big(a, \varrho(b)\big) \sim \varrho\big(\sigma(a, b)\big)$, also wieder mit 5.3 die Behauptung.

5.8 Nachweis des Axioms 2.5

$$a \nsim 0 \to \vee x(\bar{S} x \sim a).$$

Beweis. Kürzen wir $a = 0 \vee Sc = a$ durch $B(c, a)$ ab; die Gödel-Nummer von $B(c, a)$ sei b. 2.5 lautet äquivalent $a = 0 \vee \vee x(Sx = a)$ also nach symbolischer Auflösung $a = 0 \vee S\mu_x B(x, a) = a$.

Sei $a = 0$, dann erhält man sofort $a \sim \bar{0}$, also $a \sim \bar{0} \vee \vee x(\bar{S} x \sim a)$.

Sei $S\mu_x B(x, a) = a$, dann hat man $S\mu_x B\big(x, \nu(a, d(c))\big) = \nu\big(a, d(c)\big)$, also mit 5.1 $\nu\big(\varrho(\psi(b, a)), d(c)\big) = \nu\big(a, d(c)\big)$, also nach Vorsetzen von $\vee x \wedge y(y \geqq x \to \cdots$ und Anwendungen von 5.3, 1) und danach von 5.3, 2)—7)

$$\bar{S}\bar{\mu}_x(a \sim \bar{0} \vee \bar{S} x \sim a) \sim a,$$

also $\vee x(\bar{S} x \sim a)$, also $a \sim \bar{0} \vee \vee x(\bar{S} x \sim a)$, d.h. in beiden Fällen der Alternative erhalten wir die Behauptung.

Über die Behandlung der Axiome 2.9 (die dem System IV ja nicht angehören) wurde schon gesprochen. Wir haben nun noch die Gültigkeit der Axiomenschemata 2.2, 2.6, 2.7, 2.8 nachzuweisen und ein allgemeines Verfahren anzugeben, um von beweisbaren Sätzen eines Systems IV_ω zum Nachweis dieser Sätze für das zugehörige Modell zu gelangen. (Dieses Verfahren macht natürlich die Einzelnachweise der Axiome und Axiomenschemata prinzipiell überflüssig, doch wird durch die Beispiele das allgemeine Verfahren durchsichtiger.)

Wir beweisen zunächst das folgende Lemma:

5.9 *Es sei* $A(c_1, \ldots, c_n)$, $n \geqq 1$ *eine quantorenfreie Formel, mit genau den angegebenen freien Variablen. (A kann natürlich μ-Terme enthalten.)* $\bar{A}(c_1, \ldots, c_n)$ *gehe aus* $A(c_1, \ldots, c_n)$ *durch Überstreichung hervor. Dann gilt*

$$\bar{A}(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow \vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A(v(c_1, d(y)), \ldots, v(c_n, d(y)))\right).$$

Beweis. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei $n = 1$. $A(c)$ ist aus Konjunktionen und Disjunktionen von Gleichungen und Ungleichungen zwischen Termen $T_1(c), T_2(c), \ldots$ aufgebaut. Der Beweis erfolgt mit Induktion nach dem Aufbau der Formel $\bar{A}(c)$.

1) Habe $\bar{A}(c)$ die Form $\overline{T_1(c) \neq T_2(c)}$. Mit Hilfe von 5.3 findet man zu $\overline{T_1}(c)$, $\overline{T_2}(c)$ die „entsprechenden Terme" $t_1(c)$, $t_2(c)$ und vermöge 5.3, 1) (bzw. 5.5) erhält man $\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to v(t_1(c), d(y)) = v(t_2(c), d(y))\right)$, also mittels 5.1 $\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to T_1(v(c, d(y))) = T_2(v(c, d(y)))\right)$, d.h. $\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A(v(c, d(y)))\right)$. Dieser Weg ist offenbar auch in der umgekehrten Richtung gültig.

2) Habe $\bar{A}(c)$ die Form $\overline{A_1(c) \vee A_2(c)}$, d.h. $\bar{A}_1(c) \vee \bar{A}_2(c)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

(a) $\quad \vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A_1(v(c, d(y)))\right) \vee \vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A_2(v(c, d(y)))\right)$.

Aus dem ersten *und* dem zweiten Disjunktionsglied von (a) erhalten wir durch Abschwächung der Folgerungen in den Hintergliedern der Implikationen

(b) $\quad \vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A_1(v(c, d(y))) \vee A_2(v(c, d(y)))\right)$,

d.h.

$$\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A(v(c, d(y)))\right).$$

Umgekehrt erhält man aus (b) die Formel (a) unter Verwendung der aussagenlogischen Identität $X \to (Y \vee Z) \cdot \to \cdot (X \to Y) \vee (X \to Z)$ nach Auflösung der Quantoren und nachheriger Wiedereinführung zurück.

3) Habe $\bar{A}(c)$ die Form $\overline{A_1(c) \wedge A_2(c)}$, d.h. $\bar{A}_1(c) \wedge \bar{A}_2(c)$, dann erhält man

(c) $\quad \vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A_1(v(c, d(y)))\right) \wedge \vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A_2(v(c, d(y)))\right)$.

Seien hier n, m die laut (c) existierenden unteren Schranken, dann erhalten wir mit $\max(n, m)$ und nachheriger Wiedereinführung des Existenzquantors

(d) $\quad \vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A_1(v(c, d(y))) \wedge A_2(v(c, d(y)))\right)$,

d.h.

$$\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A(v(c, d(y)))\right).$$

Umgekehrt gelangt man von (d) mit Hilfe der Identität $X \to (Y \wedge Z) \cdot \to \cdot (X \to Y) \wedge (X \to Z)$, analog wie in 2) hier zu (c) zurück. Durch den vorstehenden Beweis sind die Formeln $\bar{A}(c)$ der Form $\neg \overline{A_1}(c)$ d.h. $\neg \bar{A}_1(c)$ mitberücksichtigt, da ja die äußere Negation nach den Regeln der Bildung des Gegenteils nach innen bis zu den Primformeln hineingezogen werden kann. Hierbei wird übrigens 5.6 benutzt.

Hinsichtlich der Einsetzungen in 5.9 gilt das bereits nach 5.3 allgemein gesagte. Sei $\overline{T}$ ein Term und t der entsprechende Term, dann folgt speziell aus 5.9

5.10 $$\bar{A}(\overline{T}) \Leftrightarrow \vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A\left(\mathfrak{v}(t, \mathfrak{d}(y))\right)\right).$$

Eine weitere Folgerung aus 5.9 ergibt sich mittels der Gleichheit von $\neg \bar{A}(c)$ und $\overline{\neg A}(c)$:

5.11 $$\wedge x \vee y \left(y \geqq x \wedge A\left(\mathfrak{v}(c, \mathfrak{d}(y))\right)\right) \leftrightarrow \vee x \wedge y \left(y \geqq x \to A\left(\mathfrak{v}(c, \mathfrak{d}(y))\right)\right).$$

Beweis. $\neg \overline{\neg A}(c)$ ist nach 5.9 mit der linken Seite von 5.11 äquivalent und $\overline{\neg \neg A}(c)$ mit der rechten Seite von 5.11. — Hierbei besagt die Implikation von links nach rechts, daß aus der Gültigkeit von $A\left(\mathfrak{v}(c, \mathfrak{d}(a))\right)$ für unendlich viele a auf die Gültigkeit von $A\left(\mathfrak{v}(c, \mathfrak{d}(a))\right)$ für alle a ab einer gewissen Stelle geschlossen werden darf. (Natürlich läßt sich 5.11 auch direkt mit Hilfe von 4.10 analog wie 5.6 beweisen; man hat nur beim Beweis von links nach rechts mit Hilfe einer Maximumbildung über die Paarnummern der auftretenden „entsprechenden" Terme eine dem e im Beweis von 5.6 analoge Schranke zu bilden.)

5.12 Kehren wir nun zum Nachweis der Gültigkeit der Axiome von IV_ω zurück. Es sei eine Formel $A(c_1, \ldots, c_n)$, die auch gebundene Variable enthalten mag, als *beweisbare* Formel in IV_ω gegeben. Durch symbolische Auflösung gehe diese Formel in $B(c_1, \ldots, c_n, \ldots, c_{n+k})$ über. Daraus erhalten wir durch Einsetzung leicht

$$\vee x \wedge y \left(y \geqq x \to B\left(\mathfrak{v}(c_1, \mathfrak{d}(y)), \ldots, \mathfrak{v}(c_{n+k}, \mathfrak{d}(y))\right)\right),$$

also nach 5.9 $\overline{B}(c_1, \ldots, c_{n+k})$; durch prädikatenlogische Schlüsse gelangt man davon zu der Formel $\bar{A}(c_1, \ldots, c_n)$.

Insbesondere ergibt sich so der Nachweis der Axiomenschemata 2.2, 2.6, 2.7, 2.8, die im Modell lauten:

$$a \sim b \cdot \to \cdot \bar{A}(a) \to \bar{A}(b),$$

$$\bar{A}(a) \to \bar{A}\left(\bar{\mu}_x \bar{A}(x)\right),$$

$$\bar{A}(a) \to \bar{\mu}_x \bar{A}(x) \nsim \bar{S}\, a, \quad \text{bzw.} \quad \bar{A}(a) \to \bar{\mu}_x \bar{A}(x) < \bar{S}\, a,$$

(mit sinngemäßer Definition von $a < b$),

$$\neg \bar{A}\left(\bar{\mu}_x \bar{A}(x)\right) \to \bar{\mu}_x \bar{A}(y) \sim \bar{0},$$

wie auch derjenige von 2.12, das übergeht in

$$\bar{A}(\bar{0}) \wedge \wedge z\left(\bar{A}(z) \to \bar{A}(\bar{S}\, z)\right) \to \wedge y\, \bar{A}(y).$$

Damit ist die Modellkonstruktion von S_{IV_ω} und der Nachweis der Gültigkeit der beweisbaren Sätze von IV_ω für das Modell abgeschlossen.

§ 6. 6.1 Wie aus den Schlußbemerkungen von § 4 und der vorstehenden Modellkonstruktion ersichtlich ist, läßt sich ein Skolem-Modell auf diese Weise auch für Systeme der Zahlentheorie gewinnen, die aus IV, bzw. IV_ω durch Hinzunahme weiterer Grundbegriffe und der zugehörigen Axiome, nach entsprechender Erweiterung der Bedeutung der Axiomenschemata, entstehen. Man vervollständigt diese Systeme analog wie in 3.5, führt dann die zugehörigen Funktionen $r(a, b)$ und $d(c)$ wie in § 4 ein, und hat dann die Definitionen 5.3 bzw. 5.5 in naheliegender Weise zu ergänzen. Solche erweiterte Systeme der Zahlentheorie ergeben sich insbesondere durch Hinzunahme (zu IV) von Prädikaten, die gemäß der Schemata von H. WANG [22] und J. MYHILL [12] gebildet werden.

6.2 Das dem Modell S_{IV_ω} entsprechende formale System, das durch Überstreichung aus IV_ω hervorgeht, ist offensichtlich widerspruchsfrei und vollständig. (Dem Aussagenpaar $\overline{X}$ und $\neg\overline{X}$ entspricht das Aussagenpaar X und $\neg X$ aus IV_ω; eine dieser Aussagen ist in IV_ω beweisbar, also auch die entsprechende überstrichene Aussage.

6.3 Wir haben mehrfach auf Stellen hingewiesen, an denen die Ausdrucks- und Beweismittel des Systems IV_ω bei unserer Konstruktion überschritten wurden. Dazu gehörte die Definition von $r(a, b)$, zusammen mit der Definition von $g(a, b)$. Von diesen Funktionen wurde für Einsetzungen und bei Induktionen in § 4 und § 5 Gebrauch gemacht. Sei V das zahlentheoretische System, das aus einem System IV_ω durch Hinzunahme (im Sinne von 6.1) von $r(a, b)$ und der damit definierten Funktion $g(a, b)$ hervorgeht. Die Aufstellung von S_{IV_ω} und der zugehörige Nachweis der Modelleigenschaften geschieht in V in der Weise, daß wir darin vermöge expliziter Definitionen Begriffe einführen, für die in V die Axiome von IV_ω beweisbar sind. (Dabei sind die Funktionen $r(a)$ und $v(a)$ nicht berücksichtigt.)

6.4 Die Gleichheitsbeziehung in S_{IV_ω} ist eine Äquivalenzbeziehung, jedoch nicht die Identität, wie man ja sofort an den verschieden numerierten Elementen aus $\mathfrak{f}$: $\mu_x(c=c \wedge x=S0)$, $S\mu_x(c=c \wedge x=0)$ ersieht. Um zu einem hinsichtlich der Gleichheit $\sim$ reduzierten Modell $S^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ zu gelangen, führen wir die folgenden (nicht rekursiven) Funktionen ein:

6.5 $$k(a) =_{Df} \mu_z \forall x \wedge y\big(y \leqq x \to r(z, d(y)) = r(a, d(y))\big)$$

6.6 $$\begin{cases} l(0) = u_x \forall y\big(x = k(y)\big) \\ l(Sn) = \mu_x\big(l(n) < x \wedge \forall y\,(x = k(y))\big); \end{cases}$$

$k(a)$ ist der kleinste Index in der durch a vermöge $\sim$ bestimmten Äquivalenzklasse und $l(a)$ zählt diese kleinsten Indizes der Größe nach auf. Behält man nun die Definitionen 5.3 bei und bildet mit Hilfe von k aus unseren Indexfunktionen z. B. $\varrho(a)$ neue Funktionen z. B. $\varrho^*(a) = k\big(\varrho(a)\big)$, dann ergibt sich aus S_{IV_ω} ein hinsichtlich $\sim$ reduziertes Modell $S^*_{\mathrm{IV}_\omega}$, dessen Dingbereich der Wertbereich von k ist. Ersetzt man 5.3, 1) durch

$$a \approx b \Leftrightarrow \forall x \wedge y\big(y \leqq x \to r(l(a), d(y)) = r(l(b), d(y))\big)$$

und führt anstelle der Funktionen z.B. $\varrho(a)$ usw. neue Funktionen z.B. $\varrho^{**}(a) = l^{-1}\left(k(\varrho(a))\right)$ usw. ein, dann erhält man ein bezüglich $\sim$ reduziertes Modell $S^{**}_{\mathrm{IV}_\omega}$, dessen Dingbereich wieder N ist.

6.7 Die Gesamtheit der konstanten Terme der Sprache IV, — sie heiße $\mathfrak{g}_{\mathrm{IV}}$ wird erst durch die Bildung eines Systems IV_ω analog wie $\mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$ insofern festgelegt, daß für jedes Element von $\mathfrak{g}_{\mathrm{IV}}$ die Gleichheits- bzw. Ungleichheitsbeziehungen zu den anderen Elementen von $\mathfrak{g}_{\mathrm{IV}}$ bestimmt sind. Nun bildet $\mathfrak{g}_{\mathrm{IV}}$ in natürlicher Weise ein Modell für IV_ω. (Der formale Beweis dafür überschreitet natürlich das System IV_ω.) Dieses Modell nennen wir das (bezüglich der Gleichheit) „nicht reduzierte Termmodell" M_{IV_ω} von IV_ω. Wählt man aus den vermöge der Modellgleichheit von M_{IV_ω} bestimmten Äquivalenzklassen z.B. das Element mit der kleinsten Gödel-Nummer, bzw. wenn eine Ziffer $S \ldots S0$ darin vorkommt, diese als Repräsentanten, dann erhält man ein Modell $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$, das wir das „reduzierte Termmodell" von IV_ω nennen wollen.

Jedes Element von M_{IV_ω} und von $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ etwa $\mu_x A(x)$ läßt sich in IV_ω durch eine Einzigkeitsaussage der Art $E(a) \wedge \wedge x\left(E(x) \to x = a\right)$, worin $E(c) \leftrightarrow_{Df} A(c) \wedge \wedge y\left(A(y) \to c \leqq y\right)$ ist, kennzeichnen, d.h. M_{IV_ω} und $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ sind im Sinne von A. ROBINSON [13] Primmodelle (bezüglich der Sprache IV). Selbstverständlich läßt sich umgekehrt jede Kennzeichnung eines Elementes a durch eine Formel ohne μ-Terme auch durch einen μ-Term erreichen. Der folgende Isomorphiesatz entspricht dem von A. ROBINSON l.c. auf modelltheoretischem Wege bewiesenen Satz 2.10:

6.8 *Zwei (z.B. nichtreduzierte) Termmodelle L, M in denen für zwei Aussagen $X, \neg X$ (der Sprache IV) die eine oder die andere in beiden Modellen gilt, sind isomorph.*

Beweis. Man hat in L und M nach Voraussetzung über die Gültigkeit von Aussagen in L und M dieselben Terme und unter ihnen dieselben Gleichheitsbeziehungen. (Das Fehlen eines entsprechenden Elementes oder einer zugehörigen Kennzeichnung würde sich ja sofort in Sätzen, die in einem Modell gelten, im andern nicht, bemerkbar machen.)

6.9 *S_{IV_ω} bzw. $S^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ sind nicht isomorph mit M_{IV_ω} bzw. $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$.* Definiert man z.B. (diese Definition gehört nicht dem System IV_ω an)

$$6.10 \qquad \mathrm{Const}(a) \leftrightarrow \vee x \wedge y\left(\nu_{\mathrm{IV}_\omega}(a, y) = x\right),$$

d.h. daß a Index einer konstanten Funktion ist. Nun bildet der Bereich der einstelligen konstanten Funktionen von IV_ω ein zu M_{IV_ω} (bzw. nach Reduktion zu $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$) isomorphes Modell $\bar{M}_{\mathrm{IV}_\omega}$ bzw. $\bar{M}^*_{\mathrm{IV}_\omega}$. Sei nun der Index von $\mu_x(c = x)$ etwa $\mathfrak{k}$, dann hat man offensichtlich

$$6.11 \qquad \mathrm{Const}(a) \to a \sim \mathfrak{k},$$

d.h. S_{IV_ω} bzw. $S^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ enthält Elemente, die von allen Elementen aus $\bar{M}_{\mathrm{IV}_\omega}$ bzw. $\bar{M}^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ verschieden sind. Diese Nichtisomorphie etwa zwischen $S^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ und $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ gilt insbesondere für das (reduzierte) Standardmodell $M^*_{\mathfrak{N}_\omega}$. Somit folgt speziell der folgende Skolemsche Satz:

6.12 *Auch durch Hinzunahme von abzählbar vielen Aussagen der Sprache* IV *zu den Axiomen von* IV, — *Aussagen, die alle im Sinn der intendierten Zahlvorstellung „wahr" sind, — kann die Zahlenreihe nicht charakterisiert werden. Dabei ist die Bezugnahme auf eine Sprache wesentlich, nicht aber um welche es sich handelt, soweit sie nur präzisiert ist.*

Also auch die Erweiterung der Sprache IV durch die in 6.1 genannten Prädikate berührt den in 6.12 ausgesprochenen Tatbestand nicht. Andererseits gelten in S_{IV_ω} bzw. $S^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ alle Sätze aus IV_ω d.h. S_{IV_ω} bzw. $S^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ sind *arithmetische Erweiterungen* von M_{IV_ω} bzw. $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$, im Sinne von TARSKI und VAUGHT [*21*].

§ 7. 7.1 Ein anderes Verfahren zu einem Modell von einem System IV_ω zu gelangen, das mit M_{IV_ω} bzw. $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ nicht isomorph ist, wurde von L. HENKIN angegeben. Es beruht auf dem Gödelschen Vollständigkeitssatz, aus dem man entnimmt, *daß jedes widerspruchsfreie abzählbare Axiomensystem, (formuliert im Prädikatenkalkül der ersten Stufe), ein Modell besitzt.* (Der Satz gilt allgemeiner, wie A. MALCEV [*8*] und L. HENKIN [*3*, *4*] gezeigt haben.)

Im folgenden, beschränken wir uns, wenn nicht ausdrücklich anders gesagt, auf die Betrachtung von nicht reduzierten Modellen, also M_{IV_ω}, S_{IV_ω} und weitere dieser Art. Alle Sätze lassen sich ohne besondere Mühe auf die bezüglich Gleichheit reduzierten Modelle übertragen.

Gehen wir nun von der in 6.7 eingeführten Gesamtheit $\mathfrak{g}_{\mathrm{IV}}$ der konstanten Terme aus und nehmen wir zu einem System IV_ω ein neues Individuensymbol, etwa α hinzu, sowie die (übrigens rekursive) Menge H von Axiomen, die zusammen besagen, daß α größer als jedes Element aus $\mathfrak{g}_{\mathrm{IV}}$ ist. Unter der Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit von IV_ω erkennt man, daß das so erweiterte System IV'_ω ebenfalls widerspruchsfrei ist, da jede endliche Teilmenge von H zusammen mit IV_ω erfüllbar ist. Also besitzt IV'_ω gemäß dem Gödelschen Satz ein Modell, das dann alle Sätze von IV_ω erfüllt, aber offenbar nicht isomorph zu M_{IV_ω} ist.

A. ROBINSON [*13*] hat nun auf modelltheoretischem Wege einen Zusammenhang zwischen den Skolemschen und den Henkinschen Verfahren zur Bildung von Nicht-Standardmodellen (der Zahlentheorie) hergestellt, den wir hier auf einem anderen Wege in etwas verschärfter Form herleiten werden.

Zunächst eine Vorbemerkung anderer Art:

7.2 *Von den Systemen* II′, III′, IV'_ω, *die aus den entsprechenden ungestrichenen Systemen durch eine Henkinsche Erweiterung vermöge der Axiomenmenge H (bezogen auf die Sprachen* II, III, IV) *hervorgehen, ist* II *vollständig, während* III′ *und die umfassenderen Systeme unvollständig sind.*

Beweis. Die Aussagen, von II′, III′, IV'_ω, die das Symbol α nicht enthalten, sind durch die (vollständigen) Systeme II, III, IV_ω festgelegt. Wir haben also nur noch Aussagen $A(\alpha)$ zu betrachten, die das Symbol α enthalten; $A(c)$ gehe aus $A(\alpha)$ dadurch hervor, daß α an allen Stellen, an denen es vorkommt durch c ersetzt wird. Gilt $A(c)$ in II, III, IV_ω nur für endlich viele Terme aus den reduzierten Termmodellen M^*_{II}, M^*_{III}, $M^*_{\mathrm{IV}_\omega}$ und seien $T_1, \ldots, T_n$ diese

Terme, dann kann man in den entsprechenden Systemen $\wedge x(x \neq T_1 \wedge \ldots \wedge x \neq T_n \rightarrow \neg A(x))$ beweisen; daraus folgt $\neg A(\alpha)$. Kurz gesagt, nur für Eigenschaften $A(c)$, derart, daß sowohl $A(c)$ als auch $\neg A(c)$ für unendlich viele (im reduzierten Modell verschiedene) Terme zutrifft, kann hinsichtlich der Gültigkeit von $A(\alpha)$ in II', III', IV'_ω Zweifel bestehen. Nun folgt unsere Behauptung mit Hilfe von zwei Sätzen von P. BERNAYS. Das System II, das im wesentlichen mit dem System B in [5], I, p. 273 übereinstimmt hat die Eigenschaft, vgl. l.c. p. 354, daß für alle Formeln $A(c)$ mit einer freien Variablen gilt

$$7.3 \qquad \vee x \wedge y(y \geqq x \rightarrow A(y)) \vee \vee x \wedge y(y \geqq x \rightarrow \neg A(y)).$$

Also liegen nach dem vorhin Bemerkten die Aussagen $A(\alpha)$ in II' alle fest, d.h. II' ist vollständig. Dagegen gilt 7.3 wie l.c. p. 369 gezeigt ist, schon für III und a fortiori für IV nicht. Betrachten wir etwa das System III' mit dem Zusatzaxiom $\mathrm{Ger}(\alpha)$, worin $\mathrm{Ger}(a)$ etwa durch $\vee x(x+x=a)$ definiert ist, dann sieht man, daß sowohl $\mathrm{III}' \cup \mathrm{Ger}(\alpha)$, als auch $\mathrm{III}' \cup \neg\,\mathrm{Ger}(\alpha)$ widerspruchsfrei sind, also III', und ebenso IV'_ω unvollständig sind.

Für das Folgende beschränken wir uns wieder auf die Systeme IV_ω. Die Übertragung der Überlegungen auf andere Systeme ergibt sich nach den Vorbemerkungen zu §4 und nach 6.1 ohne weitere Schwierigkeit.

Von IV_ω gelangen wir durch Hinzunahme der Axiome H zu einem System IV'_ω. Wenden wir darauf den Lindenbaumschen Satz (3.5) an, dann erhalten wir ein System $\mathrm{IV}^\omega_\omega$, das vollständig ist, und es gibt, wie aus 7.2 ersichtlich verschiedene solche Systeme $\mathrm{IV}^\omega_\omega$ über IV_ω.

Die hier auftretenden beiden Vervollständigungsprozesse können zu einem einzigen zusammengezogen werden:

7.4 *Die Gesamtheit der Systeme* $\mathrm{IV}^\omega_\omega$ *ist identisch mit der Gesamtheit der (widerspruchsfreien) vollständigen Obersysteme von* $\mathrm{IV} \cup H$.

Beweis. Es sei $\mathrm{IV}^\omega_\omega$ entstanden durch zwei Lindenbaumsche Vervollständigungen der Art 3.5 vermöge der Aufzählungsfunktionen $r_1(a)$ und $r_2(a)$, wobei $r_1(a)$ bzw. $r_2(a)$ die Aussagen der Sprache IV, bzw. der Sprache IV mit α aufzählen. Wir definieren: $r^*(2k)=r_1(k)$, $r^*(2k+1)=r_2(k)$; $\mathfrak{B}$ sei wie früher die Menge der beweisbaren Sätze des Systems IV. Wir definieren dann den neuen Vervollständigungsprozeß:

$$7.5 \qquad \begin{cases} \mathfrak{C}_0 = \mathfrak{B} \cup H \\ \mathfrak{C}_{2n+1} = \begin{cases} \mathfrak{C}_{2n}, & \text{wenn } X_{2n} \text{ bei der Vervollständigung} \\ & \text{vermöge } r_1(a) \text{ nicht aufgenommen wurde,} \\ \mathfrak{C}_{2n} \cup X_{2n} & \text{sonst.} \end{cases} \\ \mathfrak{C}_{2n+2} = \begin{cases} \mathfrak{C}_{2n+1}, & \text{Bedingung wie oben mit } r_2(a), \\ \mathfrak{C}_{2n+1} \cup X_{2n+1} & \text{sonst,} \end{cases} \\ \mathfrak{C}_\omega = \Sigma \mathfrak{C}_n. \end{cases}$$

Man sieht leicht, unter Benutzung der entsprechenden Eigenschaften von $\mathrm{IV}^\omega_\omega$: $\mathfrak{C}_\omega \geqq \mathfrak{B} \cup H$, $\mathfrak{C}_\omega$ ist widerspruchsfrei und vollständig, $\mathfrak{C}_\omega$ ist mit der Gesamt-

heit der beweisbaren Sätze von $\mathrm{IV}_\omega^\omega$ identisch; wir können also $\mathrm{IV}_\omega^\omega$ im Sinne unserer Bezeichnungen auch $(\mathrm{IV} \cup H)_\omega$ nennen.

Sei nun $(\mathrm{IV} \cup H)_\omega$ durch einen Vervollständigungsprozeß vermöge einer Funktion $\mathfrak{r}'(a)$, die die Aussagen der Sprache IV mit $\mathfrak{a}$ aufzählt, aus $\mathfrak{C}_0$ entstanden und die Gesamtheit der beweisbaren Sätze von $(\mathrm{IV} \cup H)_\omega$ sei etwa $\mathfrak{C}'_\omega$. $\mathfrak{A}$ sei wie früher die Gesamtheit der Aussagen der Sprache IV. $\mathfrak{C}'_\omega \cap \mathfrak{A}$ ist dann ein vollständiges System IV_ω, das wir uns etwa durch folgenden Prozeß definiert denken können: $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_{n+1} = \mathfrak{B}_n$, wenn $X_n \notin \mathfrak{A}$ oder X_n nicht aufgenommen wird gemäß der Vervollständigung mit $\mathfrak{r}'(a)$, und $\mathfrak{B}_{n+1} = \mathfrak{B}_n \cup X_n$ sonst. Wir gelangen dann zu $\mathfrak{C}'_\omega$, indem wir das Lindenbaumsche Verfahren, vgl. 3.5, auf $\mathfrak{C}'_\omega \cap \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{r}'(a)$ anwenden. Dabei wird eine Aussage, die bei der Bildung von $\mathfrak{C}'_\omega$ auf- bzw. nicht aufgenommen wurde, auch jetzt auf- bzw. nicht aufgenommen.

Das nicht-reduzierte (bzw. reduzierte) Termmodell eines Systems $\mathrm{IV}_\omega^\omega$, d.h. nach 7.4 eines Systems $(\mathrm{IV} \cup H)_\omega$, oder wie wir auch sagen wollen $\mathrm{IV}(\mathfrak{a})_\omega$, bezeichnen wir mit H_{IV_ω} bzw. $H^*_{\mathrm{IV}_\omega}$.

7.6 *Zu jedem Modell S_{IV_ω} gibt es ein isomorphes Modell H_{IV_ω}.* (Bei A. Robinson ist dieser Satz unter der Voraussetzung, daß H_{IV_ω} schon Teilmodell von S_{IV_ω} ist, bewiesen.)

Beweis. Dem Individuensymbol $\mathfrak{a}$ ordnen wir (wie es auch Robinson tut) den Index $\mathfrak{k}$ aus S_{IV_ω} der Funktion $\mu_x(c = x)$ zu. Im weiteren brauchen wir uns nur mit Aussagen $A(\mathfrak{a})$ zu beschäftigen, die $\mathfrak{a}$ enthalten. Ferner soll eine Aussage $A(\mathfrak{a})$ zu $\mathrm{IV}(\mathfrak{a})_\omega$ als beweisbare Aussage gehören, genau dann, wenn $\bar{A}(\mathfrak{k})$ in S_{IV_ω} gilt. (Hier geht, wie in §5, $\bar{A}(\mathfrak{k})$ aus $A(\mathfrak{k})$ durch Überstreichung hervor.)

Auf Grund von 6.10 ist unsere Festsetzung mit den Axiomen aus H im Einklang.

$\mathrm{IV}(\mathfrak{a})_\omega$ ist widerspruchsfrei. Andernfalls wären zwei Aussagen $A(\mathfrak{a})$ und $\neg A(\mathfrak{a})$ beweisbar, d.h. nach unserer Zuordnung $\bar{A}(\mathfrak{k})$ und $\overline{\neg A}(\mathfrak{k})$, also $\bar{A}(\mathfrak{k})$ und $\neg \bar{A}(\mathfrak{k})$ in S_{IV_ω} gültig, im Widerspruch zu 6.2.

$\mathrm{IV}(\mathfrak{a})_\omega$ ist vollständig. Von dem eben betrachteten Aussagenpaar muß nach 6.2 eine in S_{IV_ω} gelten, also die zugeordnete Aussage in $\mathrm{IV}(\mathfrak{a})_\omega$.

H_{IV_ω} ist isomorph zu S_{IV_ω}. Man ordne den konstanten $\mathfrak{a}$-freien Termen T aus H_{IV_ω} die Indices von $\mu_x(c = c \wedge x = T)$ zu, und den Termen $T(\mathfrak{a})$ die Terme $\overline{T}(\mathfrak{k})$. Diese eineindeutige Abbildung erschöpft S_{IV_ω}. Dazu genügt es zu zeigen, daß sich jedes $i \in S_{\mathrm{IV}_\omega}$ in der Form $\bar{\mu}_x \bar{C}(x, \mathfrak{k})$ darstellen läßt. Sei i Index einer Funktion $C(x, c)$ und $\mathfrak{c}$ die Gödel-Nummer von $C(a, c)$, dann gilt

$$i \sim \bar{\mu}_x \bar{C}(x, \mathfrak{k}),$$

d.h. $\forall x \wedge y \big(y \geqq x \to \mathfrak{v}(i, \mathfrak{d}(y)) = \mathfrak{v}(\mathfrak{y}(\mathfrak{c}, \mathfrak{k}), \mathfrak{d}(y))\big)$. Nach 5.1 und der Bedeutung der Funktion $\mathfrak{v}(a, b)$ ist aber $\mathfrak{v}(i, c) = \mu_x C(x, c)$, $\mathfrak{v}\big(\mathfrak{y}(\mathfrak{c}, \mathfrak{k}), c\big) = \mu_x C\big(x, \mathfrak{v}(\mathfrak{k}, c)\big)$ und $\mathfrak{v}(\mathfrak{k}, c) = c$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Die Isomorphie ist damit unter Benutzung unserer Definition von $\mathrm{IV}(\mathfrak{a})_\omega$ gewährleistet.

7.7 Zu jedem Modell H_{IV_ω} gibt es ein isomorphes Modell S_{IV_ω}.

Beweis. (Hier folgen wir in den Hauptlinien dem Beweis des entsprechenden Satzes von ROBINSON.) Zunächst sieht man sofort, daß sich jeder konstante Term aus H_{IV_ω} in der Form $\mu_x A(x, \alpha)$ darstellen läßt, auch α-freie Terme T, etwa durch $\mu_x(\alpha = \alpha \wedge x = T)$. Mit Hilfe der Indices der Elemente von $\mathfrak{f}$ läßt sich also jedes Element aus H_{IV_ω} in der Form $f_i(\alpha)$ darstellen, wobei $f_i(c)$ aus $\mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$ ist.

Wir erklären nun eine Funktion $d(c)$, die für die Aufstellung des gesuchten Modells S_{IV_ω} dieselbe Rolle spielt, wie die gleichbezeichnete Funktion in §4. Mit Hilfe einer Funktion $r(a, b)$, — jetzt bezogen auf das System $\mathrm{IV}(\alpha)_\omega$ — führen wir wie in 4.1 die Abkürzung $q'(a, b)$ ein; es möge ferner $\bigwedge_{i=0}^{n} A_i$ die Konjunktion $A_0 \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ bezeichnen. Wir definieren nun:

$$7.8 \quad \begin{cases} d(0) = \mu_x\big(q'(0, \alpha) = 0 \to q'(0, x) = 0 \,.\wedge.\, q'(0, \alpha) = 1 \to q'(0, x) = 1\big), \\ d(Sn) = \mu_x\Big(d(n) < x \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} q'(i, x) = q'\big(i, d(i)\big) \wedge \\ \qquad \wedge \big(q'(Sn, \alpha) = 0 \to q'(Sn, x) = 0\big) \wedge \\ \qquad \wedge \big(q'(Sn, \alpha) = 1 \to q'(Sn, x) = 1\big)\Big). \end{cases}$$

Es ist nun vor allem zu zeigen, daß $d(c)$ streng monoton wächst. Dies ergibt sich schrittweise:

1) Von den Aussagen $q'(n, \alpha) = 0$, $q'(n, \alpha) = 1$ gilt genau eine für jedes n; dies folgt aus der Vollständigkeit von $\mathrm{IV}(\alpha)_\omega$.

2) Aus $q'(n, \alpha) = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ folgt $\vee y \left(q'(n, y) = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right)$.

3) Die in 2) erhaltene Existenzaussage ist eine solche aus IV_ω d.h. es gibt einen Term T aus $\mathfrak{g}_{\mathrm{IV}}$, der $< \alpha$ ist, und der Bedingung genügt; für $n = 0$ ist $d(0)$ der kleinste dieser Art.

4) Aus 2) und 3) erhält man für die Konjunktionen, die in der Definition von $d(Sn)$ vorkommen, Sätze ähnlicher Art wie 3), und unsere Behauptung ergibt sich dann durch Induktion nach n.

Es läßt sich daraufhin wie in §4 ein zu 4.9 analoges Lemma beweisen:

$$7.9 \qquad q'\big(n, d(c)\big) = q'\big(n, d(n)\big),$$

wobei wie in 4.9 die rechte Seite dieser Gleichung von c unabhängig ist. Nun können die Definitionen 5.3 wörtlich übernommen werden. Damit ist das Modell S_{IV_ω} festgelegt. Ordnen wir nun jedem Element $i \in S_{\mathrm{IV}_\omega}$ das Element $f_i(\alpha) \in H_{\mathrm{IV}_\omega}$ zu. Diese Abbildung ist eineindeutig und H_{IV_ω} wird tatsächlich ausgeschöpft, wie man aus der Anfangsbemerkung des Beweises ersieht. Ist speziell $\mathfrak{k}$ der Index von $\mu_x(c = x)$ dann ist $f_{\mathfrak{k}}(\alpha) = \alpha$, d.h. $\mathfrak{k}$ und α sind einander zugeordnet. Man sieht auch leicht, daß den α-freien konstanten Termen genau die Indices der (zugehörigen) konstanten Funktionen aus $\mathfrak{f}_{\mathrm{IV}}$

zugeordnet werden. Sei nun $A(\alpha)$ eine Aussage, die in H_{IV_ω} gilt, $A'(a, \alpha)$ z.B. die symbolisch aufgelöste Form von $A(\alpha)$; nach unserer Darstellung der Elemente von H_{IV_ω} durch die Funktionswerte $f_i(\alpha)$ geht $A'(a, \alpha)$ in $A'\big(f_a(\alpha), f_{\mathfrak{k}}(\alpha)\big)$ über, und wir haben $\bar{A}'(a, \mathfrak{k})$, — woraus $\bar{A}(\mathfrak{k})$ folgt — zu zeigen. Dazu bringen wir $A'\big(f_a(\alpha), f_{\mathfrak{k}}(\alpha)\big)$ auf eine disjunktive Normalform, und es sei $A'_j\big(f_a(\alpha), f_{\mathfrak{k}}(\alpha)\big)$ eins der Disjunktionsglieder, das ja seinerseits aus einer Konjunktion von Gleichungen und Ungleichungen besteht. Nach der Konstruktion in 7.8 und 7.9 gilt dann für $c \geqq$ einem gewissen n: $A'_j\big(f_a(d(c)), f_{\mathfrak{k}}(d(c))\big)$, d.h. in unserer Ausdrucksweise von §5 $A'_j\big(\nu(a, d(c)), \nu(\mathfrak{k}, d(c))\big)$ also mit 5.9 $\bar{A}'_j(a, \mathfrak{k})$; der Rückgang zu $\bar{A}'(a, \mathfrak{k})$ erfolgt durch Alternativschlüsse, vgl. den Beweis von 5.9 Nr. 2.

7.10 Für das Folgende beschränken wir unsere Betrachtungen auf Henkin-Modelle. *Zwei Systeme* IV^0_ω *und* IV^1_ω *sollen verschieden heißen, wenn es ein Aussagenpaar* $X, \neg X$ *gibt, so daß in* IV^0_ω X, *und in* IV^1_ω $\neg X$ *gilt.* Die zugehörigen Termmodelle $M_{\mathrm{IV}^0_\omega}$, $M_{\mathrm{IV}^1_\omega}$ heißen dann (nach der Ausdrucksweise von G. KEMENY [6]) *wesentlich verschieden.* Nach 6.12 sind die Modelle S_{IV_ω}, also nach 7.6 und 7.7 auch die Modelle H_{IV_ω} arithmetische Erweiterungen (vgl. [21]) von M_{IV_ω}, daher sind H_{IV_ω} und M_{IV_ω} nicht wesentlich verschieden. Seien die Systeme IV^0_ω und IV^1_ω verschieden, dann folgt also, daß jedes Modell $H_{\mathrm{IV}^0_\omega}$ von allen Modellen $H_{\mathrm{IV}^1_\omega}$ wesentlich verschieden ist. Es scheint somit, daß wir durch die Betrachtung der Modelle H_{IV_ω} kaum Einsicht in die feinere Struktur der Modelle M_{IV_ω} erhalten, sondern es dürfte wohl erforderlich sein, zur Untersuchung der Modelle M_{IV_ω} auf den besonderen Charakter der sie bestimmenden Aussagen, die im Laufe der Vervollständigung von IV zu IV_ω als Axiome aufgenommen werden, näher einzugehen.

7.11 Fügt man zu dem System IV_ω eine Axiomenmenge H^z hinzu, in der das Größersein nur aller Ziffern $0, S0, SS0, \ldots$ von einem (neuen) Individuensymbol α gefordert wird, dann kann z.B. α widerspruchsfrei mit $\mu_x B(x, ,,0 = S0")$ identifiziert werden, und so auch mit anderen μ-Termen, die unentscheidbaren Aussagen des Systems IV korrespondieren. (Nach einer solchen Identifizierung wird natürlich α explizit definierbar, also überflüssig.)

G. KEMENY [6], p. 164 hat die Frage offen gelassen, ob Modelle von $\mathrm{IV} \cup H^z$ von dem Standardmodell $M_{\widetilde{\mathrm{IV}}_\omega}$ wesentlich verschieden sind. Diese Frage wird beantwortet durch

7.14 *Wenn bei einer Vervollständigung von* $\mathrm{IV} \cup H^z$ α *mit einem* α*-freien* μ*-Term identifiziert wird, — dieser* μ*-Term ist dann sicher nicht gleich einer Ziffer —, dann ist das entstehende Termmodell von dem Standardmodell* $M_{\widetilde{\mathrm{IV}}_\omega}$ *wesentlich verschieden; andernfalls entsteht nach* 7.10 *ein Modell* H_{IV_ω}, *das von jedem Modell* $H_{\widetilde{\mathrm{IV}}_\omega}$ (*hinsichtlich der Sprache* IV) *genau dann wesentlich verschieden ist, wenn* IV_ω *und* $\widetilde{\mathrm{IV}}_\omega$ *verschieden sind.*

Literatur

[1] GÖDEL, K.: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. Monatshefte Math. Phys. **37**, 349–360 (1930).

[2] — Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte Math. Phys. **38**, 173–198 (1931).

[3] HENKIN, L.: The Completeness of the first order functional calculus. J. Symb. Log. **14**, 159–166 (1949).
[4] — Completeness in the theory of types. J. Symb. Log. **15**, 81–91 (1950).
[5] HILBERT, D., u. P. BERNAYS: Grundlagen der Mathematik I und II. Berlin: Springer Bd. I (1934), Bd. II (1939).
[6] KEMENY, G.: Undecidable problems of elementary number theory. Math. Ann. **135**, 160–169 (1958).
[7] KREISEL, G.: Applications of mathematical logic to various branches of mathematics. Applications scientifiques de la Logique mathématique, 37–49. Paris: Gauthier-Villars 1954.
[8] MALCEV, A.: Untersuchungen aus dem Gebiet der mathematischen Logik. (Mat. Sbornik) Recueil mathématique, n. s. **1**, 323–336 (1936).
[9] MOSTOWSKI, A.: Sentences undecidable in formalized arithmetic. Amsterdam: North Holland Publ. Comp. 1952.
[10] — Quelques observations sur l'usage des méthodes non finitistes dans la méta-mathématique. Les raisonnement en mathématique et en sciences expérimentales, 19–29. Paris: Editions du CNRS 1958.
[11] MÜLLER, G. H.: Über die unendliche Induktion. Infinitistic methods, 75–95. Warsaw: Pergamon-Press 1961.
[12] MYHILL, J.: Arithmetic with creative definitions by induction. J. Symb. Log. **18**, 115–118 (1953).
[13] ROBINSON, A.: Modeltheory and non-standard arithmetic. Infinitistic methods, 265–302. Warsaw: Pergamon-Press 1961.
[14] SKOLEM, TH.: Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems. Norsk Matematik Forenings Skrifter, Ser. II Nr. 1–12, 73–82 (1933).
[15] — Über die Nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vielen Aussagen mit ausschließlich Zahlvariablen. Fund. Math. **23**, 150–161 (1934).
[16] — Über die Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierter Relationen auf „arithmetische". Acta Litt. scient. Szeged **8**, 73–88 (1937).
[17] — Some remarks on the comparison between recursive functions. Kon. Norske Videnskabers Selskab Forh. **17**, 126–128 (1944).
[18] — Peano's axioms and models of arithmetic. Mathematical Interpretation of Formal Systems, 1–14. Amsterdam: North Holland Publ. Comp. 1955.
[19] TARSKI, A.: Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften I. Monatshefte Math. Phys. **37**, vgl. Satz I.56 auf S. 394, (1930).
[20] — (in collaboration with A. MOSTOWSKI and R. M. ROBINSON): Undecidable Theories. Amsterdam: North Holland Publ. Comp. 1953.
[21] —, and R. L. VAUGHT: Arithmetical extensions of relational systems. Comp. Math. **13**, 81–102 (1957).
[22] WANG, H.: Certain predicates defined by induction schemata. J. Symb. Log. **18**, 49–59 (1953).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 2. Juni 1961)

JEHNE, W.
Math. Zeitschr. 77, 439–452 (1961)

Zur Verschärfung des F. K. Schmidtschen Einheitensatzes

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

WOLFRAM JEHNE

In einer früheren Arbeit [*12*], in der erstmalig der Existenzsatz der lokalen Klassenkörpertheorie bewiesen wurde, hat F. K. SCHMIDT einen Satz über globale Einheiten endlicher algebraischer Zahlkörper aufgestellt, der in der neueren Entwicklung der globalen Klassenkörpertheorie eine wichtige Rolle spielt. Dieser Satz stellt zu jeder natürlichen Zahl $n > 0$ die Existenz eines ganzrationalen Moduls m (sogar unendlich vieler zu einer gegebenen natürlichen Zahl primer Moduln) fest, so daß jede Einheit $\equiv 1 \bmod m$ eine n-te Einheitenpotenz ist [1]). Oder anders ausgedrückt: Auf der Einheitengruppe E stimmen die durch die Systeme $\{\mathsf{E}^n \mid n > 0\}$ und $\{\mathsf{E}(m) \mid m > 0\}$ der Gruppen E^n aller n-ten Potenzen und der Gruppen $\mathsf{E}(m)$ aller Einheiten $\equiv 1 \bmod m$ definierten Topologien überein. Dieser Sachverhalt wurde von CHEVALLEY [*2*] wiederentdeckt und auf endlich-erzeugte Untergruppen der Multiplikationsgruppe verallgemeinert. Seine Hauptanwendung besteht in der Strukturbestimmung (WEIL [*14*], Abschnitt III) bzw. expliziten Bestimmung (ARTIN [*1*]) der Zusammenhangskomponente der Eins der Idelklassengruppe.

Die Frage nach der genauen Anzahlbestimmung der unabhängigen Γ-Erweiterungen eines endlich-algebraischen Zahlkörpers im Sinn IWASAWAS [*8*] (das sind unendliche Erweiterungen mit zum Ring Γ_p der ganzen p-adischen Zahlen isomorpher Galoisgruppe) hat mich vor einiger Zeit auf das Problem der folgenden Verschärfung des F. K. Schmidtschen Einheitensatzes geführt: Ist bei gegebener Primzahlpotenz $n = p^\nu$ als Exponenten auch der Modul m als Primzahlpotenz p^μ wählbar? Um zu einer für die Anwendungen geeigneteren Fassung zu gelangen, denke man sich E in das Produkt der $\mathfrak{p}$-adischen Hüllen des Zahlkörpers für alle Primteiler $\mathfrak{p}$ der Primzahl p eingebettet und dann auf das Produkt $\mathsf{H}_p = \prod_{\mathfrak{p}\mid p} \mathsf{H}_\mathfrak{p}$ der $\mathfrak{p}$-adischen Einseinheitengruppen $\mathsf{H}_\mathfrak{p}$ projiziert. Dann läuft die Verschärfung auf die Frage hinaus, ob die Projektionen eines Grundeinheitensystems innerhalb H_p auch bezüglich ganz-p-adischer Zahlen als Exponenten unabhängig bleiben.

Dieses Einheitenproblem erweist sich selbst für spezielle Zahlkörper als schwer zugänglich. Es soll in dieser Arbeit für p^ν-te Kreiskörper behandelt

[1]) Der Satz ist in [*12*] auf S. 164 in (E_m) unter der Voraussetzung formuliert, daß der Körper die n-ten Einheitswurzeln enthält, und wird dann in den weiteren Ausführungen, insbesondere Hilfssatz 2, von dieser Einschränkung befreit.

werden, einer Körperklasse, die in neuerer Zeit durch die Arbeiten IWASAWAS über Klassenzahlen von Γ-Erweiterungen wiederum in den Vordergrund getreten ist. In seiner Arbeit [9] über Kreiskörper ist IWASAWA ebenfalls auf dieses Problem geführt worden. Für eine andere Körperklasse, nämlich reelle absolut-abelsche Zahlkörper, in denen p unverzweigt ist und nicht im Grad aufgeht, sind Unabhängigkeitsfragen ähnlicher Art mit anderen Methoden von LEOPOLDT [11] untersucht worden.

In dieser Arbeit wird eine Primzahl p *stabil* genannt, wenn in allen p^ν-ten Kreiskörpern P_ν der verschärfte F. K. Schmidtsche Einheitensatz bezüglich p gilt. Es ist nicht schwer zu sehen (§1), daß alle regulären Primzahlen p stabil sind; für den p-ten Kreiskörper P_1 ist diese Unabhängigkeitsaussage bereits in einem klassischen Einheitensatz von KUMMER-HILBERT enthalten. Für irreguläre Primzahlen wird man den Stabilitätsbegriff zweckmäßigerweise noch gemäß der Iwasawaschen direkten Zerlegung der Einseinheitengruppe H_ν für p der P_ν in j-te Komponenten $\mathsf{H}_\nu^{(j)}$ $(j=0, \ldots, p-2)$ verfeinern: p heißt *k-stabil*, wenn der in $\mathsf{H}_\nu^{(2k)}$ fallende Teil der von den Einheitenprojektionen in H_ν bezüglich Γ_p erzeugten Untergruppe maximalen Γ_p-Rang hat. k-Stabilität für alle $k=0, \ldots, (p-3)/2$ ist dann gleichbedeutend mit Stabilität schlechthin. In §1 leiten wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für k-Stabilität her (Satz 1), mit dessen Hilfe in §2 dann die k-Stabilität aller Primzahlen p für $k=0$ und 1 bewiesen wird (Satz 2). Die 0-Stabilität besagt dabei nichts anderes als die Gültigkeit des verschärften F. K. Schmidtschen Einheitensatzes für die Teilkörper $\bar{\mathsf{P}}_\nu$ vom Absolutgrad $p^{\nu-1}$ der Kreiskörper P_ν $(\nu \geqq 2,\ p \neq 2)$.

Die Unabhängigkeitsbeweise bezüglich Γ_p werden für die explizit bekannte Kreiseinheitengruppe von P_ν geführt, deren Index in der vollen Einheitengruppe bekanntlich im wesentlichen die Klassenzahl des maximal-reellen Teilkörpers, also endlich ist. In Ausdehnung eines Resultates von HASSE [6] für $p=2$ auf die Fälle $p \neq 2$ wird schließlich in §3 gezeigt, daß die Kreiseinheitengruppe von $\bar{\mathsf{P}}_\nu$ zusammen mit $1+p$ die volle lokale Einseinheitengruppe $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ von $\bar{\mathsf{P}}_\nu$ erzeugt. Als Nebenergebnis wird in Beantwortung einer in [6] aufgeworfenen Frage die Struktur von $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ als Operatorgruppe bezüglich der Galoisgruppe aufgeklärt, was auf anderem Weg schon von IWASAWA in [9] geleistet wurde.

§1. Ein Kriterium für die k-Stabilität

1. Wir stellen zunächst einige Bezeichnungen zusammen — im wesentlichen nach HASSE [4] — und gehen kurz auf die Iwasawasche Zerlegung der Einseinheitengruppen nach [9] ein. Für eine Primzahl $p \neq 2$ bezeichnen wir mit

$\mathsf{P}_\nu = \mathsf{P}(\zeta_\nu)$ den Körper der p^ν-ten Einheitswurzeln über dem Körper $\mathsf{P} = \mathsf{P}_0$ der rationalen Zahlen,

ζ_ν eine primitive p^ν-te Einheitswurzel mit $\zeta_{\nu+1}^p = \zeta_\nu$ für alle ν,

P_ν^+ den maximalreellen Teilkörper von P_ν,

$\Lambda_\nu = \mathsf{P}_\nu \mathfrak{p}_\nu$, Λ_ν^+ die vollständige Hülle von P_ν bzw. P_ν^+ bei dem Primdivisor $\mathfrak{p}_\nu | \mathfrak{p}$ von P_ν bzw. $\mathfrak{p}_\nu^+ | \mathfrak{p}$ von P_ν^+.

Die Erzeugenden der Galoisgruppen $\mathfrak{h}_\mu^{(\nu)} = \mathfrak{g}(\mathsf{P}_\nu | \mathsf{P}_\mu)$ für $1 \leqq \mu < \nu$ und $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}(\mathsf{P}_1 | \mathsf{P})$ werden mit $s_\mu = s_\mu^{(\nu)}$, u bezeichnet und so normiert, daß

$$\zeta_\nu^{s_1} = \zeta_\nu^{1+p}, \quad \zeta_\nu^u = \zeta_\nu^w \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \quad \text{und} \quad s_\mu = s_1^{p^{\mu-1}}$$

gilt mit einer primitiven $(p-1)$-ten Einheitswurzel w. Auf Grund der direkten Zerlegung $\mathfrak{g}(\mathsf{P}_\nu | \mathsf{P}) = \mathfrak{h}_1^{(\nu)} \times \mathfrak{u}$ bestehen für die Körper analoge Zerlegungen über P: $\mathsf{P}_\nu = \bar{\mathsf{P}}_\nu \times \mathsf{P}_1$ mit den Fixkörpern $\bar{\mathsf{P}}_\nu$ der Gruppe $\mathfrak{u}$. Der Gruppenring $\Gamma_p[\mathfrak{u}] = \sum_{j=0}^{p-2} \Gamma_p u^j$ von $\mathfrak{u}$ über dem Ring Γ_p der ganzen p-adischen Zahlen zerfällt voll: $\Gamma_p[\mathfrak{u}] = \oplus \sum_{i=0}^{p-2} \Gamma_p e_i$ mit Idempotenten $e_i = \frac{1}{p-1} \sum_{j=0}^{p-2} w^{-ij} u^j$, und zieht daher für die Gruppe H_ν der lokalen Einseinheiten von Λ_ν die direkte Zerlegung

$$\mathsf{H}_\nu = \prod_{i=0}^{p-2} \mathsf{H}_\nu^{e_i}$$

nach sich. Wegen $e_i u^{(p-1)/2} = w^{i(p-1)/2} e_i = (-1)^i e_i$ ist die Einseinheitengruppe H_ν^+ von Λ_ν^+ gegeben durch

$$\mathsf{H}_\nu^+ = \prod_{k=0}^{(p-3)/2} \mathsf{H}_\nu^{e_{2k}} = \mathsf{H}_\nu^{e^+} \quad \text{mit} \quad e^+ = \sum e_{2k}, \qquad e^- = \sum e_{2k+1},$$

während die Einseinheitengruppe $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ der $\mathfrak{p}$-adischen Hülle $\bar{\Lambda}_\nu$ von $\bar{\mathsf{P}}_\nu$ offenbar mit $\mathsf{H}_\nu^{e_0}$ übereinstimmt, da e_0 im wesentlichen der Normoperator $\bar{N} = N_{\Lambda_\nu | \bar{\Lambda}_\nu}$ und $(\Lambda_\nu : \bar{\Lambda}_\nu) = p - 1$ prim zu p ist.

Die Komponenten $\mathsf{H}_\nu^{e_i}$ haben nun sämtlich gleichen Γ_p-Rang: $\Gamma_p\text{-rg}(\mathsf{H}_\nu^{e_i}) = p^{\nu-1}$ $(i = 0, \ldots, p-2)$. Es genügt, dies für eine geeignete Untergruppe A_ν von endlichem Index in H_ν zu zeigen. Eine solche kann nach bekannten Methoden bezüglich $\mathfrak{u}$ regulär, d.h. von der Form $A = \operatorname{dir} \prod_{j=0}^{p-2} B_\nu^{u^j}$ gewählt werden. Da $\Gamma_p\text{-rg}(A_\nu) = \varphi(p^\nu)$ ist, hat die Γ_p-Gruppe B_ν den Γ_p-Rang $p^{\nu-1}$. Nun ist aber $A_\nu^{e_i} = \prod_j B_\nu^{w^{ij} e_i} = B_\nu^{e_i}$, also $\Gamma_p\text{-rg}(A_\nu^{e_i}) \leqq p^{\nu-1}$. Wegen $\varphi(p^\nu) = \Sigma\, \Gamma_p\text{-rg}(A_\nu^{e_i})$ folgt $\Gamma_p\text{-rg}(A_\nu^{e_i}) = p^{\nu-1}$, also die Behauptung.

Von besonderem Interesse für das folgende ist die Untergruppe N_ν von H_ν aller Zahlen γ mit Absolutnorm $N_{\Lambda_\nu | \Lambda_0} \gamma = 1$, und die entsprechenden Gruppen N_ν^+, $\bar{\mathsf{N}}_\nu$ von Λ_ν^+, $\bar{\Lambda}_\nu$. Da schon $\bar{N}\left(\prod_1^{p-2} \mathsf{H}_\nu^{e_i}\right) = 1$ ist, gilt

$$\mathsf{N}_\nu = \bar{\mathsf{N}}_\nu \times \prod_1^{p-2} \mathsf{H}_\nu^{e_i}, \quad \mathsf{N}_\nu^+ = \bar{\mathsf{N}}_\nu \times \prod_1^{(p-3)/2} \mathsf{H}_\nu^{e_{2k}}. \tag{1.1}$$

Man verifiziert leicht die Zerlegungen

$$\bar{\mathsf{H}}_\nu = \mathsf{H}_0 \times \bar{\mathsf{N}}_\nu, \quad \mathsf{H}_\nu^+ = \mathsf{H}_0 \times \mathsf{N}_\nu^+, \tag{1.1'}$$

wo $\mathsf{H}_0=[1+\mathfrak{p}]$ die von $1+\mathfrak{p}$ erzeugte Γ_p-zyklische Gruppe ist. Denn einerseits ist nach der lokalen Klassenkörpertheorie für die vollverzweigte Erweiterung $\Lambda_\nu|\Lambda_0$: $|H^0(\mathfrak{h}_1^{(\nu)}, \overline{\mathsf{H}}_\nu)| = (\mathsf{H}_0: N_1^\nu \overline{\mathsf{H}}_\nu) = p^{\nu-1}$, andererseits ist $\mathsf{H}_0\overline{\mathsf{N}}_\nu = \mathsf{H}_0 \times \overline{\mathsf{N}}_\nu$ direkt. Somit enthalten die Gruppen $\overline{\mathsf{H}}_\nu$ und $\mathsf{H}_0\times\overline{\mathsf{N}}_\nu$ den Kern $\overline{\mathsf{N}}_\nu$ und haben das gleiche Bild $N_1^\nu(\overline{\mathsf{H}}_\nu) = N_1^\nu(\mathsf{H}_0\times\overline{\mathsf{N}}_\nu) = \mathsf{H}_0^{p^{\nu-1}}$, stimmen also überein.

Den Beziehungen (1.1′) entnimmt man leicht

$$\mathsf{N}_\mu = N_\mu^\nu \mathsf{N}_\nu \qquad (1 \leqq \mu < \nu). \tag{1.2}$$

Denn nach der lokalen Klassenkörpertheorie hat wieder $H^0(\mathfrak{h}_\mu^{(\nu)}, \mathsf{H}_\nu) = H^0(\mathfrak{h}_\mu^{(\nu)}, \mathsf{H}_0) \times H^0(\mathfrak{h}_\mu^{(\nu)}, \mathsf{N}_\nu)$ die Ordnung $p^{\nu-\mu}$; da schon $|H^0(\mathfrak{h}_\mu^{(\nu)}, \mathsf{H}_0)| = p^{\nu-\mu}$ gilt, ist in der Tat $H^0(\mathfrak{h}_\mu^{(\nu)}, \mathsf{N}_\nu) = 1$.

Abschließend verabreden wir, den Index bezüglich $\mathfrak{p}_\nu$ einer genauen ϱ-ten Einseinheit, d.h. einer Einheit γ_ϱ aus H_ν mit $\gamma_\varrho \equiv 1\,(\mathfrak{p}_\nu^\varrho)$ doch $\gamma_\varrho \not\equiv 1\,(\mathfrak{p}_\nu^{\varrho+1})$, mit $\varrho = \operatorname{ind}\gamma_\varrho$ zu bezeichnen, und die entsprechenden Indizes in H_ν^+, $\overline{\mathsf{H}}_\nu$ mit ind^+ bzw. $\overline{\operatorname{ind}}$. Der Index ν wird häufig fortgelassen, wenn kein Mißverständnis entstehen kann.

2. Da die Einseinheitengruppe H_ν in der lokalen Multiplikationsgruppe $\Lambda_\nu^\times$ direkter Faktor ist, kann für jede Untergruppe A der globalen Multiplikationsgruppe $\mathsf{P}_\nu^\times < \Lambda_\nu^\times$ die Projektion $\mathrm{pr}_{\mathsf{H}_\nu} A$ auf den Faktor H_ν gebildet werden; mit $\tilde{A}$ wird dann das Γ_p-Erzeugnis von $\mathrm{pr}_{\mathsf{H}_\nu} A$ in H_ν bezeichnet. Nun haben die Einheiten aus P_ν bzw. P_ν^+ die Absolutnorm ± 1, ihre Projektionen in H_ν also sogar die Absolutnorm 1. Es gilt somit für die Einheitengruppen E_ν, E_ν^+ von P_ν bzw. P_ν^+: $\widetilde{\mathsf{E}}_\nu \leqq \mathsf{N}_\nu$, $\widetilde{\mathsf{E}_\nu^+} \leqq \mathsf{N}_\nu^+$.

In der Einleitung wurde die Ausgangsfrage der Verschärfung des F. K. Schmidtschen Einheitensatzes in einer anderen Form ausgesprochen, wie sie sich in der Klassenkörpertheorie und im Zusammenhang mit Strukturfragen der p-Klassengruppe ergibt. Wir zeigen dazu: *Die durch die Umgebungsbasen* $\mathsf{E}_\nu(\mathfrak{p}^\varrho) = \{\varepsilon \in \mathsf{E}_\nu \mid \varepsilon \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^\varrho\}$ *und* $\mathsf{E}_\nu^{p^\mu}$ *auf* E_ν *definierten Topologien stimmen genau dann überein, wenn* $\widetilde{\mathsf{E}}_\nu$ *maximalen* Γ_p*-Rang hat, also*

$$\Gamma_p\text{-rg}\,\widetilde{\mathsf{E}}_\nu = \tfrac{1}{2}\varphi(p^\nu) - 1$$

gilt. Auf Grund des bekannten Zusammenhangs $\mathsf{E}_\nu = \mathsf{E}_\nu^+ \times (\zeta_\nu)$ (HASSE [5], III, §25) ist diese Unabhängigkeitsaussage auch mit $\Gamma_p\text{-rg}\,\widetilde{\mathsf{E}_\nu^+} = \tfrac{1}{2}\varphi(p^\nu) - 1$, oder also mit der Endlichkeit von $(\mathsf{N}_\nu^+ : \widetilde{\mathsf{E}_\nu^+})$ äquivalent. Ist dies der Fall für alle $\nu \geqq 1$, so soll die Primzahl p *stabil* heißen.

Zum Beweis sei F eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe vom Γ-Rang m. Durch eine Umgebungsbasis $\{U\}$ der 0 von Untergruppen U von p-Potenzindex mit Durchschnitt $\{0\}$ wird in F eine präkompakte Topologie definiert, bei der die vollständige Hülle $\widetilde{F}$ mit dem Γ_p-Erzeugnis von F in $\widetilde{F}$

übereinstimmt. Insbesondere kann die freie Γ_p-Gruppe $F^* = \Gamma_p \underset{\Gamma}{\otimes} F$ vom Γ_p-Rang m mit der vollständigen Hülle von F bei der durch $\{p^\mu F\}$ definierten p-Topologie identifiziert werden. Faßt man F^* und $\widetilde{F}$ als projektive Limites der Faktorgruppen $F/p^\mu F$ bzw. F/U auf, so erhält man die natürliche exakte Folge

$$0 \to B \to F^* \to \widetilde{F} \to 0 \tag{1.3}$$

von stetigen Homomorphismen; φ ist sogar eine offene Abbildung. Setzt man $\overset{\circ}{U} = p^{n v} F$ mit dem Exponenten $p^{n v}$ von F/U, so ist Kern φ isomorph mit dem projektiven Limes $B = \varprojlim (F_U, \tau_V^U)$ der Gruppen $F_U = U/\overset{\circ}{U}$ bezüglich der natürlichen Homomorphismen $\tau_V^U \colon F_V \to F_U$ für $V \subset U$. Da die F_U endlich sind, existiert zu jedem U ein $U_1 \subset U$ mit $\tau_U B = \tau_{U_1}^U F_{U_1}$; hierbei sind $\tau_U \colon B \to F_U$ die durch die τ_V^U bestimmten Homomorphismen. Einerseits liegt nun $B = 0$ genau dann vor, wenn $\tau_U B = 0$ ist für jedes U, also nach dem Gesagten $U_1 \subseteqq \overset{\circ}{U}$ mit geeignetem U_1 gilt; dies ist die Äquivalenz beider Topologien. Andererseits ist genau dann $B = 0$, wenn F^* und $\widetilde{F}$ gleichen Γ_p-Rang m haben. Dieser Sachverhalt ergibt die Behauptung, da die auf $\mathrm{pr}_{\mathsf{H}_\nu} \mathsf{E}_\nu^+$ in H_ν induzierte Topologie gerade durch die Gruppen $\{\mathsf{E}_\nu(p^\varrho)\}$ definiert wird.

Bekanntlich heißt eine Primzahl p regulär, wenn sie nicht in der Klassenzahl h_1 des p-ten Kreiskörpers aufgeht. Man sieht leicht, daß alle regulären Primzahlen stabil sind. Für reguläre p haben nämlich nach dem Furtwänglerschen Satz[2]) alle P_ν die p-Klassenzahl $h_{\nu p} = 1$. Wäre nun die reguläre Primzahl p nicht stabil, so bestünde eine nichttriviale Relation $\prod_j \varepsilon'^{\alpha_j}_{\nu j} = 1$ mit ganzen p-adischen Exponenten α_j zwischen den Projektionen $\varepsilon'_{\nu j} = \mathrm{pr}\, \varepsilon_{\nu j}$ auf H_ν eines Grundeinheitensystems $\varepsilon_{\nu j} \left(j = 1, \ldots, \tfrac{1}{2}\varphi(p^\nu) - 1\right)$ von P_ν^+. Hierbei kann etwa $\alpha_1 \not\equiv 0 \bmod p$ angenommen werden. Setzt man $\alpha_j \equiv a_j \bmod p$ mit ganzrationalen a_j, so ist die Einheit $\varepsilon = \prod \varepsilon_{\nu j}^{a_j}$ keine p-te Potenz in P_ν, dagegen nach Annahme eine lokale p-te Potenz in Λ_ν. Folglich ist $\mathsf{P}_\nu(\sqrt[p]{\varepsilon})$ eine nichttriviale, global unverzweigte Erweiterung von P_ν, im Widerspruch zu $h_{\nu p} = 1$. Für den p-ten Kreiskörper P_1 regulärer Primzahlen ist eine Γ_p-rg $\widetilde{\mathsf{E}}_1^+ = \frac{1}{2}(p-1) - 1$ implizierende Aussage rechnerisch schon von Kummer-Hilbert (Hilbert, Zahlbericht §138, S. 281) festgestellt worden, deren Analogon für die Körper $\bar{\mathsf{P}}_\nu$ für alle Primzahlen in §3 dieser Arbeit hergeleitet wird.

Solange für keine hinreichend umfassende Klasse irregulärer Primzahlen die Stabilität feststeht, empfiehlt es sich, den Stabilitätsbegriff noch gemäß der Komponentenzerlegung (1.1) von N_ν^+ zu verfeinern: p heiße *k-stabil*, wenn für alle $\nu \geqq 1$

$$\Gamma_p\text{-rg}\, \widetilde{\mathsf{E}}_\nu^{+\,\varepsilon_{2k}} = \begin{cases} p^{\nu-1} - 1 & \text{im Fall } k = 0 \\ p^{\nu-1} & \text{im Fall } 1 \leqq k \leqq (p-3)/2 \end{cases} \tag{1.4}$$

gilt, oder damit gleichbedeutend $(\mathsf{N}_\nu^{+\,\varepsilon_{2k}} : \widetilde{\mathsf{E}}_\nu^{+\,\varepsilon_{2k}})$ endlich ist.

[2]) Siehe etwa Iwasawa [8], p. 225 oder Serre [13], Théorème 1.

Zur Untersuchung der Gültigkeit von (1.4) bietet sich die explizit bekannte Kreiseinheitengruppe $F_\nu^+ = (\pi_\nu^{+\,t-1} \mid t \in \mathfrak{g}(\mathsf{P}_\nu^+ \mid \mathsf{P}))$ an, wobei das Primelement $\pi_\nu^+ = N^+\pi_\nu$ für $\mathfrak{p}_\nu^+$ aus dem normierten Primelement $\pi_\nu = 1-\zeta_\nu$ für $\mathfrak{p}_\nu$ durch Normbildung bezüglich P_ν^+ entsteht. Sie hat in E_ν^+ endlichen Index $(\mathsf{E}_\nu^+ : F_\nu^+)$, der nach der arithmetischen Klassenzahlformel (HASSE [5], II, §11) mit der Klassenzahl h_ν^+ von P_ν^+ bis auf einen 2-Potenzfaktor übereinstimmt. Mit dem freien Γ_p-Erzeugnis $F^* = \mathsf{E}_\nu^{+\,\Gamma_p}$ in (1.3) gilt für den p-Bestandteil $(\mathsf{E}_\nu^+ : F_\nu^+)_p = (\mathsf{E}_\nu^{+\,\Gamma_p} : F_\nu^{+\,\Gamma_p})$. Folglich ist $(\widetilde{\mathsf{E}}_\nu^+ : \widetilde{F}_\nu^+)$ stets ein Teiler von $(\mathsf{E}_\nu^+ : F_\nu^+)_p$, und die Gleichheit besteht jedenfalls für stabile Primzahlen. Für stabile Primzahlen p besteht daher die lokale Abschätzung

$$h_{\nu p}^+ = (\widetilde{\mathsf{E}}_\nu^+ : \widetilde{F}_\nu^+) \mid (\mathsf{N}_\nu^+ : \widetilde{F}_\nu^+)$$

der p-Klassenzahl.

3. Wir kommen nun zur Formulierung eines notwendigen und hinreichenden Kriteriums für die k-Stabilität:

Satz 1. *Es sei im Gruppenring von* $\mathfrak{g}(\mathsf{P}_1^+ \mid \mathsf{P})$ *über* Γ_p

$$\Delta_k^+(u) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{(p-3)/2} (u - w^{+\,j})$$

gesetzt mit der primitiven $(p-1)/2$*-ten Einheitswurzel* $w^+ = w^2$. *Die Primzahl* p *ist* k*-stabil dann und nur dann, wenn für die Kreiseinheiten* $\pi_\nu^{+\,s_{\nu-1}-1}$ *und* $\pi_1^{+\,u-1}$ *gilt:*

(a$_\nu$) $$\pi_\nu^{+\,(s_{\nu-1}-1)\,\Delta_k^+(u)} \neq 1 \quad \text{für alle } \nu \geqq 2$$

(b) $$\pi_1^{+\,(u-1)(p-1)/2\cdot\Delta_k^+(u)} \neq 1 \quad \text{im Fall } 1 \leqq k \leqq (p-3)/2.$$

Zum Beweis wird der folgende Sachverhalt über ganze p-adische Darstellungen zyklischer p-Gruppen benötigt:

Hilfssatz. *Es sei* $\mathfrak{h} = (s)$ *eine zyklische Gruppe der Ordnung* p^n, x *eine Unbestimmte. Ein* Γ_p*-torsionsfreier zyklischer* $\Gamma_p[\mathfrak{h}]$*-Modul* $\mathfrak{m} = \Gamma_p[\mathfrak{h}]z$ *ist operatorisomorph zu* $\Gamma_p[x]/(f(x))$, *wobei* $f(x)$ *ein Polynom aus* $\Gamma_p[x]$ *mit höchstem Koeffizienten* 1 *ist, für das*

(1.5) $$\Phi_\mu(x) \mid f(x) \mid x^{p^\mu} - 1 \qquad (0 \leqq \mu \leqq n)$$

mit dem p^μ*-ten Kreisteilungspolynom* $\Phi_\mu(x)$ *gilt. Für den* Γ_p*-Rang gilt somit*

$$\varphi(p^\mu) \leqq \Gamma_p\text{-rg}(\mathfrak{m}) \leqq p^\mu.$$

Die durch (1.5) eindeutig bestimmte Zahl μ heiße der *Exponent* von $\mathfrak{m}$.

Beweis. $\mathfrak{m}$ ist einem torsionsfreien Faktorring S des Gruppenringes $R = \Gamma_p[\mathfrak{h}]$ isomorph. Das Kernideal $\mathfrak{a}$ bei dem dann bestehenden Epimorphismus $\varphi: \Gamma_p[x] \to S$ enthält $x^{p^n} - 1$. Setzt man ein Minimalpolynom aus $\mathfrak{a}$ in

der Form $f_1(x)=p^\varrho x^m+\cdots+a_0$ an, so wird $f_1(x)\,|\,p^\varrho(x^{p^n}-1)$. Die eindeutige Primzerlegung in $\Gamma_p[x]$ zeigt $f_1(x)=p^\varrho f(x)$ mit einem normierten Polynom $f(x)$ aus $\Gamma_p[x]$. Da S Γ_p-torsionsfrei ist, ist $m>0$ und auch $f(x)$ in $\mathfrak{a}$. Als normiertes Minimalpolynom erzeugt dann f natürlich $\mathfrak{a}$. Ist nun $\mu\leqq n$ der minimale Exponent mit $f(x)\,|\,x^{p^\mu}-1$, so gilt (1.5), und das Lemma ist bewiesen.

Wir zerlegen nun die Kreiseinheitengruppe $\widetilde{F_\nu^+}$. Führt man mit den Kreiseinheiten $\eta_l^{(\nu)}=\pi_\nu^{+\,l-1}$ die Γ_p-Gruppen $M_\nu^+=[\eta_s^{(\nu)}\,|\,s\in\mathfrak{h}_1^{(\nu)}]$ und $G_\nu^+=[\eta_v^{(\nu)^{(p-1)/2}}\,|\,v\in\mathfrak{u}^+]$ ein, so gilt wegen $\eta_{vs}^{(\nu)}=\eta_v^{(\nu)}\eta_s^{(\nu)^v}$ die Kompositumsdarstellung

$$\widetilde{F_\nu^+}=G_\nu^+\prod_{v\in\mathfrak{u}^+}M_\nu^{+\,v}$$

Da $\mathfrak{h}_1^{(\nu)}$ und $\mathfrak{u}^+$ zyklisch sind, sind nach Hasse [5], II, §10, 11 auch M_ν^+ und G_ν^+ zyklisch bezüglich der Gruppenringe $\Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu)}]$ bzw. $\Gamma_p[\mathfrak{u}^+]$, erzeugt von den Einseinheiten $\varepsilon_1^{(\nu)+}=\eta_{s_1}^{(\nu)}$ bzw. $\delta_\nu^{+\,(p-1)/2}=\eta_u^{(\nu)^{(p-1)/2}}$. Daraus entsteht $\widetilde{F_\nu^{+\,\varepsilon_{2k}}}=G_\nu^{+\,\varepsilon_{2k}}M_\nu^{+\,\varepsilon_{2k}}$ mit $G_\nu^{+\,\varepsilon_0}=1$. Diese Zerlegung ist sogar direkt, falls $G_1^{+\,\varepsilon_{2k}}\neq 1$, also $\delta_1^{+\,\frac{1}{2}(p-1)\varepsilon_{2k}}\neq 1$ ist für $k\geqq 1$. Denn Normbildung N_μ^ν von $\mathsf{P}_\nu\,|\,\mathsf{P}_\mu$ ergibt $\pi_\mu^+=N_\mu^\nu\pi_\nu^+$ $(\mu<\nu)$, und daher $G_\nu^{+\,\varepsilon_{2k}}\cong N_1^\nu G_\nu^{+\,\varepsilon_{2k}}=G_1^{+\,\varepsilon_{2k}}$, während $N_1^\nu M_\nu^{+\,\varepsilon_{2k}}=1$ ist. Nach dem Gesagten ist p daher k-stabil genau dann, wenn $\delta_1^{+\,\frac{1}{2}(p-1)\varepsilon_{2k}}\neq 1$ für $k\geqq 1$ und $\Gamma_p\text{-rg}\,(M_\nu^{+\,\varepsilon_{2k}})=p^{\nu-1}-1$ ist.

Der Beweis von Satz 1 erfolgt nun durch Induktion, indem das Lemma auf die von den $\varepsilon_1^{(\nu)+\varepsilon_{2k}}=\pi_\nu^{+\,(s_1-1)\varepsilon_{2k}}$ erzeugten zyklischen und Γ_p-torsionsfreien $\Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu)}]$-Gruppen $M_\nu^{+\,\varepsilon_{2k}}$ angewendet wird. Ist $f_{\nu k}(x)$ das in (1.5) auftretende Polynom, so ist wegen $N_1^\nu\varepsilon_1^{(\nu)+\varepsilon_{2k}}=1$ gewiß $f_{\nu k}(x)\,|\,x^{p^{\nu-1}-1}+x^{p^{\nu-1}-2}+\cdots+x+1$. Zum anderen ist der Exponent von $M_\nu^{+\,\varepsilon_{2k}}$ im Sinn des Lemmas maximal gleich $\nu-1$ genau dann, wenn für $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}=\pi_\nu^{+\,s_{\nu-1}^{\nu-1}}$ gilt $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+\varepsilon_{2k}}\neq 1$. Denn $f_{\nu k}(x)\,|\,x^{p^{\nu-2}}-1$ liegt genau dann vor, wenn $1=\varepsilon_1^{(\nu)+\varepsilon_{2k}(s_1^{p^{\nu-2}}-1)}=\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+\varepsilon_{2k}(s_1-1)}$ ist. Dies ist aber gleichbedeutend mit $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+\varepsilon_{2k}}$ in Λ_1^+, was durch Normbildung $1=\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+\varepsilon_{2k}p^{\nu-1}}$, also $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+\varepsilon_{2k}}=1$ zur Folge hat.

Der Normepimorphismus $N_{\nu-1}^\nu\colon M_\nu^{+\,\varepsilon_{2k}}\to M_{\nu-1}^{+\,\varepsilon_{2k}}$ bewirkt nun die kommutative Epimorphismenfolge im Sinn des Lemmas:

$$\begin{array}{ccccc} & \Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu)}] & \to & S_{\nu k} & \cong M_\nu^{+\,\varepsilon_{2k}} \\ \Gamma_p[x]\nearrow\searrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ & \Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu-1)}] & \to & S_{\nu-1,k} & \cong M_{\nu-1}^{+\,\varepsilon_{2k}}, \end{array}$$

so daß für die Kernideale $(f_{\nu k})$ und $(f_{\nu-1,k})$ gilt: $(f_{\nu-1,k})\supseteq(f_{\nu k})$, also $f_{\nu-1,k}\,|\,f_{\nu k}$.

Nach dem Gesagten ist die Bedingung $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+\varepsilon_{2k}}\neq 1$ für $\nu\geqq 2$ gleichbedeutend mit $\Phi_{\nu-1}(x)\,|\,f_{\nu k}(x)\,\Big|\,\dfrac{x^{p^{\nu-1}}-1}{x-1}$ für alle $\nu\geqq 2$. Für $\nu=2$ ergibt das $f_{2,k}(x)=x^{p^{k-1}}+\cdots+x+1$. Ist schon $f_{\nu-1,k}=\sum_0^{p^{\nu-2}-1}x^j$ bewiesen, so ist $f_{\nu k}$ durch $\Phi_{\nu-1}(x)$

und $f_{\nu-1,k}(x)$ teilbar, also wegen der Teilerfremdheit beider Polynome auch durch das Produkt. Gradvergleich ergibt in der Tat $f_{\nu,k}(x)=\frac{x^{p^{\nu-1}}-1}{x-1}$, und somit $\Gamma_p\text{-rg}\,(M_\nu^{+\,e_{2k}})=p^{\nu-1}-1$.

Es bleibt zu zeigen, daß auf H_ν^+ die Wirkung der Idempotente e_{2k} im wesentlichen mit der von $\Delta_k^+(u)$ übereinstimmt. Nun stimmt e_{2k} auf H_ν^+ mit $e_k^+=\frac{2}{p-1}\sum_0^{(p-3)/2} w^{+\,-kj}u^j$ überein. Ferner gilt

$$e_k^+=\frac{2}{p-1}w^{+\,k}\Delta_k^+ \qquad \text{für alle } k.$$

Denn mit

$$\Delta^+(z)=z^{(p-1)/2}-1=\prod_0^{(p-3)/2}(z-w^{+\,j})$$

ist

$$\Delta_k^+(z)=\frac{\Delta^+(z)}{z-w^{+\,k}}=w^{+\,-k}\sum_{j=0}^{(p-3)/2}(zw^{+\,-k})^j,$$

also die Behauptung für $z=u$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

§ 2. Weitere Reduktion und die k-Stabilität aller Primzahlen für $k=0,1$

1. Das Stabilitätskriterium in Satz 1 erfordert die Kenntnis der Wirkung von $u-w^{+\,j}$ auf H_ν^+. Wir setzen dazu eine beliebige ϱ-te Einseinheit γ_ϱ^+ aus H_ν^+ an in der Form

$$\gamma_\varrho^+=1+\sum_{j=0}^{\infty}a_{\varrho+j}\pi^{+\,\varrho+j}=1+\alpha_\varrho\pi^{+\,\varrho} \qquad (a_\varrho\not\equiv 0 \bmod p,\ \alpha_\varrho\in\Gamma_p^*). \tag{2.0}$$

Wegen $\gamma_\varrho^{+\,w^{+\,j}}\equiv 1+w^{+\,j}\pi^{+\,\varrho}\sum_{i=0}^{\varrho-1}a_{\varrho+i}\pi^{+\,i} \bmod \mathfrak{p}^{+\,2\varrho}$ und $\gamma_\varrho^{+\,-w^{+\,j}}\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^{+\,\varrho}$ wird dann mit $\delta^+=\pi^{+\,u-1}$

$$\gamma_\varrho^{+\,u-w^{+\,j}}\equiv 1+\pi^{+\,\varrho}\sum_{i=0}^{\varrho-1}a_{\varrho+i}(\delta^{+\,\varrho+i}-w^{+\,j})\pi^{+\,i} \bmod \mathfrak{p}^{+\,2\varrho}. \tag{2.1}$$

Um die beiden ersten Koeffizienten von δ^+ zu berechnen, ist

$$\delta=\pi^{u-1}=\pi^{-1}(1-\zeta^w)\equiv w-\binom{w}{2}\pi+\binom{w}{3}\pi^2 \bmod \mathfrak{p}^3$$

mit seinem Konjugierten $\delta'=\pi'^{\,u-1}$ bezüglich P_ν^+ zu multiplizieren:

$$\delta^+=\delta\,\delta'=w^+-w\binom{w}{2}\mathrm{Sp}^+(\pi)+\binom{w}{2}^2N^+(\pi)+w\binom{w}{3}\mathrm{Sp}^+(\pi^2) \bmod \mathfrak{p}^3,$$

also auch mod $\mathfrak{p}^{+\,2}$; hierin ist $w^+=w^2$ und Sp^+, N^+ bezeichnen die Spur bzw. Norm von $\mathsf{P}_\nu|\,\mathsf{P}_\nu^+$. Wegen $\pi^+=\mathrm{Sp}^+(\pi)=N^+(\pi)$ und $\pi^2=-\zeta\pi^+$, also $\mathrm{Sp}^+(\pi^2)=-2\pi^++\pi^{+\,2}$, ergibt sich:

$$\delta^+\equiv w^+-\tfrac{1}{1\,2}w^+(w^+-1)\pi^+ \bmod \mathfrak{p}^{+\,2}. \tag{2.2}$$

Trägt man

$$\delta^{+\varrho+i} - w^{+j} \equiv (w^{+\varrho+i} - w^{+j}) - (\varrho+i)\,\tfrac{1}{1\,2}\,w^{+\varrho+i}(w^+ - 1)\,\pi^+ \bmod \mathfrak{p}^{+2}$$

in (2.1) ein und vergröbert mod $\mathfrak{p}^{+\varrho+2}$, so erhält man

$$(2.3)\quad \begin{cases} \gamma_\varrho^{+\,u-w^{+j}} \equiv 1 + a_\varrho(w^{+\varrho} - w^{+j})\pi^{+\varrho} + \\ \qquad + [a_{\varrho+1}(w^{+\varrho+1} - w^{+j}) - a_\varrho \tfrac{1}{1\,2}\,\varrho\, w^{+\varrho}(w^+ - 1)]\,\pi^{+\varrho+1} \bmod \mathfrak{p}^{+\varrho+2}. \end{cases}$$

Insbesondere ist also

$$(2.4)\qquad \gamma_\varrho^{+\,\Delta_k^+(u)} \equiv 1 + a_\varrho\,\Delta_k^+(w^{+\varrho})\,\pi^{+\varrho} \not\equiv 1 \mod \mathfrak{p}^{+\varrho+1}$$

genau dann der Fall, wenn $\Delta_k^+(w^{+\varrho}) \not\equiv 0$, also $\varrho \equiv k \bmod (p-1)/2$ gilt.

Da sich die Einseinheiten aus der k-ten Komponente $\mathsf{H}_\nu^{+\,\varepsilon_k^+}$ bei Anwendung von $\Delta_k^+(u)$ im wesentlichen reproduzieren, speziell also (2.4) erfüllen, gilt:

Die Einheiten aus $\mathsf{H}_\nu^{+\,\varepsilon_{2k}}$ *haben sämtlich einen Index* $\equiv k \bmod (p-1)/2$. Entsprechendes gilt auch für die Komponenten $\mathsf{H}_\nu^{\varepsilon_i}$ von H_ν.

2. Für das folgende hinreichende Stabilitätskriterium wird die Kenntnis des Koeffizienten von $\pi^{+\varrho+1}$ in (2.3) für $\gamma_\varrho^+ = \varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}$ noch nicht benötigt. Wir führen die Teilprodukte $T_j = \prod_0^j (u - w^{+i})$ ein mit den Indizes $\varrho_j = \mathrm{ind}^+(\gamma_\varrho^{+\,T_j})$. Die mod $\mathfrak{p}^{+\varrho+1}$ vergröberte Kongruenz (2.3) zeigt dann, daß $\varrho_j > \varrho_{j-1}$ genau dann vorliegt, wenn $j \equiv \varrho_{j-1} \bmod (p-1)/2$. Danach ergibt sich bei Anwendung von $\prod_{j+1}^{(p-3)/2} (u - w^{+i})$ auf $\gamma_\varrho^{+\,T_{j-1}}$ keine Indexänderung, es gilt also in diesem Fall

$$\mathrm{ind}^+(\gamma_\varrho^{+\,\Delta_j^+}) \equiv j \mod (p-1)/2.$$

Beachtet man noch, daß $T_{(p-3)/2}$ der 0-Operator, also $\varrho_{(p-3)/2} = \infty$ ist, so ist damit das folgende Kriterium bewiesen:

Für eine ϱ*-te Einseinheit* γ_ϱ^+ *aus* H_ν^+ *seien* $1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_{r+1} \leqq \dfrac{p-3}{2}$ *die Sprungstellen der Indizes* $\varrho_j = \mathrm{ind}^+(\gamma_\varrho^{+\,T_j})$:

$$\varrho \leqq \varrho_0 = \cdots = \varrho_{k_1-1} < \varrho_{k_1} = \cdots = \varrho_{k_2-1} < \cdots < \varrho_{k_{r+1}} = \cdots = \varrho_{(p-3)/2} = \infty.$$

Dann gilt für diese k_i

$$\mathrm{ind}^+(\gamma_\varrho^{+\,\Delta_{k_i}^+}) \equiv k_i \mod (p-1)/2,$$

insbesondere also $\gamma_\varrho^{+\,\Delta_{k_i}^+} \neq 1$.

Tritt daher eine Zahl k *zwischen* 0 *und* $(p-3)/2$ *für jedes* $\nu \geqq 2$ *als Sprungstelle der Indizes* $\varrho_j^{(\nu)} = \mathrm{ind}^+(\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+\,T_j})$ *auf, so ist* p k*-stabil genau dann, wenn* (b) *aus Satz* 1 *erfüllt ist.*

3. Zum Nachweis der k-Stabilität für $k=0, 1$ benötigt man eine genauere Kenntnis der kritischen Einseinheit $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}=\pi_\nu^{+\,s_{\nu-1}-1}$. Ihr Index berechnet sich leicht zu

$$\mathrm{ind}^+(\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+})=(p^{\nu-1}-1)/2.$$

Denn wegen $s_{\nu-1}=s_1^{p^{\nu-2}}$ und $(1+p)^{p^{\nu-2}}\equiv 1+cp^{\nu-1} \bmod p^\nu$ mit $c\not\equiv 0 \bmod p$ gilt $\zeta_\nu^{s_{\nu-1}}=\zeta_\nu\zeta_1^c$. Also hat zunächst die Einseinheit

$$\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)}=1+\zeta_\nu\beta\pi_1\pi_\nu^{-1} \quad \text{mit der Einheit} \quad \beta=\pi_1^{-1}(1-\zeta_1^c) \tag{2.5}$$

den Index $p^{\nu-1}-1$ bezüglich $\mathfrak{p}_\nu$, was durch Normbildung $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}=N^+\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)}$ die Behauptung für $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}$ ergibt.

Die 0-Stabilität aller Primzahlen folgt nun aus (2.4) für $\gamma_\varrho^+=\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}$, indem man $\varrho\equiv 0 \bmod (p-1)/2$ beachtet. Oder man schließt direkt nach Satz 1 auf Grund von $(\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+})^{\frac{1}{2}(p-1)\varepsilon_0^+}=\bar\pi_\nu^{s_{\nu-1}-1}\not\equiv 1$ mit $\bar\pi_\nu=\overline{N}\pi_\nu$.

Für $k=1$ erhält man aus (2.3) für $\gamma_\varrho^+=\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}$ wegen $\varrho=(p^{\nu-1}-1)/2$

$$\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+\,\Delta_1^+(u)}\equiv 1+\Delta_1^+(w^+)\left(a_{\varrho+1}+\frac{1}{24}a_\varrho\right)\pi^{+\,\varrho+1} \bmod \mathfrak{p}^{+\,\varrho+2} \tag{2.6}$$

Es ist also die Berechnung der Koeffizienten a_ϱ, $a_{\varrho+1}$ von $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}$ erforderlich. Trägt man die bekannte Beziehung $\pi_1\pi_\nu^{-1}\equiv\pi_\nu^{p^{\nu-1}-1} \bmod p$ (HASSE [4], S. 180) in (2.5) ein und beachtet $\beta\equiv c \bmod \mathfrak{p}_1$, so wird

$$\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)}\equiv 1+c\zeta_\nu\pi_\nu^{p^{\nu-1}-1} \bmod \mathfrak{p}_\nu^{p^{\nu-1}+2}.$$

Multiplikation mit der Konjugierten $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)'}$ bezüglich P_ν^+ ergibt

$$\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}\equiv 1+c\,\mathrm{Sp}^+(\zeta_\nu\pi_\nu^{p^{\nu-1}-1}) \bmod \mathfrak{p}_\nu^{p^{\nu-1}+2} \quad (p\geqq 5), \tag{2.7}$$

wenn man beachtet, daß das Glied $c^2\pi_\nu^{+\,p^{\nu-1}-1}$ fortfällt für $p\geqq 5$. Wegen $\pi_\nu^2=-\zeta_\nu\pi_\nu^+$ ist $\mathrm{Sp}^+(\zeta_\nu\pi_\nu^{2\varrho})=(-1)^\varrho\,\mathrm{Sp}^+(\zeta_\nu^{\varrho+1})\pi_\nu^{+\,\varrho}$. Auf Grund der Kongruenz $\zeta_\nu^{\varrho+1}\equiv 1-(\varrho+1)\pi_\nu+\binom{\varrho+1}{2}\pi_\nu^2 \bmod \mathfrak{p}_\nu^3$ und der schon verwendeten Beziehung $\mathrm{Sp}^+(\pi_\nu^2)=-2\pi_\nu^+ +\pi_\nu^{+\,2}$ wird dann

$$\mathrm{Sp}^+(\zeta_\nu^{\varrho+1})\equiv 2-(\varrho+1)^2\pi_\nu^+ \bmod \mathfrak{p}_\nu^{+\,2}.$$

Zusammen ergibt sich somit wegen $\varrho=(p^{\nu-1}-1)/2\equiv(\nu-1)(p-1)/2 \bmod 2$:

$$\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}\equiv 1+(-1)^{(\nu-1)(p-1)/2}c\left(2\pi_\nu^{+\,\varrho}-\frac{1}{4}\pi_\nu^{+\,\varrho+1}\right) \bmod \mathfrak{p}_\nu^{+\,\varrho+2}. \tag{2.8}$$

Die Forderung $a_{\varrho+1}+\frac{1}{24}a_\varrho\not\equiv 0 \bmod p$ in (2.6) läuft somit auf die Bedingung $p\geqq 5$ zurück. Damit ist für $p\geqq 5$ stets $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+\,\Delta_1^+}\neq 1$ gezeigt, was für die regulären Primzahlen 2 und 3 erst recht der Fall ist, da sie ja stabil sind.

Nach Satz 1 sind daher alle Primzahlen 1-stabil, wenn für die Einheit $\delta_1^+=\pi_1^{+\,u-1}$

$$\delta_1^{+\,\frac{1}{2}(p-1)\Delta_1^+}\not\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}_1^{+\,2}$$

gezeigt werden kann. Nach (2.2) ist nun aber $\mathrm{ind}^+\left(\delta_1^{+\,(p-1)/2}\right)=1$, also nach (2.4) auch $\mathrm{ind}^+(\delta_1^{+\,\frac{1}{2}(p-1)\,\Delta_1^+})=1$, was die Behauptung ergibt. Wir haben also bewiesen:

Satz 2. *Alle Primzahlen sind k-stabil für* $k=0$ *und* 1.

Die Untersuchung der k-Stabilität für $k\geqq 2$ erfordert nach (2.1) die Kenntnis der höheren Koeffizienten von δ_ν^+ und $\varepsilon_{\nu-1}^{(\nu)+}$.

§ 3. Die Erzeugung von $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ aus $1+p$ und der Kreiseinheitengruppe $\bar{\bar{F}}_\nu$

Mit der 0-Stabilität aller Primzahlen $p\neq 2$ haben wir gezeigt, daß die Kreiseinheitengruppe $\bar{\bar{F}}_\nu=[\bar{\pi}_\nu^{s-1}\,|\,s\in\mathfrak{h}_1^{(\nu)}]$ $(=M_\nu^{+\,\varrho_0})$ der Fixkörper $\bar{\Lambda}_\nu$ von $\mathfrak{u}$ in den Λ_ν als Γ_p-Gruppe maximalen Rang $p^{\nu-1}-1$, also in $\bar{\mathsf{N}}_\nu$ endlichen Index hat; hierbei ist $\bar{\pi}_\nu=\bar{N}\pi_\nu$ das normierte Primelement von $\bar{\Lambda}_\nu$. Nun hat Hasse in [6], S. 15 für $p=2$ bewiesen, daß darüber hinaus die Kreiseinheiten bereits die volle Einseinheitengruppe des maximal-reellen Teilkörpers erzeugen. Der analoge Sachverhalt besteht im Fall $p\neq 2$ auch für die Körper $\bar{\mathsf{P}}_\nu$:

Satz 3. *In* $\bar{\mathsf{P}}_\nu$ *gilt für* $p\neq 2$ *stets* $\bar{\mathsf{N}}_\nu=\bar{\bar{F}}_\nu$, *also für die volle Einseinheitengruppe*

$$\bar{\mathsf{H}}_\nu=[1+p]\times\bar{\bar{F}}_\nu.$$

Beweis. Die Wirkung des Operators $\sigma_\mu=s_\mu-1$ auf eine genaue ϱ-te Einseinheit $\bar{\gamma}_\varrho$ von $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ ergibt:

$$\overline{\mathrm{ind}}\,(\bar{\gamma}_\varrho^{\sigma_\mu})\geqq\varrho+\frac{p^\mu-1}{p-1} \tag{3.1}$$

und sogar $=\varrho+\dfrac{p^\mu-1}{p-1}$ für $\varrho\not\equiv 0 \bmod p$.

Zum Beweis betrachten wir ϱ-te Einseinheiten γ_ϱ in Λ_ν in der Darstellung (2.0) und bilden

$$\gamma_\varrho^{\sigma_\mu}=1+\gamma_\varrho^{-1}\pi^\varrho\sum_{j=0}^{\infty}a_{\varrho+j}(\varepsilon_\mu^{\varrho+j}-1)\,\pi^j \tag{3.2}$$

mit $\varepsilon_\mu=\pi^{\sigma_\mu}$. Nun kann, etwas allgemeiner als in §2 auf Grund von (2.5), leicht $\mathrm{ind}\,(\varepsilon_\mu)=p^\mu-1$ gezeigt werden. Aus (3.2) ergibt sich dann $\mathrm{ind}\,(\gamma_\varrho^{\sigma_\mu})\geqq\varrho+p^\mu-1$, und das Gleichheitszeichen steht genau für $\varrho\not\equiv 0 \bmod p$. Für $\bar{\gamma}_\varrho$ aus $\bar{\Lambda}_\nu$ ist daher $\mathrm{ind}\,(\bar{\gamma}_\varrho^{\sigma_\mu})\geqq$ bzw. $=\varrho(p-1)+p^\mu-1$, was (3.1) ergibt.

Für die erzeugende Kreiseinheit $\bar{\varepsilon}_1=\bar{N}\varepsilon_1$ gilt wegen $\mathrm{ind}\,(\varepsilon_1)=p-1$:

$$\overline{\mathrm{ind}}\,(\bar{\varepsilon}_1)=1. \tag{3.3}$$

Es soll gezeigt werden, daß die $p^{\nu-1}-1$ Einseinheiten $\bar{\varepsilon}_1^{\sigma_1^i}$ $(\sigma_1=s_1-1;\ i=0,\ldots,p^{\nu-1}-2)$ zusammen mit $1+p$ die volle Gruppe $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ erzeugen.

Nach dem bekannten Aufbau der Einseinheitengruppen lokaler Körper (s. etwa Hasse [4], §15, S. 173) erhält man eine Γ_p-Basis von $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ in den „elementaren Einseinheiten"

$$\bar{\eta}_\varrho=1+a_\varrho\bar{\pi}_\nu^\varrho\qquad(a_\varrho\text{ ganzrational}\not\equiv 0 \bmod p),$$

wo ϱ alle zu p primen Zahlen $\leqq \frac{p^\nu - 1}{p-1}$ durchläuft. Offenbar ist dabei die Voraussetzung a_ϱ ganzrational entbehrlich: Jedes System $\left\{\bar{\gamma}_\varrho \mid 1 \leqq \varrho \leqq \frac{p^\nu-1}{p-1},\ \varrho \not\equiv 0 \bmod p\right\}$ von genauen ϱ-ten Einseinheiten $\bar{\gamma}_\varrho$ ist eine Γ_p-Basis von $\bar{\mathfrak{H}}_\nu$. Denn bei einer Darstellung $\bar{\gamma}_\varrho = \prod \bar{\eta}_j^{\alpha_{j\varrho}}$ ($\alpha_{j\varrho} \in \Gamma_p$) durch die Basis $\bar{\eta}_j$ muß $\alpha_{j\varrho} \equiv 0 \bmod p$ für $j < \varrho$ und $\alpha_{\varrho\varrho} \not\equiv 0 \bmod p$ gelten, so daß die Determinante der Übergangssubstitution $|\alpha_{j\varrho}| \equiv \prod_\varrho \alpha_{\varrho\varrho} \not\equiv 0 \bmod p$ ausfällt.

Es genügt offenbar zu zeigen, daß $\bar{\bar{F}}_\nu$ zusammen mit einem weiteren Basiselement $\bar{\eta}$, etwa $1+p$, modulo $\bar{\mathfrak{H}}_\nu^p$ ganz $\bar{\mathfrak{H}}_\nu$ erzeugt. Dazu wird rekursiv ein System $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{\frac{p^{\nu-1}-1}{p-1}-1}$ aus $\bar{\mathfrak{H}}_\nu$ mit folgenden Eigenschaften konstruiert:

(α) $\qquad \beta_0 = \bar{\varepsilon}_1$

(β) $\qquad \beta_j \underset{p}{=} \beta_{j-1}^{\sigma_1^{p-1}}$ [3]) $\qquad \left(j \leqq \frac{p^{\nu-1}-1}{p-1} - 1\right)$

(γ) $\qquad \overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_j) = 1 + j\,p.$

Nach (3.3) hat $\beta_0 = \bar{\varepsilon}_1$ die Eigenschaft (γ), während (β) für $j=0$ bedeutungslos ist. Seien die β_j mit $j \leqq k < \frac{p^{\nu-1}-1}{p-1} - 1$ und (α) bis (γ) bereits konstruiert. Nach (3.1) für $\mu = 1$ und wegen (γ) für $j = k$ gilt dann

$$(3.4) \qquad \overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_k^{\sigma_1^i}) = \begin{cases} 1 + k\,p + i & 0 \leqq i \leqq p-2 \\ (k+1)\,p & i = p-1. \end{cases}$$

Demnach ist wegen $k+1 \leqq \frac{p^{\nu-1}-1}{p-1}$ nach dem bekannten Verhalten der Einseinheiten bei Potenzierung mit p (HASSE [4], §15, S. 168)

$$\beta_k^{\sigma_1^{p-1}} \equiv \bar{\eta}_{k+1}^p \mod \bar{\mathfrak{p}}_\nu^{(k+1)p+1}$$

mit $\bar{\eta}_{k+1} \equiv 1 \bmod \bar{\mathfrak{p}}_\nu^{k+1}$, und daher

$$(3.5) \qquad \beta_k^{\sigma_1^{p-1}} \underset{p}{=} \beta_{k+1} \quad \text{mit} \quad \overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_{k+1}) \geqq (k+1)\,p + 1$$

mit einer gewissen Einseinheit $\beta_{k+1} = \beta_k^{\sigma_1^{p-1}} \bar{\eta}_{k+1}^{-p}$. Nun ist innerhalb des Gruppenringes $\Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu)}]$ sicher $\sigma_1^p \equiv \sigma_2 \bmod p$. Folglich gilt für $\beta_k^{\sigma_1^p} \underset{p}{=} \beta_k^{\sigma_2}$ nach (γ) für $j = k$ und (3.1) für $\mu = 2$ jedenfalls $\overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_k^{\sigma_2}) = 1 + k\,p + p + 1 = (k+1)\,p + 2$. Da dieser Index wegen $p \neq 2$ prim zu p ist und nach (3.4) und (3.1) gewiß $\overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_k^{\sigma_1^p}) \geqq (k+1)\,p + 1$ gilt, folgt

$$(3.6) \qquad \overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_k^{\sigma_1^p}) \leqq (k+1)\,p + 2.$$

[3]) Das Zeichen „$\underset{p}{=}$" bedeutet Gleichheit bis auf eine p-te Potenz.

Andererseits ist nach (3.5)

$$\beta_k^{\sigma_1 p} = \bar{\eta}_{k+1}^{\sigma_1 p} \beta_{k+1}^{\sigma_1} \equiv \beta_{k+1}^{\sigma_1} \mod \bar{\mathfrak{p}}_\nu^{p(k+2)}; \tag{3.7}$$

denn nach (3.1) ist $\bar{\eta}_{k+1}^{\sigma_1} \equiv 1 \bmod \bar{\mathfrak{p}}_\nu^{k+2}$, also wegen $k+2 \leqq \frac{p^{\nu-1}-1}{p-1}$ gewiß $\bar{\eta}_{k+1}^{\sigma_1 p} \equiv 1 \bmod \bar{\mathfrak{p}}_\nu^{(k+2)p}$ [4]). Vergleich von (3.7) mit (3.6) ergibt wegen $(k+1)p+2<(k+2)p$

$$\overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_k^{\sigma_1 p}) = \overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_{k+1}^{\sigma_1}). \tag{3.8}$$

Beachtet man nach (3.1) $\overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_{k+1}^{\sigma_1}) \geqq \overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_{k+1})+1$, so ergeben (3.5) bis (3.8) die Ungleichung

$$\overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_{k+1})+1 \leqq \overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_k^{\sigma_1 p}) \leqq (k+1)p+2 \leqq \overline{\mathrm{ind}}\,(\beta_{k+1})+1,$$

woraus in der Tat (γ) für $j=k+1$ folgt. Andererseits erfüllt β_{k+1} nach Definition (3.5) die Bedingung (β) für $j=k+1$, womit die Konstruktion der β durchgeführt ist.

Nun zeigen (γ) und (3.4), daß die Indizes der $p^{\nu-1}-1$ Einseinheiten

$$\beta_k^{\sigma_1^j} \qquad \left(j=0,\ldots,p-2;\ k=0,\ldots,\frac{p^{\nu-1}-1}{p-1}-1\right) \tag{3.9}$$

genau die zu p primen Zahlen zwischen 1 und $\frac{p^{\nu}-1}{p-1}-2$ durchlaufen. Sie stellen nach der Vorbemerkung daher zusammen mit einer genauen $\left(\frac{p^{\nu}-1}{p-1}\right)$-ten Einseinheit eine Basis von $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ dar. Statt letzterer Einseinheit kann dann auch $1+p$ genommen werden.

Geht man in (β) sukzessive auf den Index $j=0$ zurück, so sieht man, daß jedes solche Basiselement aus (3.9) mod $\bar{\mathsf{H}}_\nu^p$ einem Element $\bar{\varepsilon}_1^{\sigma_1^j}$ aus $\tilde{\tilde{F}}_\nu$ kongruent ist. Damit ist nach dem Gesagten der Satz bewiesen.

Als erste Folgerung gewinnt man, wie für $p=2$ bei Hasse [6], den bekannten Satz, daß $\bar{h}_{\nu p} = (\tilde{\tilde{\mathsf{E}}}_\nu : \tilde{\tilde{F}}_\nu) = 1$ für alle ν ist [5]). Ferner wird durch Satz 3 die Struktur der vollen Einseinheitengruppe $\bar{\mathsf{H}}_\nu$ als $\Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu)}]$-Operatorgruppe aufgeklärt:

$$\bar{\mathsf{H}}_\nu \cong \Gamma_p \oplus \left(\Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu)}]/\tau_\nu\, \Gamma_p[\mathfrak{h}_1^{(\nu)}]\right) \quad \text{mit} \quad \tau_\nu = \sum_{j=0}^{p^{\nu-1}-1} s_1^j \text{ [6]}).$$

Literatur

[1] Artin, E.: Representatives of the connected component of the idèle class group. Intern. Symp. on Algebr. Number Theory, Tokyo 1955, 51–54.

[2] Chevalley, C.: Deux théorèmes d'arithmétique. J. Math. Soc. Japan 3, 36–44 (1951).

[4]) Hier wird für die p-Potenzierungsregel wesentlich verwendet, daß $k < \frac{p^{\nu-1}-1}{p-1}-1$ vorausgesetzt war.

[5]) Dies kann auch begrifflich aus der Hilbertschen Theorie (Fröhlich [3]), der Klassenkörpertheorie (Iwasawa [7]), oder aus der allgemeinen Theorie der Γ-Erweiterungen (Iwasawa [8], p. 225, Serre [13], Théorème 1) gewonnen werden.

[6]) Vgl. das allgemeine Theorem 19 in der Iwasawaschen Arbeit [9].

[3] FRÖHLICH, A.: On a method of determination of class number factors in number fields. Mathematica **4**, 113–121 (1957).
[4] HASSE, H.: Zahlentheorie. Berlin 1949.
[5] – Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. Monographie Berlin 1952.
[6] – Die dyadische Einseinheitenoperatorgruppe zum Körper der 2^n-ten Einheitswurzeln nebst Anwendung auf die Klassenzahl seines größten reellen Teilkörpers. Revue de la Faculté des Sciences de l'Univ. Instanbul **20**, 7–16 (1955).
[7] IWASAWA, K.: A note on class numbers of algebraic number fields. Abh. Math. Sem. Hamburg **20**, 257–258 (1956).
[8] – On Γ-Extensions of algebraic number fields. Bull. Amer. Math. Soc. **65**, 183–226 (1959).
[9] – On the theory of cyclotomic fields. Ann. of Math. **70**, 530–561 (1959).
[10] JEHNE, W.: Bemerkung über die p-Klassengruppe p^ν-ter Kreiskörper. Archiv d. Math. **10**, 422–427 (1959).
[11] LEOPOLDT, H. W.: Über Fermatquotienten von Kreiseinheiten und Klassenzahlformeln modulo p. Rend. Circ. Mat. Palermo **9**, 1–12 (1960).
[12] SCHMIDT, F. K.: Zur Klassenkörpertheorie im Kleinen. J. reine angew. Math. **162**, 155–168 (1930).
[13] SERRE, J. P.: Classes des corps cyclotomiques. Seminaire Bourbaki 1958/59, Expos. 174, 01–11.
[14] WEIL, A.: Sur la théorie du corps de classes. J. Math. Soc. Japan **3**, 1–35 (1951).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 26. April 1961)

HABETHA, KL.
Math. Zeitschr. 77, 453–467 (1961)

Über die Werteverteilung in Winkelräumen

Von
KLAUS HABETHA

Einleitung

Im folgenden soll die Werteverteilung von Funktionen $w(z)$ untersucht werden, die in einem Winkelraum

$$H_{r_0}^k = \left\{ z \,|\, r_0 \leqq |z| < \infty,\ |\arg z| \leqq \frac{\pi}{2k};\ k \geqq \frac{1}{2},\ r_0 > 0 \right\} \tag{0.1}$$

eindeutig und meromorph sind. An Literatur sind vor allem eine Arbeit von R. NEVANLINNA [10] und eine Note von J. DUFRESNOY [6] zu nennen.

Das Problem kann einerseits mit einer Ausschöpfung von $H_{r_0}^k$ durch Gebiete behandelt werden, deren Ränder keine Punkte mit dem Rand von $H_{r_0}^k$ gemeinsam haben (etwa entsprechend AF HÄLLSTRÖM [8]). Das führt im wesentlichen auf die bekannten Untersuchungen der Werteverteilung von Funktionen, die im Einheitskreis meromorph sind. Dabei wäre als zusätzliche Voraussetzung gegeben, daß auf $|z| = 1$ eine wesentliche Singularität nur für $z = 1$ vorliegt.

Angemessener erscheint die Ausschöpfung von $H_{r_0}^k$ durch die Gebiete

$$G_r^k = \left\{ z \,|\, r_0 < |z| < r,\ |\arg z| < \frac{\pi}{2k} \right\}, \tag{0.2}$$

denn dabei wird die Sonderstellung des Punktes $z = \infty$ betont. Hier treten im Restglied des 2. Hauptsatzes Integrale über die Werte von $w(z)$ auf dem Rand von $H_{r_0}^k$ auf. In den genannten Abhandlungen werden diese Ausdrücke mit Hilfe einer Poissonschen Formel für $\log w(z)$ in einem größeren Winkelraum abgeschätzt, dort muß $w(z)$ natürlich meromorph sein.

In dieser Arbeit soll versucht werden, die Werteverteilung in $H_{r_0}^k$ zu behandeln, ohne Eigenschaften von $w(z)$ in Punkten außerhalb des Winkelraumes zu verwenden. Für die Halbebene hat der Verfasser dieses Problem in [7] mit Hilfe besonderer Charakteristiken untersucht, hier soll die Nevanlinnasche Charakteristik — in der Form von SHIMIZU und AHLFORS — zugrunde gelegt werden.

§ 1 enthält den 1. Hauptsatz, § 2 eine teilweise Abschätzung des Restgliedes im 2. Hauptsatz und eine daraus folgende Defektrelation. Der Inhalt dieser beiden Paragraphen ist — zumindest der Methode nach — bekannt, die Darstellung wurde daher kurz gefaßt (vgl. A. DINGHAS [2, 4]). In § 3 wird der 2. Hauptsatz über k integriert, wobei sich das Randintegral in ein Flächenintegral verwandelt und weiter abgeschätzt werden kann. Dabei ist es möglich, nach der von L. AHLFORS [1] angegebenen Methode vorzugehen;

ferner bereitet es keine Schwierigkeiten, sich auf eine Umgebung der wesentlichen Singularität zu beschränken (vgl. für die Vollebene A. DINGHAS [5]). Geht man im Restglied zu Abschätzungen durch die Charakteristik eines größeren Winkelraumes über, so gewinnt man nicht die Ergebnisse von J. DUFRESNOY [6] wieder. Das ist auch nicht zu erwarten, da bei dem hier gegebenen Beweis $w(z)$ in beliebiger Nähe des Randes von $H_{r_0}^k$ wesentliche Singularitäten haben kann, so daß die schärfere Voraussetzung von DUFRESNOY nicht ausgenutzt wird.

§ 1. Der erste Hauptsatz

Da fast alle auftretenden Größen von k abhängen, wird der Index k außer in Definitionen im allgemeinen fortgelassen. Der Untersuchung liegt die Formel

$$\text{(I.1)}\qquad \begin{cases} \sum_\nu \lambda(z_\nu) - \sum_\mu \lambda(z_\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left(\log|f|\,\frac{\partial\lambda}{\partial n} - \lambda\,\frac{\partial}{\partial n}\log|f|\right) ds + \\ \qquad + \frac{1}{2\pi}\iint_G \log|f|\,\Delta\lambda\, d\sigma \end{cases}$$

von F. und R. NEVANLINNA [9] zugrunde. Dabei sei $f(z)$ im Gebiet G und auf dessen Rand Γ meromorph, $\lambda(z)$ dort reell und zweimal stetig differenzierbar. $\partial/\partial n$ sei die Ableitung nach der inneren Normalen von Γ, Γ sei stückweise stetig gekrümmt. z_ν durchlaufe die Nullstellen von $f(z)$ in G, z_μ die Pole, immer in entsprechender Vielfachheit gezählt, auf Γ sei $f(z) \neq 0, \infty$.

Mit den Definitionen

$$\text{(I.2)}\qquad \gamma_r^k = \left\{ z \,|\, r_0 \leqq |z| \leqq r,\ \arg z = \pm\frac{\pi}{2k} \right\},$$

$$\text{(I.3)}\qquad \Gamma_r^k = \left\{ z \,|\, |z| = r,\ |\arg z| \leqq \frac{\pi}{2k} \right\}$$

und der Festsetzung

$$\text{(I.4)}\qquad \lambda(z) = \operatorname{Re}(z^k) = |z|^k \cos k\varphi$$

wird (I.1) auf das Gebiet G_r (0.2) und die Funktion

$$\text{(I.5)}\qquad f(z) = \frac{w-a}{w-b}\cdot\frac{\sqrt{1+|b|^2}}{\sqrt{1+|a|^2}}$$

angewendet. Mit dem chordalen Abstand

$$\text{(I.6)}\qquad [w,a] = \frac{w-a}{\sqrt{1+|w|^2}\,\sqrt{1+|a|^2}}$$

ergibt sich, falls $w(z) \neq a, b$ auf dem Rand von G_r ist,

$$\text{(I.7)}\qquad \begin{cases} \sum_\nu r_\nu^k \cos k\varphi_\nu - \sum_\mu r_\mu^k \cos k\varphi_\mu = \frac{k}{2\pi}\int_{\gamma_r} \log\frac{[w,a]}{[w,b]}\,|z|^{k-1}\,d|z| + \\ \qquad + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r - \Gamma_{r_0}} \left(-k r^k \log\frac{[w,a]}{[w,b]} + r^{k+1}\,\frac{\partial}{\partial r}\log\frac{[w,a]}{[w,b]}\right)\cos k\varphi\, d\varphi. \end{cases}$$

Dabei durchlaufe $z_\nu = r_\nu e^{i\varphi_\nu}$ die a-Stellen, z_μ die b-Stellen von $w(z)$ in G_r; nach einem üblichen Grenzübergang können a- bzw. b-Stellen von $w(z)$ auf γ_r zugelassen werden. Das Integral über γ_r besteht nach (I.2) aus zwei Linienintegralen, in denen jeweils $|z|$ von r_0 bis r läuft. Für $w(z) \neq a$ auf Γ_r und Γ_{r_0} ist also der Ausdruck

$$\text{(I.8)} \quad \begin{cases} S_k(r|r_0) = \sum\limits_{\substack{z_\nu \in G_r \\ w(z_\nu)=a}} r_\nu^k \cos k\varphi_\nu + \dfrac{k}{2\pi} \displaystyle\int_{\gamma_r} |z|^{k-1} \log \frac{1}{[w,a]}\, d|z| + \\ \qquad + \left[r^{2k+1} \dfrac{\partial}{\partial r} \dfrac{1}{2\pi r^k} \displaystyle\int_{\Gamma_r} \log \frac{1}{[w,a]} \cos k\varphi\, d\varphi \right]_{r_0}^{r} \end{cases}$$

von a unabhängig. Führt man die Abkürzungen

$$\text{(I.9)} \qquad n_k(r,a) = \sum_{\substack{z_\nu \in G_r \\ w(z_\nu)=a}} r_\nu^k \cos k\varphi_\nu ,$$

$$\text{(I.10)} \qquad m_k(r,a) = \frac{1}{2\pi r^k} \int_{\Gamma_r} \log \frac{1}{[w,a]} \cos k\varphi\, d\varphi ,$$

$$\text{(I.11)} \quad \begin{cases} \mu_k(r,a) = \dfrac{k}{2\pi} \displaystyle\int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} |z|^{k-1} \log \frac{1}{[w,a]}\, d|z| \\ \qquad = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_{\gamma_r} \left(\frac{1}{|z|^{2k}} - \frac{i}{r^{2k}} \right) |z|^{k-1} \log \frac{1}{[w,a]}\, d|z| \end{cases}$$

ein, so schreibt sich (I.8) in der Form

$$\text{(I.12)} \qquad S(r|r_0) = n(r,a) + r^{2k+1}\big(m'(r,a) + \mu'(r,a)\big) - r_0^{2k+1} m'(r_0,a).$$

(I.12) wird durch r^{2k+1} dividiert und von r_0 bis r integriert. Wegen der Stetigkeit der beteiligten Summanden bezüglich r kann dann die Voraussetzung $w(z) \neq a$ auf Γ_r fallengelassen werden.

Mit den weiteren Bezeichnungen

$$\text{(I.13)} \qquad T_k(r|r_0) = \int_{r_0}^{r} \frac{S_k(t|r_0)}{t^{2k+1}}\, dt ,$$

$$\text{(I.14)} \qquad N_k(r,a) = \int_{r_0}^{r} \frac{n_k(t,a)}{t^{2k+1}}\, dt = \frac{1}{2k} \sum_\nu \left(\frac{1}{r_\nu^k} - \frac{r_\nu^k}{r^{2k}} \right) \cos k\varphi_\nu$$

erhält man den

1. Hauptsatz: *Ist $w(z)$ in $H_{r_0}^k$ eindeutig und meromorph und beachtet man die Definitionen* (I.8—11) *und* (I.13—14), *so ist der Ausdruck*

$$\text{(I.15)} \quad T(r|r_0) = N(r,a) + m(r,a) + \mu(r,a) - m(r_0,a) + \frac{r_0}{2k}\left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{2k} - 1 \right) m'(r_0,a)$$

von a unabhängig. Dabei ist die rechte Seite nur definiert, wenn auf Γ_{r_0} $w(z) \neq a$ ist.

Aus diesem Satz sollen nun die Integraldarstellung von $T(r|r_0)$ nach SHIMIZU und AHLFORS sowie eine für den 2. Hauptsatz wichtige Ungleichung hergeleitet werden.

Dazu multipliziere man (I.15) mit dem sphärischen Flächenelement

$$d\omega(a) = \frac{|a|\,d|a|\,d\alpha}{(1+|a|^2)^2} \qquad (a = |a|\,e^{i\alpha}) \tag{I.16}$$

und integriere über die a-Ebene E. Es ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} T(r|r_0) = {} & \frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t^{2k+1}}\iint_E n(t,a)\,d\omega(a) + \frac{1}{4k}\left(\frac{r_0^k}{r^{2k}} - \frac{1}{r_0^k}\right) + \\ & + \frac{r_0}{2k}\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2k} - 1\right)\iint_E m'(r_0,a)\,d\omega(a), \end{aligned}\right. \tag{I.17}$$

dabei ist die Gleichung

$$\iint_E \log\frac{1}{[w,a]}\,d\omega(a) = \frac{\pi}{2}$$

(unabhängig von w) berücksichtigt worden. Das letzte Integral in (I.17) ist endlich, denn bis auf die Menge

$$E_0 = \{a\,|\,w(z) = a,\ z\in\Gamma_{r_0}\}$$

vom sphärischen Maß 0 ist $m'(r_0, a)$ nach (I.15) gleich einer über E integrierbaren Funktion, also selbst integrierbar. Aus der bekannten Beziehung

$$\iint_E n(t,a)\,d\omega(a) = \iint_{G_t}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,|z|^k\cos k\varphi\,d\sigma \tag{I.18}$$

erhält man schließlich mit von r unabhängigen C_0 und C_1

$$T(r|r_0) = \frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t^{2k+1}}\iint_{G_t}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,|z|^k\cos k\varphi\,d\sigma + \frac{C_0}{r^{2k}} + C_1. \tag{I.19}$$

Das ist die Integraldarstellung von $T(r|r_0)$, aus der sofort die Konvexität von $T(r|r_0)$ als Funktion von r^{-2k} folgt (DINGHAS [3] für den Fall der Halbebene). Ferner ist

$$T_{k_1}(r|r_0) \geqq T_{k_2}(r|r_0) + O(1) \qquad (k_1 \leqq k_2), \tag{I.20}$$

da bei wachsendem k das Integrationsgebiet des Flächenintegrals kleiner wird und $|z|^k t^{-2k}\cos k\varphi$ für $t\geqq 1$ monoton abnimmt.

Zum Beweis der oben erwähnten Ungleichung seien nach AHLFORS $a_1, \ldots, a_q$ verschiedene komplexe Zahlen und

$$\varrho(a) = C\,\Pi^{-2}\log^{-2}\Pi \qquad \left(\Pi = \prod_{\nu=1}^{q}[a,a_\nu]\right). \tag{I.21}$$

Die Konstante C werde so bestimmt, daß

$$\iint_E \varrho(a)\,d\omega(a) = 1 \tag{I.22}$$

ist; dieses Integral existiert.

Aus dem 1. Hauptsatz (I.15) ergibt sich nun die Ungleichung

$$T(r|r_0) \geqq N(r,a) - m(r_0,a) + \frac{r_0}{2k}\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2k} - 1\right) m'(r_0,a), \tag{I.23}$$

die mit $\varrho(a)\, d\omega(a)$ multipliziert und über E integriert werden soll. Dabei muß die Existenz von

$$\iint_E m'(r_0,a)\,\varrho(a)\,d\omega(a) \tag{I.24}$$

geprüft werden. Nimmt $w(z)$ auf Γ_{r_0} die Zahlen $a_1, \ldots, a_q$ nicht an, so ist

$$\min_{\nu=1,\ldots,q}\left\{\min_{z\in\Gamma_{r_0}}[w(z), a_\nu]\right\} = \delta > 0$$

und die Integrale

$$\iint_E \varrho(a)\log\frac{1}{[w,a]}\,d\omega(a), \quad \iint_E \varrho(a)\,\frac{1}{[w,a]}\,d\omega(a) \tag{I.25}$$

existieren und lassen sich durch nur von δ und den a_ν abhängige Konstanten abschätzen. Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, daß in genügend kleinen Umgebungen der a_ν $[w,a] \geqq \delta/2$ ist. Schließlich läßt sich auf Grund der Ungleichung

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\log\frac{1}{[w,a]}\right| \leqq \frac{|w'|}{(1+|w|^2)\,[w,a]}$$

(s. Dinghas [5], S. 398) das betrachtete Integral (I.24) auf einen Ausdruck zurückführen, der die Integrale aus (I.25) enthält. Damit bleibt (I.24) beschränkt und die Integration von (I.23) liefert

$$T(r|r_0) \geqq \int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t^{2k+1}}\iint_E n(t,a)\,\varrho(a)\,d\omega(a) + O(1). \tag{I.26}$$

Wird zur Abkürzung

$$S_{k\varrho}(r|r_0) = \iint_{G_r}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,\varrho(w)\,|z|^k\cos k\varphi\,d\sigma \tag{I.27}$$

und

$$T_{k\varrho}(r|r_0) = \int_{r_0}^{r}\frac{S_{k\varrho}(t|r_0)}{t^{2k+1}}\,dt \tag{I.28}$$

gesetzt, so folgt mit einer (I.18) entsprechenden Beziehung aus (I.26)

$$T(r|r_0) \geqq T_\varrho(r|r_0) + O(1). \tag{I.29}$$

Für die Restgliedabschätzung in § 3 werden noch zwei Funktionen eingeführt, die sich von den obigen durch das Fehlen von $\cos k\varphi$ in den Flächenintegralen unterscheiden:

$$Z_k(r|r_0) = \frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t^{2k+1}}\iint_{G_t}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,|z|^k\,d\sigma, \tag{I.30}$$

$$Z_{k\varrho}(r|r_0) = \int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t^{2k+1}}\iint_{G_t}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,\varrho(w)\,|z|^k\,d\sigma. \tag{I.31}$$

Diese Ausdrücke betonen die Werte in der Nähe des Randes γ, stärker als die eigentlichen Charakteristiken.

§ 2. Der zweite Hauptsatz (Anfang)

In diesem Paragraphen soll in bekannter Weise der 2. Hauptsatz aufgestellt und eine teilweise Abschätzung des Restgliedes durchgeführt werden. Daraus läßt sich dann eine Defektrelation gewinnen.

Wieder nehme $w(z)$ auf Γ_{r_0} die q verschiedenen komplexen Zahlen $a_1, \ldots, a_q$ $(q>2)$ nicht an. Ebenso sei dort $w'(z) \neq 0, \infty$, das bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, da man immer r_0 geeignet wählen kann. Eine der Zahlen $a_1, \ldots, a_q$ kann gleich ∞ sein.

Die Größe

$$N_1(r) = 2N(r, \infty) - N^*(r, \infty) + N^*(r, 0) \tag{II.1}$$

zählt die mehrfachen Stellen von $w(z)$ mit um 1 verminderter Vielfachheit, wenn sich die mit einem Stern versehenen Größen auf $w'(z)$ beziehen. Man bilde dann den Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{q} N(r, a_\nu) - N_1(r),$$

woraus man nach dem 1. Hauptsatz die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} (q-2)\, T(r|r_0) = \sum_{\nu=1}^{q} N(r, a_\nu) - N_1(r) + \frac{1}{2\pi r^k} \int_{\Gamma_r} \log \Phi \cos k\varphi \, d\varphi + \\ + \frac{k}{2\pi} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} |z|^{k-1} \log \Phi \, d|z| + D(r, r_0) \end{aligned}\right. \tag{II.2}$$

erhält. Darin ist

$$\Phi(z) = \frac{|w'|}{(1+|w|^2)} \prod_{\nu=1}^{q} \frac{1}{[w, a_\nu]} \tag{II.3}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} D(r, r_0) = -\frac{1}{2\pi r_0^k} \int_{\Gamma_{r_0}} \log \Phi \cos k\varphi \, d\varphi + \\ + \frac{r_0}{2k} \left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2k} - 1\right) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2\pi r^k} \int_{\Gamma_r} \log \Phi \cos k\varphi \, d\varphi\right)\right]_{r=r_0} \end{aligned}\right. \tag{II.4}$$

gesetzt worden. Offenbar ist

$$D(r, r_0) = O(1), \tag{II.5}$$

so daß noch die beiden Integrale in (II.2) abzuschätzen sind. Das soll in diese Paragraphen für das erste davon geschehen, dazu sei

$$J_1 = \frac{1}{2\pi r^k} \int_{\Gamma_r} \log \Phi \cos k\varphi \, d\varphi. \tag{II.6}$$

Zur Abkürzung werde ferner

$$\Psi(z) = \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2} \cdot \varrho(w) \tag{II.7}$$

definiert, nach (I.21) gilt

$$\Phi^2(z) = \Psi(z) \cdot \frac{1}{C} \cdot \log^2 \prod_{\nu=1}^{q} \frac{1}{[w, a_\nu]}. \tag{II.8}$$

Für J_1 folgt daraus

$$J_1 = \frac{1}{4\pi r^k} \int_{\Gamma_r} \left\{ \log \Psi - \log C + 2 \log \log \prod_{\nu=1}^{q} \frac{1}{[w, a_\nu]} \right\} \cos k\varphi \, d\varphi. \tag{II.9}$$

Nun wird ein bekannter Hilfssatz verwendet:

HILFSSATZ 1: *Auf der meßbaren Menge Δ seien $f(x)$ und $g(x)$ nicht negativ, nicht identisch Null und $g(x)$, $f(x)$ sowie $\log f(x)$ seien quadratisch integrierbar. Dann gilt*

$$\frac{1}{C} \int_{\Delta} g(x) \log f(x) \, dx \leqq \log \left\{ \frac{1}{C} \int_{\Delta} g(x) f(x) \, dx \right\} \qquad \left(C = \int_{\Delta} g(x) \, dx \right). \tag{II.10}$$

Die Anwendung von (II.10) in (II.9) liefert für die r, für die $w(z) \neq a_1, \ldots, a_q$ auf Γ_r ist,

$$J_1 \leqq \frac{1}{2\pi k r^k} \left\{ \log \int_{\Gamma_r} \Psi \cos k\varphi \, d\varphi + 2 \log \int_{\Gamma_r} \log \prod_{\nu=1}^{q} \frac{1}{[w, a_\nu]} \cos k\varphi \, d\varphi + O(1) \right\}. \tag{II.11}$$

Hier sei bemerkt, daß die rechte Seite von (II.11) für $r \geqq 1$ bei wachsendem k monoton abnimmt. Für ein k-Intervall wird die Abschätzung in k gleichmäßig, wenn man in (II.11) das kleinste k wählt. Dieser Hinweis wird in § 3 benutzt.

Nach dem 1. Hauptsatz ist

$$m(r, a) \leqq T(r|r_0) + O(1) \tag{II.12}$$

und nach (I.27) bis auf die soeben ausgeschlossenen r

$$S'_\varrho(r|r_0) = r^{k+1} \int_{\Gamma_r} \Psi(z) \cos k\varphi \, d\varphi. \tag{II.13}$$

Setzt man dies in (II.11) ein, so erhält man

$$J_1 \leqq \frac{1}{2\pi k r^k} \{ \log S'_\varrho(r|r_0) + 2 \overset{+}{\log} T(r|r_0) + O(1) \}. \tag{II.14}$$

Dabei sei $\overset{+}{\log} a = \operatorname{Max}\{\log a, 0\}$.

Jetzt muß ein zweiter, ebenfalls bekannter Hilfssatz herangezogen werden.

HILFSSATZ 2: *Für $x \geqq x_0$ sei $g(x) > 0$, stetig, monoton wachsend und bis auf isolierte Punkte differenzierbar. Dann ist das Maß der Menge*

$$\{x | g'(x) > g^2(x),\ x \geqq x_0\}$$

nach oben beschränkt.

$S_\varrho(r|r_0)$ und $T_\varrho(r|r_0)$ genügen den Voraussetzungen dieses Hilfssatzes, bis auf eine Menge Δ_r von beschränktem Maß sind die Ungleichungen

$$S'_\varrho(r|r_0) \leqq S^2_\varrho(r|r_0) \leqq r^{4k+2} T^4_\varrho(r|r_0) \tag{II.15}$$

erfüllt. Zusammen mit (I.29) ergibt das für J_1

$$J_1 \leqq \frac{3}{\pi k r^k} \overset{+}{\log} T(r|r_0) + O\left(\frac{\log r}{r^k}\right) \qquad (r \notin \Delta_r). \tag{II.16}$$

(II.2) und (II.16) ermöglichen die folgende Formulierung des 2. Hauptsatzes:

2. HAUPTSATZ: *$w(z)$ sei in $H^k_{r_0}$ (0.1) eindeutig und meromorph. Für die verschiedenen komplexen Zahlen $a_1, \ldots, a_q$ $(q>2)$ gelte auf Γ_{r_0} $w(z) \neq a_1, \ldots, a_q$, ferner sei dort $w'(z) \neq 0, \infty$.*

Mit den Definitionen (I.13—14), (II.1) *und* (II.3) *gilt dann*

$$\begin{cases} (q-2)\, T(r|r_0) \\ \qquad = \sum_{\nu=1}^{q} N(r, a_\nu) - N_1(r) + \frac{k}{2\pi} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} |z|^{k-1} \log \Phi \, d|z| + R(r), \end{cases} \tag{II.17}$$

wobei bis auf eine Menge Δ_r von endlichem Maß

$$R(r) \leqq \frac{3}{\pi k r^k} \overset{+}{\log} T(r|r_0) + O(1) \qquad (r \notin \Delta_r) \tag{II.18}$$

ist.

In (II.17) steht noch ein Integral über die Randwerte von $w(z)$, das im nächsten Paragraphen untersucht wird. Hier soll eine Defektrelation angegeben werden, die keine Voraussetzungen über die Randwerte von $w(z)$ benötigt.

Dazu wird dieses Randintegral mit der Bezeichnung

$$\Theta(r) = -\frac{k}{2\pi} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} |z|^{k-1} \log \frac{|w'|}{(1+|w|^2)} \, d|z| \tag{II.19}$$

in

$$\sum_{\nu=1}^{q} \mu(r, a_\nu) - \Theta(r)$$

aufgespalten. Damit kann (II.17) in der Form

$$(q-2)\, T(r|r_0) = \sum_{\nu=1}^{q} N(r, a_\nu) - N_1(r) - \Theta(r) + \sum_{\nu=1}^{q} \mu(r, a_\nu) + R(r) \tag{II.20}$$

geschrieben werden. Führt man die Größen

$$\delta^*(a) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, a) + \mu(r, a)}{T(r|r_0)} \tag{II.21}$$

und

$$\Theta^* = \lim_{r\to\infty} \frac{N_1(r) + \Theta(r)}{T(r|r_0)} \tag{II.22}$$

ein, so läßt sich aus (II.20) sofort folgern:

DEFEKTRELATION: *Sind $a_1, \ldots, a_q$ $(q>2)$ verschiedene komplexe Zahlen und gilt $\lim_{r\to\infty} T(r|r_0) = \infty$, so ist mit den Definitionen* (II.21—22) *die Beziehung*

$$\sum_{\nu=1}^{q} \delta^*(a_\nu) \leqq 2 - \Theta^* \tag{II.23}$$

erfüllt.

(II.23) entspricht formal der Defektrelation für die Vollebene. Allerdings enthält $\delta^*(a)$ in $\mu(r, a)$ einen Anteil, der die Annahme des Wertes a am Rande des Winkelraumes mißt. Ebenso gehen in den Verzweigungsindex Θ^* durch $N_1(r)$ die mehrfachen Punkte im Innern von $H_{r_0}^k$ ein, durch $\Theta(r)$ die mehrfachen Stellen am Rande. Denn in der Nähe mehrfacher Stellen von $w(z)$ konvergiert $(1+|w|^2)\,|w'|^{-1}$ gegen ∞, was zur Vergrößerung von $\Theta(r)$ beiträgt.

Auch hier gelten die Ungleichungen $0 \leqq \delta^* \leqq 1$, also $\Theta^* \leqq 2$; im Gegensatz zur Vollebene kann aber Θ^* negativ und sogar $-\infty$ sein. Für endliches Θ^* ist die Menge der Werte mit positivem Defekt abzählbar.

§ 3. Der zweite Hauptsatz (Schluß)

Für diesen Paragraphen wird der 2. Hauptsatz in der Form (II.17–18) zugrunde gelegt. Um darin das Randintegral abzuschätzen, wird (II.17) über k von k_1 bis $k_2 = k_1 + \varepsilon$ integriert. Den $k > k_1$ entsprechen Winkelräume mit kleinerer Öffnung als π/k_1, so daß die Untersuchung ganz in $H_{r_0}^{k_1}$ durchgeführt wird. Man erhält

$$\text{(III.1)}\quad \left\{ \begin{aligned} (q-2)\int_{k_1}^{k_2} T_k(r\,|\,r_0)\,dk &= \int_{k_1}^{k_2} \Big\{ \sum_{\nu=1}^{q} N_k(r, a_\nu) - N_{1k}(r) \Big\}\,dk + \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{k_1}^{k_2} k \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} |z|^{k-1} \log \Phi\, d|z|\,dk + \int_{k_1}^{k_2} R(r)\,dk, \end{aligned} \right.$$

dabei sollen die linke Seite mit S_0, die Summanden der rechten Seite der Reihe nach mit S_1, S_2 bzw. S_3 bezeichnet werden. Diese Ausdrücke werden einzeln behandelt. Im folgenden wird zur Vereinfachung $r_0 \geqq 1$ vorausgesetzt.

Abschätzung von S_0: Gegeben ist

$$\text{(III.2)}\quad S_0 = \frac{q-2}{\pi}\int_{k_1}^{k_2}\int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \iint_{G_t} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,|z|^k \cos k\varphi\, d\sigma\, dk + \int_{k_1}^{k_2} O(1)\,dk.$$

Das $O(1)$ ist nach (I.17, 19) für $k_1 \leqq k \leqq k_2$ gleichmäßig beschränkt, wenn auf $\Gamma_{r_0}^{k_1}$ $w(z) \neq a_1, \ldots, a_q$ gilt. Die Entwicklung von

$$\text{(III.3)}\qquad H(k) = \int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\left(\frac{\tau}{t^2}\right)^k \cos k\varphi\, d\varphi \qquad (z = \tau e^{i\varphi})$$

nach dem Mittelwertsatz liefert

$$\text{(III.4)}\quad \left\{ \begin{aligned} H(k) = H(k_1) + (k-k_1)\int_{-\frac{\pi}{2\xi}}^{\frac{\pi}{2\xi}} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\left(\frac{\tau}{t^2}\right)^{\xi} \Big\{ \log\frac{\tau}{t^2}\cdot\cos\xi\varphi - \varphi\sin\xi\varphi \Big\}\,d\varphi \\ (k_1 < \xi < k_2). \end{aligned} \right.$$

Ableitungen nach den Grenzen des Integrals treten nicht auf, da dort der Integrand verschwindet. Wegen $\tau/t^2 \leqq r_0^{-1} \leqq 1$ nimmt $(\tau/t^2)^k \cos k\varphi$ für wachsendes k monoton ab ($|\varphi| \leqq \pi/2k$), also wird

$$H(k) \geqq H(k_1) + (k - k_1)\left\{H(k_1)\log\frac{\tau}{t^2} - \left(\frac{\tau}{t^2}\right)^{k_1}\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2k_1}}^{\frac{\pi}{2k_1}}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,d\varphi\right\}.$$

Nach Integration von k_1 bis k_2 erhält man

$$\text{(III.5)}\qquad \int\limits_{k_1}^{k_2} H(k)\,dk \geqq \varepsilon H(k_1) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left\{H(k_1)\log\frac{\tau}{t^2} - \left(\frac{\tau}{t^2}\right)^{k_1}\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2k_1}}^{\frac{\pi}{2k_1}}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,d\varphi\right\}.$$

Dies muß in (III.2) eingesetzt werden, unter Berücksichtigung der Definition (I.30) und der Ungleichung $\tau/t^2 \geqq 1/r^2$ ergibt sich

$$S_0 \geqq \varepsilon(q-2)\,T_{k_1}(r|r_0) - \varepsilon^2(q-2)\left\{\left(T_{k_1}(r|r_0) + O(1)\right)\log r + \pi Z_{k_1}(r|r_0)\right\} + \varepsilon O(1).$$

Wegen $T_{k_1}(r|r_0) \leqq Z_{k_1}(r|r_0)$ kann man hier schließlich noch schreiben

$$\text{(III.6)}\qquad S_0 \geqq \varepsilon(q-2)\,T_{k_1}(r|r_0) - O(1)\,\varepsilon^2\left(Z_{k_1}(r|r_0)+1\right)\log r + \varepsilon O(1).$$

ABSCHÄTZUNG VON S_1: Zu untersuchen ist

$$\text{(III.7)}\qquad S_1 = \int\limits_{k_1}^{k_2}\left\{\sum_{\nu=1}^{q} N_k(r, a_\nu) - N_{1k}(r)\right\}dk.$$

Da die Abschätzung von $N_{1k}(r)$ nach unten auf Schwierigkeiten stößt, werde die jede a-Stelle nur einfach zählende Anzahlfunktion

$$\text{(III.8)}\qquad \overline{N}_k(r, a) = \frac{1}{2k}\sum_{\substack{z_\nu \in G_r \\ w(z_\nu)=a}}\left(\frac{1}{r_\nu^k} - \frac{r_\nu^k}{r^{2k}}\right)\cos k\varphi_\nu \qquad (z_\nu \neq z_\mu \text{ für } \nu \neq \mu)$$

eingeführt [vgl. (I.14)]. Dann gilt

$$\text{(III.9)}\qquad \sum_{\nu=1}^{q} N_k(r, a_\nu) - N_{1k}(r) \leqq \sum_{\nu=1}^{q}\overline{N}_k(r, a_\nu).$$

In $\overline{N}_k(r, a)$ nimmt mit wachsendem k die Zahl der berücksichtigten a-Stellen ab, ebenso ist jeder einzelne Summand

$$\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{r_\nu^k} - \frac{r_\nu^k}{r^{2k}}\right)\cos k\varphi_\nu$$

bezüglich k monoton fallend, wie man durch Differenzieren leicht nachprüfen kann. Damit wird

$$\overline{N}_k(r, a) \leqq \overline{N}_{k_1}(r, a) \qquad (k \geqq k_1)$$

und

$$\text{(III.10)}\qquad S_1 \leqq \int\limits_{k_1}^{k_2}\sum_{\nu=1}^{q}\overline{N}_{k_1}(r, a_\nu)\,dk = \varepsilon\sum_{\nu=1}^{q}\overline{N}_{k_1}(r, a_\nu).$$

Abschätzung von S_2: In dem Ausdruck

$$S_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{k_1}^{k_2}\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t^{2k+1}}\int_{\gamma_t} k\,|z|^{k-1}\log\Phi\,d|z|\,dk \tag{III.11}$$

kann man wie in § 2 nach (II.7–8)

$$\log\Phi = \frac{1}{2}\log\Psi - \frac{1}{2}\log C + \log\log\prod_{\nu=1}^{q}\frac{1}{[w,a_\nu]} \tag{III.12}$$

setzen. Der mittlere Summand liefert in S_2 ein $\varepsilon\,O(1)$,

$$\left\{\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{4\pi}\int_{k_1}^{k_2}\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t^{2k+1}}\int_{\gamma_t} k\,|z|^{k-1}\log\Psi\,d|z|\,dk + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{k_1}^{k_2}\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t^{2k+1}}\int_{\gamma_t} k\,|z|^{k-1}\log\log\prod_{\nu=1}^{q}\frac{1}{[w,a_\nu]}\,d|z|\,dk + \varepsilon\,O(1). \end{aligned}\right. \tag{III.13}$$

Zuerst soll hier das zweite Integral behandelt werden, dafür sei

$$S_{22} = \frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t^{2k+1}}\int_{\gamma_t} k\,|z|^{k-1}\log\log\prod_{\nu=1}^{q}\frac{1}{[w,a_\nu]}\,d|z|\,. \tag{III.14}$$

Im inneren Integral wird der Hilfssatz 1 angewendet, wobei zu beachten ist, daß das Integral über γ_t für zwei Integrale von r_0 bis t steht. Diese müssen einzeln abgeschätzt werden, nachher kann man sie aber wegen $\log ab \leqq 2\log(a+b)$ $(a, b \geqq 0)$ wieder zusammenziehen. Es ergibt sich

$$S_{22} \leqq \frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{r}\frac{t^k - r_0^k}{t^{2k+1}}\log\left\{\int_{\gamma_t} k\,|z|^{k-1}\log\prod_{\nu=1}^{q}\frac{1}{[w,a_\nu]}\,d|z|\right\}dt + O(1),$$

aus der Definition (I.11) von $\mu_k(r, a)$ folgt weiter

$$S_{22} \leqq \frac{1}{\pi}\int_{r_1}^{r}\frac{t^k - r_0^k}{t^{2k+1}}\left\{\log\frac{\sum_{\nu=1}^{q}\mu_k(t,a_\nu)}{\sum_{\nu=1}^{q}\mu_k(t,a_\nu)} + \log\sum_{\nu=1}^{q}\mu_k(t,a_\nu)\right\}dt + O(1).$$

In der unteren Grenze des Integrals ist r_0 durch $r_1 > r_0$ ersetzt worden, das Integral von r_0 bis r_1 kann in das $O(1)$ hineingenommen werden. Auf Grund des Hilfssatzes 1 für den ersten Summanden bzw. des 1. Hauptsatzes für den zweiten wird daraus

$$S_{22} \leqq \frac{1}{\pi k r_0^k}\overset{+}{\log}\int_{r_1}^{r}\left(\log\sum_{\nu=1}^{q}\mu_k(t,a_\nu)\right)\frac{dt}{t^{k+1}} + \frac{1}{\pi}\int_{r_1}^{r}\frac{\overset{+}{\log}\,T_k(t|r_0)}{t^{k+1}}\,dt + O(1).$$

Integriert man das erste Integral partiell und wendet danach die Ungleichung $\overset{+}{\log}(a+b+c) \leqq \overset{+}{\log}\,a + \overset{+}{\log}\,b + \overset{+}{\log}\,c + \log 3$ an, so erhält man

$$S_{22} \leqq \frac{1}{\pi k r_0^k}\overset{+}{\log}\frac{\overset{+}{\log}\,T_k(r|r_0)}{r^{k+1}} + O\left(1 + \int_{r_0}^{r}\frac{\overset{+}{\log}\,T_k(t|r_0)}{t^{k+1}}\,dt\right).$$

Wegen der Monotonie von $T_k(r|r_0)$ in k (I.20) wird schließlich

$$\text{(III.15)} \qquad S_{22} \leqq \frac{1}{\pi k_1 r_0^{k_1}} \overset{+}{\log} \frac{\overset{+}{\log} T_{k_1}(r|r_0)}{r^{k_1+1}} + O\left(1 + \int_{r_0}^{r} \frac{\overset{+}{\log} T_{k_1}(t|r_0)}{t^{k_1+1}}\, dt\right).$$

Das $O(1)$ ist dabei für ein festes k-Intervall von k unabhängig. Endlich kann nach Hilfssatz 2 der erste Summand bis auf eine Ausnahmemenge Δ_r von endlichem Maß in den zweiten hineingenommen werden. Das Ergebnis ist in (III.13) einzusetzen:

$$\text{(III.16)} \qquad \begin{cases} S_2 \leqq \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_{k_1}^{k_2} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t^{2k+1}} \int_{\gamma_t} k\,|z|^{k-1} \log \Psi\, d|z|\, dk + \\ \qquad + \varepsilon O\left(1 + \displaystyle\int_{r_0}^{r} \frac{\overset{+}{\log} T_{k_1}(t|r_0)}{t^{k_1+1}}\, dt\right) \qquad (r \notin \Delta_r). \end{cases}$$

Das erste Integral in (III.16) werde S_{21} genannt,

$$\text{(III.17)} \qquad S_{21} = \frac{1}{4\pi} \int_{r_0}^{r} dt \int_{k_1}^{k_2} \int_{\gamma_t} \frac{k|z|^{k-1}}{t^{2k+1}} \log \Psi\, d|z|\, dk.$$

Hier kann erneut Hilfssatz 1 verwendet werden, der offenbar auch für mehrfache Integrale gültig bleibt. Beachtet man die Bemerkung nach (III.14), so folgt

$$\text{(III.18)} \qquad S_{21} \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{r} C_0(t) \log\left\{\frac{1}{C_0(t)} \int_{k_1}^{k_2} \int_{\gamma_t} \frac{k|z|^{k-1}}{t^{2k+1}} \Psi\, d|z|\, dk\right\} dt,$$

wobei

$$\text{(III.19)} \qquad C_0(t) = \int_{r_0}^{t} \int_{k_1}^{k_2} \frac{k|z|^{k-1}}{t^{2k+1}}\, dk\, d|z|$$

ist. Aus (III.19) gewinnt man wegen $|z|/t^2 \leqq 1$ leicht die Ungleichung

$$\text{(III.20)} \qquad \varepsilon \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{t^{k_2} - r_0^{k_2}}{t^{2k_2+1}} \leqq C_0(t) \leqq \varepsilon \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{1}{t^{k_1+1}},$$

diese wiederum ergibt zusammen mit (III.18)

$$\text{(III.21)} \qquad \begin{cases} S_{21} \leqq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{r_0}^{r} C_0(t)\, dt \log \int_{k_1}^{k_2} \int_{\gamma_t} \frac{|z|^{k+1}}{t^{2k+1}} \Psi\, d|z|\, dk + \\ \qquad + O(1)\left(\varepsilon + \varepsilon \overset{+}{\log} \dfrac{1}{\varepsilon}\right). \end{cases}$$

Dabei ist noch die Potenz von $|z|$ geeignet verändert worden. Das Doppelintegral vergrößert sich, wenn man im Exponenten k durch k_1 ersetzt. Ferner tritt k im Argument von $w(z)$ als $z = |z|\, e^{\pm i\pi/2k}$ auf. Setzt man $\pm\pi/2k = \varphi$, so

verwandelt sich das Doppelintegral in ein Flächenintegral über das Gebiet

$$K_t = \left\{ z \,|\, r_0 < |z| < t,\ \frac{\pi}{2k_2} < |\varphi| < \frac{\pi}{2k_1} \right\}.$$

Ohne später die gesamte Abschätzung zu verschlechtern, kann K_t durch $G_t^{k_1}$ ersetzt werden, denn der hinzugefügte Teil ist nur ein $O\left(\frac{1}{\varepsilon} T'_{k_1\varrho}(t|r_0)\right)$. Mit der Definition (I.31) von $Z_{k\varrho}(r|r_0)$ folgt also aus (III.21)

$$S_{21} \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{r} C_0(t) \log Z'_{k_1\varrho}(t|r_0)\, dt + O(1)\left(\varepsilon + \varepsilon \overset{+}{\log} \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{r} C_0(t) \{\log (\log Z_{k_1\varrho})' + \log Z_{k_1\varrho}\}\, dt + O(1)\left(\varepsilon + \varepsilon \overset{+}{\log} \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Wie bei der Untersuchung von S_{22} erhält man hier durch Anwendung der Hilfssätze 1 und 2 auf den ersten Summanden

$$\text{(III.22)} \qquad S_{21} \leqq \varepsilon O(1) \int_{r_0}^{r} \frac{\overset{+}{\log} Z_{k_1\varrho}(t|r_0)}{t^{k_1+1}}\, dt + O(1)\left(\varepsilon + \varepsilon \overset{+}{\log} \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (r \notin \Delta_r).$$

Dabei ist zum Schluß die obere Schranke (III.20) für $C_0(t)$ eingesetzt worden; Δ_r ist eine Menge von beschränktem Maß. Zusammen mit (III.16) liefert (III.22) die endgültige Abschätzung von S_2:

$$\text{(III.23)} \qquad \begin{cases} S_2 \leqq \varepsilon O(1) \displaystyle\int_{r_0}^{r} \{\overset{+}{\log} Z_{k_1\varrho}(t|r_0) + \overset{+}{\log} T_{k_1}(t|r_0)\} \frac{dt}{t^{k_1+1}} + \\ \qquad + O(1)\left(\varepsilon + \varepsilon \overset{+}{\log} \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (r \notin \Delta_r). \end{cases}$$

Schließlich bleibt noch die

Abschätzung von S_3: In

$$\text{(III.24)} \qquad S_3 = \int_{k_1}^{k_2} R(r)\, dk$$

ist auf Grund der Bemerkung nach (II.11) und der Ungleichung (II.18) bekannt, daß bis auf eine Menge Δ_r von endlichem Maß gleichmäßig für $k_1 \leqq k \leqq k_2$ gilt

$$R(r) \leqq \frac{3}{\pi k_1 r^{k_1}} \overset{+}{\log} T_{k_1}(r|r_0) + O(1) \qquad (r \notin \Delta_r).$$

Dies kann man natürlich bezüglich k integrieren und erhält

$$\text{(III.25)} \qquad S_3 \leqq \frac{3\varepsilon}{\pi k_1 r^{k_1}} \log T_{k_1}(r|r_0) + \varepsilon O(1) \qquad (r \notin \Delta_r).$$

Damit sind die notwendigen Abschätzungen geleistet, in (III.1) werden (III.6, 10, 23, 25) eingesetzt. Im Ergebnis wird durch ε dividiert, ferner kann

k_1 durch k ersetzt und der Index k wieder fortgelassen werden. Die zusammenfassende Ungleichung lautet

$$\text{(III.26)}\quad \begin{cases} (q-2)\,T(r|r_0) \leqq \sum_{\nu=1}^{q} \overline{N}(r,a_\nu) + O(1)\int_{r_0}^{r} \overset{+}{\log} Z_\varrho(t|r_0) + \overset{+}{\log} T(t|r_0)\}\,\frac{dt}{t^{k+1}} + \\ \qquad + O(1)\left\{1 + \overset{+}{\log}\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\left(Z(r|r_0)+1\right)\log r\right\} + \\ \qquad + O\left(\frac{\log T(r|r_0)}{r^k}\right) \qquad (r \notin \Delta_r). \end{cases}$$

Δ_r ist wieder eine Menge von beschränktem Maß. $\log\frac{1}{x} + a\,x$ nimmt sein Minimum $\log a + 1$ für $x = \frac{1}{a}$ an, deshalb wird die bisher noch unbestimmte Größe ε zu

$$\text{(III.27)}\qquad \varepsilon = \varepsilon(r) = \frac{1}{\left(Z(r|r_0)+1\right)\log r}$$

festgelegt. Berücksichtigt man endlich

$$\text{(III.28)}\qquad \int_{r_0}^{r} \overset{+}{\log} T(t|r_0)\,\frac{dt}{t^{k+1}} \leqq O(1)\,\overset{+}{\log} T(r|r_0) \leqq O(1)\,\overset{+}{\log} Z(r|r_0),$$

so kann man den 2. Hauptsatz wie folgt formulieren:

2. HAUPTSATZ: *Die Funktion $w(z)$ sei im Winkelraum $H_{r_0}^{k}$ (0.1) eindeutig und meromorph, man definiere ihre Charakteristik nach* (I.19), *die Anzahlfunktion ihrer — einfach gezählten — a-Stellen durch* (III.8) *sowie die Hilfscharakteristiken $Z(r|r_0)$ und $Z_\varrho(r|r_0)$ durch* (I.30–31).

Sind dann $a_1, \ldots, a_q$ verschiedene komplexe Zahlen, so gilt bis auf eine Menge Δ_r von endlichem Maß

$$\text{(III.29)}\quad \begin{cases} (q-2)\,T(r|r_0) \leqq \sum_{\nu=1}^{q} \overline{N}(r,a_\nu) + O\left(1 + \overset{+}{\log}\overset{+}{\log} r + \overset{+}{\log} Z(r|r_0)\right) + \\ \qquad + O(1)\int_{r_0}^{r} \overset{+}{\log} Z_\varrho(t|r_0)\,\frac{dt}{t^{k+1}} \qquad (r \notin \Delta_r). \end{cases}$$

Die zu Beginn dieses Paragraphen gemachte Einschränkung $r_0 \geqq 1$ ist hier offenbar belanglos, da die fehlenden Größen nur ein $O(1)$ ausmachen.

Eigenschaften der Funktion $w(z)$ in Punkten außerhalb des Winkelraumes sind nicht benutzt worden. Die Funktionen $Z(r|r_0)$ und $Z_\varrho(r|r_0)$ in (III.29) haben gegenüber reinen Randintegralen den Vorteil, das Verhalten von $w(z)$ in der Nähe des Randes nicht so stark zu bewerten. $Z(r|r_0)$ bzw. $Z_\varrho(r|r_0)$ können leicht durch die Charakteristik in einem größeren Winkelraum abgeschätzt werden. Das Restglied in (III.29) lautet dann

$$O\left(1 + \overset{+}{\log}\overset{+}{\log} r + \overset{+}{\log} T_{k_0}(r|r_0)\right) \quad (k_0 < k).$$

Dieses Ergebnis erreicht nicht das von J. DUFRESNOY [5] angegebene, wie schon in der Einleitung bemerkt worden ist. Insbesondere enthält das obige

Restglied einen von $w(z)$ unabhängigen Summanden $\log\log r$, so daß hier für die Gültigkeit der bekannten Aussagen über die Werteverteilung stets

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log\log r}{T(r|r_0)} = 0$$

gefordert werden muß.

Literatur

[1] Ahlfors, L.: Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen. Soc. Sci. Fenn., Comm. Phys.-Math. **8**, Nr. 10 (1935).

[2] Dinghas, A.: Bemerkungen zur Ahlforsschen Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen I. Comp. Math. **5**, 107–118 (1937).

[3] — Über eine Eigenschaft der Charakteristik von meromorphen Funktionen in einer Halbebene. Math. Z. **44**, 354–361 (1939).

[4] — Eine Bemerkung zur Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen. Math. Z. **44**, 568–572 (1939).

[5] — Zum Verhalten eindeutiger analytischer Funktionen in der Umgebung einer wesentlichen isolierten Singularität. Math. Z. **66**, 389–408 (1957).

[6] Dufresnoy, J.: Sur les fonctions dans un angle. C. R. Acad. Sci. Paris **208**, 718–720 (1939).

[7] Habetha, K.: Eine Bemerkung zur Werteverteilung meromorpher Funktionen in der Halbebene. Arch. Math. **12**, 43–50 (1961)

[8] af Hällström, G.: Über meromorphe Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten. Acta Acad. Abo., Math. et Phys. **12**, Nr. 8 (1939).

[9] Nevanlinna, F. u. R.: Über die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie. Acta Soc. Sci. Fenn. **50**, Nr. 5 (1922).

[10] Nevanlinna, R.: Über die Eigenschaften von meromorphen Funktionen in einem Winkelraum. Acta Soc. Sci. Fenn. **50**, Nr. 12 (1925).

Berlin-Charlottenburg, Mathematisches Institut der Technischen Universität

(Eingegangen am 15. Dezember 1960)